Analysis der Eikonal-Gleichung

Teil I

Seminararbeit zur angewandten Mathematik

Matthäus Deutsch

vorgelegt bei Prof Dr. Wolfgang Ring

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

Universität Graz

Sommersemester 2012

1 Einleitung

Nachdem im vorigen Kapitel die Eikonal-Gleichung und ihre Bedeutung für die geometrische Optik erklärt wurde, sollen in diesem die mathematischen Eigenschaften der Gleichung betrachtet und die eindeutige Existenz einer Lösung hergeleitet werden. Dazu brauchen wir einen neuen Lösungsbegriff, der im folgenden ersten Teil formuliert werden soll. Auch erste Eigenschaften sollen beschrieben werden. Wir betrachten in diesem Kapitel allgemeinere partielle Differentialgleichungen erster Ordnung der Art

$$F(x, u, Du) = 0 \tag{1}$$

Hier soll Ω ein offenes, beschränktes Gebiet aus dem $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine unbekannte, reell-wertige Funktion sein und $Du = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$ den Gradienten von u bezeichnen. $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet eine beliebige Funktion, welche in ihrem zweiten Argument monoton wachsend ist. Auf dem Rand $\delta\Omega$ soll die Lösung Funktionswerte $u(x) = g(x)$ annehmen.[1] Für diese Art von Problemen wird im Laufe des Kapitels mit dem Konzept der Viskositätslösungen eine Methode entwickelt, die Existenz eindeutig bestimmter Lösungen zu sichern. Im Falle der Eikonalgleichung betrachten wir

[1] Wir sprechen hierbei von Dirichlet-Randbedingungen bzw. von einem Dirichlet-Problem.

$F(x,u,Du) = G(x,Du) = |Du| - f(x)$ für eine stetige, strikt positive Seite $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, sodass wir auf die Gleichung

$$|Du| = f(x) \tag{2}$$

kommen. Die Eikonalgleichung wird im Folgenden als Spezialfall der allgemeineren Resultate behandelt. Zuerst soll das Konzept der Viskositätslösungen vorgestellt und diese definiert werden. Im ersten Teil wird weiters das Vergleichsprinzip bewiesen, welches eine wichtige Grundlage für das im zweiten Teil betrachtete Theorem von Ishii[2] darstellt, mit dessen Hilfe die Existenz von Viskositätslösungen der Gleichung (1) für eine sehr breite Klasse an Funktionen F gesichert werden kann. Wir folgen bei der Herleitung der Ergebnisse im Großen und Ganzen der Einführung von Viskositätslösungen und ihrer Eigenschaften bei Crandall [1].

2 Definition der Viskositätslösung

Wir beginnen mit einem ganz einfachen Beispiel, welches jedoch bereits die Notwendigkeit von nicht-klassischen Lösungsansätzen[3] für die Art von Problemen wie das der Eikonalgleichung zeigen soll.

Beispiel 1. Wir wollen die Eikonalgleichung (2) mit $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = 1$ und homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(-1) = u(1) = 0$ betrachten:

$$|u'(x)| = 1 \tag{3}$$

Sei $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ klassische Lösung, also stetig differenzierbar, löse die Gleichung und erfülle die Randbedingungen. Dann folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialgleichung die Existenz einer Zwischenwertstelle $\xi \in (-1,1)$, sodass $u'(\xi) = |u'(\xi)| = 0$, was einen Widerspruch zur Problemstellung bedeuten würde. Somit kann keine klassische Lösung des Problems existieren.

Das Beispiel zeigt die Notwendigkeit von schwächeren Lösungsbegriffen. Einen solchen Begriff liefert uns die Viskositätstheorie. Bevor wir diese Definition gemäß dem Konzept von Crandall [1] formulieren, wollen wir sie noch kurz motivieren.[4] Wir wollen annehmen, u sei klassische Lösung der Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$ und $\varphi \in C^2$, eine Funktion, welche u im Punkt x_0 von oben berühre, also gilt $\varphi \geq u$ und $\varphi(x_0) = u(x_0)$. $u - \varphi$ hat dann ein lokales Maximum im Punkt x_0, ist um x_0 also lokal konvex. Dann folgt

$$0 \geq \Delta(u-\varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) = -\Delta\varphi(x_0) \Rightarrow -\Delta\varphi(x_0) \leq 0 \tag{4}$$

[2] geboren 1956 in Tokio

[3] Eine klassische Lösung soll stetig differenzierbar sein und die Gleichung an jeder Stelle lösen sowie die Randbedingungen erfüllen.

[4] Für eine ausführlichere Motivation auch aus dem eigentlichen Viskositätsbegriff mit einem „viskosen "Term, welcher der Gleichung angefügt wird, siehe Evans [2], Kap. 10.

Für Testfunktionen $\varphi \in C^2$, die u im Punkt x_0 von unten berühren, lässt sich mittels Minimumsbetrachtungen in gleicher Weise $-\Delta\varphi(x_0) \geq 0$ herleiten. Wenn u selbst nicht aus C^2 ist, werden nun diese Testfunktionen verwendet, um schwache Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu definieren. Anstatt eine Lösung u zu betrachten, wird das Problem anhand einer Testfunktion φ untersucht, welche u von unten berührt. Da es uns hier um die Eikonalgleichung und damit eine Differentialgleichung erster Ordnung geht, definieren wir Viskositätslösungen vorerst auch nur für Probleme der Art (1).

Definition 1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. u ist für $F = 0$ in Ω

- Viskositäts-Sublösung, falls u von oben halbstetig ist und für jedes $\varphi \in C^1(\Omega)$ und Maximum $x_0 \in \Omega$ von $u - \varphi$ gilt, dass $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \leq 0$
- Viskositäts-Superlösung, falls u von unten halbstetig ist und für jedes $\varphi \in C^1(\Omega)$ und Minimum $x_0 \in \Omega$ von $u - \varphi$ gilt, dass $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \geq 0$
- Viskositäts-Lösung, sofern u Viskositäts-Super- und Sublösung ist.

Einige Bemerkungen zu dieser Definition.

- Eine Abbildung $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt im Punkt $x_0 \in \Omega$ von unten halbstetig, wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $c \leq u(x_0)$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $u(U) \subset (c, \infty]$ existiert.
- Eine Abbildung $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt im Punkt $x_0 \in \Omega$ von oben halbstetig, wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq u(x_0)$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $u(U) \subset [-\infty, c)$ existiert.
- Die Definition lässt sich einfach auf Differantialgleichungen beliebiger, speziell natürlich zweiter Ordnung ausweiten, indem man für die Testfunktion φ der Ordnung der Differentialgleichung entsprechende Differenzierbarkeit annimmt. Wir werden im nächsten Teil dieses Kapitels sehen, dass wir dann jedoch bestimmte Eigenschaften der „Wohlgebildetheit “zusätzlich zur Monotonie von F annehmen müssen. Wohlgebildet ist eine Funktion dann, wenn sie auch bezüglich der zweiten Ableitung monoton steigend ist.[5]
- Im Folgenden wollen wir Sub-, Super- bzw. Lösung zur Viskositäts-Sub-, Viskositäts-Super bzw. Viskositäts-Lösung sagen. Sollte es sich um klassische Lösungen handeln, erwähnen wir das explizit.
- Zu beachten ist, dass die Lösungen der Gleichungen $F = 0$ und $-F = 0$ nicht gleich sein müssen, wie wir im folgenden Beispiel sehen werden.

[5] $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \to \mathbb{R}$ ist wohlgebildet genau dann, wenn $F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y)$, falls $r \leq s$ und $X \leq Y$, wobei die letzte Ungleichung Ungleichheit bezüglich des inneren Produkts bedeutet, also $\langle X\xi, \xi\rangle \leq \langle Y\xi, \xi\rangle$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

Beispiel 2. Wir betrachten abermals die Eikonalgleichung (2) mit $\Omega = (-1, 1)$, $f(x) = 1$ und homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(-1) = u(1) = 0$:

$$|u'(x)| = 1 \tag{5}$$

Wir haben bereits gesehen, dass eine klassische Lösung offenbar nicht existiert. Was wir nun zeigen wollen, ist, dass $u(x) = -|x| + 1$ eine Lösung im soeben definierten Sinne darstellt. Sei $\varphi \in C^1(-1, 1)$ so gewählt, dass $u - \varphi$ in einem Punkt $x_0 \in (-1, 1)$ ein lokales Maximum annimmt. Falls $x_0 \neq 0$, ist u im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt $|\varphi'(x_0)| = |u'(x_0)| = 1$. Für $x_0 = 0$ gilt $-|x| = u(x) - u(0) \leq \varphi(x) - \varphi(0)$ in einer Umgebung von 0. Daraus folgt

$$1 \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \quad \text{für } x < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(0) - \varphi(x)}{x} \geq -1 \quad \text{für } x > 0 \tag{6}$$

Da φ differenzierbar ist, existiert der Grenzwert für $x \to 0$ und es folgt die gewünschte Eigenschaft $|\varphi(0)'| \leq 1$. Damit ist $u(x) = -|x| + 1$ eine Sublösung der Eikonalgleichung, da wir φ entsprechend der Definition beliebig gewählt haben. Betrachten wir nun ein $\varphi \in C^1(-1, 1)$, sodass $u - \varphi$ im Punkt 0 ein lokales Minimum annimmt. Dann kommt man durch analoge Abschätzungen lediglich in die andere Richtung auf $D^-\varphi(0) \geq 1$ und $D^+\varphi(0) \leq -1$, was der Differenzierbarkeit von φ widerspricht. Damit kann keine entsprechende Funktion φ, welche u von oben berührt, existieren, somit ist das zweite Kriterium trivialerweise erfüllt und $u(x) = -|x| + 1$ Lösung der betrachteten Eikonalgleichung.

Multiplizieren wir die soeben betrachtete Gleichung jedoch mit -1, erhalten wir $-|u'(x)| + 1 = 0$. Die Funktion $\varphi(x) := x^2 + 1$ berührt $u(x) = -|x| + 1$ im Punkt 0 von oben, 0 ist also lokales Maximum der Funktion $u - \varphi$. Es gilt

$$|\varphi'(0)| + 1 = |2 \times 0| + 1 = 1 > 0$$

Somit ist u keine Sublösung und folglich keine Lösung des betrachteten Problems, welches jedoch lediglich mit -1 multipliziert wurde. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass, wenn u Lösung des Problems $F(x, u, Du) = 0$ ist, $-u$ Lösung des Problems $-F(-x, -u, -Du) = 0$ ist.

Das Konzept der Viskositätslösungen ist mit dem der klassischen Lösung konsistent. Das bedeutet, falls eine klassische Lösung existiert, ist sie auch Viskositätslösung. Umgekehrt sind ausreichend glatte Viskositätslösungen auch klassische Lösung. Diese Tatsache wollen wir in den folgenden Theorem formulieren.

Satz 1. *$u \in C^k(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ sei Viskositätslösung einer partiellen Differentialgleichung der Ordnung k. Dann ist u auch klassische Lösung, erfüllt also auf ganz Ω die Differentialgleichung.*

Beweis. Wir wählen als Testfunktion φ u selbst. Dann sind trivialerweise sämtliche x aus Ω lokale Maxima der Funktion $u - \varphi = 0$. Aus der Definition der Sub- und Superlösung folgt leicht, dass $F(x, u, Du) = 0$ auf ganz Ω erfüllt ist und u somit klassische Lösung ist. □

Satz 2. *Sei $u \in C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ klassische Lösung von* (1)*. Dann ist u auch Lösung im Viskositätssinne.*

Beweis. Sei φ stetig differenzierbar, sodass $u - \varphi$ in x_0 ein lokales Maximum annimmt. Daher gilt $Du(x_0) = D\varphi(x_0)$ und somit

$$0 = F(x_0, u(x_0), Du(x_0)) = F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \tag{7}$$

Analog folgt dieselbe Gleichung für lokale Minima. Daraus folgt, dass u auch Viskositätslösung ist. □

Als letztes, doch essentielles Beispiel dieses Kapitels, wollen wir wieder eine Eikonalgleichung betrachten, diesmal jedoch eine etwas allgemeinere. Wir wollen die gewonnene Tatsache als Lemma für die folgenden Betrachtungen formulieren.

Lemma 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(x) := dist(x, \delta\Omega) = \inf\{\|x - y\| : y \in \delta\Omega\}$. Dann ist u lipschitzstetig mit Konstante 1 und Viskositätslösung der Eikonalgleichung*

$$|Du| = 1 \quad \text{in } \Omega \tag{8}$$

Beweis. Wir wollen mit der Lipschitzstetigkeit beginnen. Es gilt für alle $x, y \in \Omega$ und $\omega \in \delta\Omega$:

$$dist(x, \delta\Omega) \leq dist(x, \omega) \leq dist(x, y) + dist(y, \omega)$$

Daraus folgt sofort die entsprechende Lipschitzstetigkeit. Wir verwenden nun dieses Resultat, um zu zeigen, dass u tatsächlich Lösung der Eikonalgleichung ist. Sei $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $u - \varphi$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum annimmt. Dann gilt in einer Umgebung von x_0

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \geq u(x) - \varphi(x)$$

Daraus folgt mit der Lipschitzstetigkeit

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) \leq u(x_0) - u(x) \leq \|x - x_0\|$$

Mit Division durch $|x - x_0|$ und für $x \to x_0$ folgt aus der Differenzierbarkeit von φ das gewünschte

$$|D\varphi(x_0)| \leq 1$$

Damit ist u Sublösung des Problems. Für den Beweis der Superlösung betrachten wir $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ sodass $u - \varphi$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ ein lokales Minimum annimmt. Dann folgt wieder für x aus einer Umgebung von x_0

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \leq u(x) - \varphi(x)$$

Bertrachten wir die Projektion von x_0 auf $\delta\Omega$, Px_0, also $u(x_0) = |x_0 - Px_0|$ und ein x auf der Strecke zwischen x und x_0, also $x := \mu x_0 + (1-\mu)Px_0$ für $\mu \in (0,1)$, dann folgt

$$u(x) \leq |x - Px_0| = |\mu x_0 + (1-\mu)Px_0 - Px_0|$$

und somit folgt für entsprechende $x \in Omega$

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) \geq u(x_0) - u(x) \geq |x_0 - Px_0| - \mu|x_0 - Px_0| = (1-\mu)|x_0 - Px_0| = |x_0 - x|$$

woraus wie oben folgt, dass

$$|D\varphi(x_0)| \geq 1$$

Damit ist u Super- wie Sublösung und damit Lösung. □

3 Vergleichsprinzip

Das sogenannte Vergleichsprinzip ist das wichtigste Element, um die Eindeutigkeit von Lösungen für bestimmte Probleme, wie etwa die Eikonalgleichung zu zeigen. Das Vergleichsprinzip besagt nichts anderes, als dass die Sublösung u eines Dirichletproblems (1) kleiner-gleich der Superlösung v ist. Dass dies ohne Bedingungen an die Problemfunktion F nicht ohne weiteres der Fall ist, zeigt ein einfaches Beispiel.

Beispiel 3. Wir betrachten $\Omega := (-1, 1)$ und das Problem

$$F(x, u, Du) = |Du|^2 - |2x|^2, \quad u(-1) = u(1) = 0 \tag{9}$$

Offenkundig sind $u(x) = 1 - x^2$ sowie $v(x) = x^2 - 1$ klassische Lösungen des Problems, und damit wegen Satz 2 auch Viskositätslösungen, und dennoch gilt auf ganz Ω nicht, dass $1 - x^2 \leq x^2 - 1$, obwohl u auch Sub- und v Superlösung des Problems ist.

Wir brauchen also bestimmte Voraussetzungen an F (wie etwa die Eingangs erwähnte Monotonie im zweiten Argument), die wir im Folgenden erschließen werden.

Die dem Beweis des Vergleichsprinzips zugrunde liegende Idee ist, ein inneres Maximum x_0 der Funktion $u - v$ zu betrachten. Dann würde wegen $F(x_0, u(x_0), Du(x_0)) \leq 0 \leq F(x_0, v(x_0), Dv(x_0))$, mit $Du(x_0) = Dv(x_0)$ und mit der Monotonie von F in u

folgen,[6] dass $u(x_0) \le v(x_0)$ und damit, da x_0 Maximum ist, auch $u(x) \le v(x)$. Das Problem besteht darin, dass u und v im Punkt x_0 nicht differenzierbar sein müssen, und somit nicht immer $Du(x_0) = Dv(x_0)$ gilt. Dies wollen wir wollen wir durch eine entsprechend glatte Testfunktion $\varphi(x,y)$ ausgleichen, für welche $u(x)-v(y)-\varphi(x,y)$ ein Maximum (x_0,y_0) hat. Nehmen wir an, dass $x_0, y_0 \in \Omega$, dann folgt, dass x_0 Maximum der Funktion $x \longmapsto u(x) - \varphi(x, y_0)$ ist, und somit gemäß der Definition der Sublösung, dass $F(x_0, u(x_0), D_x\varphi(x_0,y_0)) \le 0$. Ähnlich folgt dann, dass y_0 Minimum der Funktion $y \longmapsto v(y) + \varphi(x_0, y)$ und $F(y_0, v(y_0), -D_y\varphi(x_0,y_0)) \ge 0$ und daraus

$$F(x_0, u(x_0), D_x\varphi(x_0,y_0)) - F(y_0, v(y_0), -D_y\varphi(x_0,y_0)) \le 0 \tag{10}$$

Die Aufgabe wird sein, mit der geeigneten Wahl von φ aus dieser Ungleichung zu folgern, dass $u \le v$ gilt. Bevor wir uns dieser Aufgabe stellen, wollen wir noch ein nützliches Lemma formulieren.

Lemma 2. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $w, \Psi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Psi \ge 0$ und $w, -\Psi$ von oben halbstetig. Gelte*

$$\mathcal{N} := \{z \in \Omega : \Psi(z) = 0\} \ne \emptyset \tag{11}$$

und

$$\sup_{z\in\Omega}(w(z) - \Psi(z)) < \infty \tag{12}$$

Sei $M_\varepsilon := \sup_{z\in\Omega}(w(z) - \Psi(z)/\varepsilon)$ für $\varepsilon \le 1$. Falls $z_\varepsilon \in \Omega$, sodass

$$M_\varepsilon - \left(w(z_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\Psi(z_\varepsilon)\right) \to 0 \quad \textit{für } \varepsilon \to 0 \tag{13}$$

dann gilt

$$\frac{1}{\epsilon}\Psi(z_\varepsilon) \to 0. \tag{14}$$

Weiters gilt, falls z_0 Häufungspunkt von z_ε für $\varepsilon \downarrow 0$, dann ist $z_0 \in \mathcal{N}$ und und $w(z) \le w(z_0)$ für $z \in \mathcal{N}$.

Beweis. M_ϵ ist für $0 < \varepsilon \le 1$ monoton fallend. Wegen $\sup_{\mathcal{N}} \le M_\varepsilon \le M_1 < \infty$ ist M_ε beschränkt und somit existiert der endliche Grenzwert $M_0 := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} M_\varepsilon$. Definiere

$$g(\varepsilon) := M_\varepsilon - \left(w(z_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\Psi(z_\varepsilon)\right)$$

Dann gilt für $\mu, \varepsilon > 0$

$$M_\mu - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\mu}\right)\Psi(z_\varepsilon) \ge w(z_\varepsilon) - \frac{1}{\mu}\Psi(z_\varepsilon) - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\mu}\right) = w(z_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\Psi(z_\varepsilon) = M_\varepsilon - g(\varepsilon).$$

[6] Denn es gilt, dass $F = (x,u,p)$ genau dann monoton in u ist, wenn für alle $\varphi, \psi \in C^2$ mit nichtnegativem Maximum (bzw. nichtpositivem Minimum) x_0 gilt, dass $F(x_0, \psi(x_0), D\psi(x_0)) \le F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0))$.

Wir wählen $\mu = 2\varepsilon$ und erhalten

$$\frac{1}{\varepsilon}\Psi(z_\varepsilon) \leq 2(M_{2\varepsilon} - M_\varepsilon + g(\varepsilon))$$

Die rechte Seite geht für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen Null, mit dem Sandwich-Satz folgt das gewünschte Resultat. Für die weiteren Aussagen nehmen wir an, dass $z_\varepsilon \to z_0 \in \Omega$ entlang einer Folge von ε's, die gegen Null gehen. Dann gilt wegen der Halbstetigkeit von Ψ

$$0 = \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \Psi(z_\varepsilon) \geq \Psi(z_0) \geq 0$$

und damit $z_0 \in \mathcal{N}$. Ausserdem gilt wegen der oberen Halbstetigkeit von w

$$w(z_0) \geq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(w(z_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\Psi(z_\varepsilon)\right) = M_0 \geq \sup_{z\in\mathcal{N}} w(z).$$

Damit sind alle Aussagen des Lemmas gezeigt. □

Kehren wir zum Vergleichsprinzip und zur bereits hergeleiteten Ungleichung

$$F(x_0, u(x_0), D_x\varphi(x_0, y_0)) - F(y_0, v(y_0), -D_y\varphi(x_0, y_0)) \leq 0 \tag{15}$$

für u Sublösung, v Superlösung von $F = 0$ und der glatten Testfunktion $\varphi(x, y)$ mit (x_0, y_0) als Maximum von $u - v - \varphi$ zurück. Wir wollen nun ein konkretes φ betrachten und definieren

$$\Phi(x, y) := u(x) - v(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2 \quad \text{für kleines } \varepsilon > 0; x, y \in \overline{\Omega} \tag{16}$$

Die Testfunktion $\varphi(x, y) = |x-y|^2/(2\varepsilon)$ ist so gewählt, um großen Abstand zwischen x und y zu bestrafen, wenn ε gegen Null geht. Φ ist von oben halbstetig, daher existiert auf $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ ein Maximum $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Mit dem soeben bewiesenen Lemma folgt

$$\frac{1}{\varepsilon}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0 \tag{17}$$

Somit hat jeder Grenzwert die Form (x_0, x_0). Wenn $x_0 \in \delta\Omega$, folgt aus der Randbedingung $u(x_0) \leq g(x_0) \leq v(x_0)$ und dann

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq 0 \tag{18}$$

In diesem Fall sind wir fertig. Im anderen Fall liegt $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ jedenfalls für kleine ε in Ω. Dann folgt die Ungleichung

$$F(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) - F(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \leq 0 \tag{19}$$

Aufgabe ist, zu zeigen, dass daraus für den Fall $F(x, u(x), Du(x)) = |Du|^2 - f(x)$ für stetige, positive f folgt, dass $u \leq v$. Zuerst betrachten wir noch den Fall, dass $F(x, r, p) = r + G(p) - f(x)$ für stetige f. Dann folgt aus der obigen Gleichung, dass

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon) \tag{20}$$

Dann folgt für $\varepsilon \downarrow 0$, dass

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} (u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)) \leq 0 \tag{21}$$

und da $u(x) - v(x) = \Phi(x, x) \leq \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ folgt $u \leq v$ für $\varepsilon \downarrow 0$.

Damit ist das Vergleichsprinzip für diese besondere Form des Problems gezeigt. Jede Sublösung eines solchen Problems ist nicht größer als die Superlösung. Die obige Herleitung gilt jedoch auch für die Lösungen der Eikonalgleichungen, wie man rasch einsieht, wenn man in dieser $v = -e^{-u}$ substituiert.

4 Conclusio

In diesem Kapitel wurde das Problem der Eikonalgleichung als partielle Differentialgleichung mathematisch verallgemeinert und präzise formuliert. Mit der Viskositätslösung, welche die Lösung mithilfe von entsprechend differenzierbaren Testfunktionen annähert, jedoch nicht mehr die Differenzierbarkeit der eigentlich Lösung fordert, wurde ein neuer, passender Lösungsbegriff definiert, mit dessen Hilfe erste Lösungen für spezielle Formen der Eikonalgleichung gefunden wurden. Wichtige Eigenschaften wie insbesondere das Vergleichsprinzip wurden formuliert und bewiesen. Mit Hilfe des in diesem Teil hergeleiteten soll im nächsten Teil des Kapitels zur Analysis der Eikonalgleichung die Existenz von Lösungen auch des allgemeinen Falls hergeleitet werden.

Literatur

[1] Michael Crandall. „User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations". In: Hrsg. von Pierre-Louis Lions Hitoshi Ishii Michael Crandall. American Mathematical Society, 1992. Kap. Viscosity Solutions: a Primer, S. 1–67.

[2] Lawrence Evans. *Partial Differential Equations.* Hrsg. von James Humphreys. American Mathematical Society, 2000.