Lineare Operatorgleichungen, Teil 3

Stefan Rosenberger

April 20, 2010

1 Wiederholungen

Eine lineare Operatorgleichung hat die Gestalt:
$Ax = y$ mit $x \in X,\ y \in Y, A \in \mathfrak{L}(X, Y)$, wobei X, Y Banachräume sind.

Definition. Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ und $F : D \to Y$. Die Operatorgleichung $F(x) = y$ für $x \in D, y \in Y$ heißt **korrekt** nach Hadamard, wenn gilt:
$i)\forall y \in Y\ \exists! x \in D$ sodass $F(x) = y$. (Existenz und Eindeutigkeit)
$ii)$ Die Lösung x von $F(x) = y$ hängt stetig von y ab. (Stabilitätsbedingung)

Korollar Seien X, Y Banachräume und $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Ist A bijektiv und beschränkt dann existiert $A^{-1} \in \mathfrak{L}(X, Y)$ und A^{-1} ist ebenfalls beschränkt.

2 Lineare Fredholmsche Integralgleichungen

Definition. Seien $k : [c, d] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $(s, t) \mapsto k(s, t)$ wobei $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ und sei $x(t)$ eine stetige Abbildung.
1) Eine **lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art** (LFI1) hat die Form:

$$\int_a^b k(s, t)x(t)dt = y(s) \quad \text{mit } c \le s \le d$$

2) Eine **lineare Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art** (LFI2) hat die Form:

$$x(s) + \int_a^b k(s, t)x(s)dt = y(s) \quad \text{mit } (c \le s \le d)$$

2.1 Beispiel: Farbanalyse

Wir betrachten Reflexionscharakteristiken $x(t)$ (diese entsprechen Materialfunktionen)
Es seinen $y(s)$ Messdaten mit $s \in [c, d] \subset \mathbb{R}$.
Der Zusammenhang dabei ist durch eine LFI1 gegeben, wobei die Kernfunktion k eine Apperatefunktion ist, die der Charakteristik der integralen Messwerte entspricht. Für festes s sollte die Kernfunktion aus den Parametern der jeweiligen Meßsituation ableitbar sein.
Weiters verwenden wir die unendlichdimensionalen Banachräume $X = C[a, b]$

und $Y = L^2(c,d)$. Weiters sei $L^1(a,b)$ der Raum der absolut integrierbaren Funktionen über dem Intervall [a,b].
Mit der Forderung, dass für alle betrachteten s ein endliches Intergral $\int_a^b |k(s,t)|\, dt$ existiert, (Für stetige Apparatefunktionen $k(s,\cdot)$ ist diese Forderung stets erfüllt.) also

$$k(s,\cdot) \in L^1(a,b) \text{ für alle } s \in [c,d] \text{ und } \int_a^b |k(\cdot,t)|\, dt \in L^2(c,d)$$

kann die LFI1 als lineare Operatorgleichung betrachtet werden.

$$A : \begin{cases} C[a,b] \longrightarrow L^2(c,d) \\ [Ax](s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt \quad (c \leq s \leq d) \end{cases}$$

Womit die Gestalt einer linearen Operatorgleichung vorliegt.

Folgerungen: Für die Kernfunktion k aus dem vorangegangenen Beispiel gilt die Ungleichung

$$\|Ax\|^2_{L^2(c,d)} \leq \int_c^d (\int_a^b |k(s,t)|\, |x(t)|\, dt)^2 ds \leq [\int_c^d (\int_a^b |k(s,t)|\, dt)^2 ds] \|x\|^2_{C[a,b]}$$

und $\int_c^d (\int_a^b |k(s,t)|\, dt)^2 ds$ ist eine endliche Größe, womit der Operator A ein beschränkter Operator ist.
Für die Operatormorm von A gilt wegen der obrigen Gleichung die Abschätzung

$$\|A\|_{\mathfrak{L}(C[a,b],L^2(c,d))} \leq \sqrt{\int_c^d (\int_a^b |k(s,t)|\, dt)^2 ds}$$

Wir betrachten solche Kernfunktionen k, bei denen der Operator A injektiv wirkt und somit die Eindeutigkeitsbedingung der "korrektheits" Definition genügt. Unter dieser Voraussetzung werden wir hier zeigen, daß die LFI1 niemals die Stabilitätsbedingung erfüllen kann und folglich inkorrekt nach Hadamard ist.

2.2 Lemma

Es sei $k(s,t)$ auf dem Rechteck $[c,d] \times [a,b]$ definiert sodass die Bedingungen
$k(s,\cdot) \in L^1(a,b)\ \forall s \in [c,d]$ und $\int_a^b |k(\cdot,t|\, dt \in L^2(c,d)$
erfüllt sind, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b k(s,t) sin(nt) dt = 0 \quad \forall s \in [c,d]$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d (\int_a^b k(s,t) sin(nt) dt)^2 ds = 0$$

ohne Beweis. Die erste Grenzwertbeziehung findet man in der Literatur unter der Bezeichung Riemann-Lebesque-Lemma.
Die zweite Grenzwertbeziehung resultiert aus der ersten wenn man das Majorantenkriterium von Lebesque anwendet.

Folgerungen: Betrachtet man nun eine Folge stetiger Funktionen $x_n(t) = x_0(t) + sin(nt)$ $(a \leq t \leq b; n = 1, 2, \dots)$ sowie die davon erzeugte Folge $y_n = Ax_n$ $(n = 1, 2, \dots), y_0 = Ax_0$, mit

$$A : \begin{cases} C[a,b] \longrightarrow L^2(c,d) \\ [Ax](s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt \quad (c \leq s \leq d) \end{cases}$$

Dann folgt
$i) \|x_n - x_0\|_{C[a,b]} = 1$ falls $n \geq \frac{\pi}{b-a}$ aber
$ii) \|y_n - y_0\|_{L^2(c,d)} = \sqrt{\int_c^d (\int_a^b k(s,t)sin(nt)dt)^2 ds} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$

Wenn man nun die beiden Folgen etwas genauer betrachtet so kann man erkennen dass die Oszillationen der x_0 überlagernden sinusförmigen Störung (mit variabler Frequenz n und fester Amplitude 1) werden durch Anwendung des Operators A dermaßen geglättet, dass die Wirkung der Störung in der rechten Seite der LFI1 gemmesen in der L^2-Norm für genügend große Frequenzen n beliebig klein wird.
Somit ist der Operator $A^{-1} : R(A) \subset L^2(c,d) \to C[a,b]$ unbeschränkt und damit unstetig. Diese Eigenschaft führt uns zur Definition der vollstetigkeit, vorher jedoch einige Bezeichungen:

Definition. Sei X ein Banachraum, $T \subset X$ und I eine unendliche Indexmenge, dann heißt
i) T **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists c > 0 \; \forall x \in T : \|x\|_X < c$
ii) T **relativ kompakt** $:\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in I} \subset T \; \exists J \subset I$ mit $|J| = \infty$ sodass $(x_m)_{m \in J}$ konvergiert.
iii) T **kompakt** falls T relativ kompakt und abgeschlossen ist.

3 Vollstetigkeit und Inkorrektheit von LFI1

Definition. Seien X, Y Banachräume, $A \in \mathfrak{L}(X,Y)$. A heißt **vollstetig**, falls für jede beschränkte Teilmenge $T \subset X$ die Bildmenge
$A(T) = \{y \in Y | \exists x \in T \; Ax = y\} \subset Y$ relativ kompakt ist.

3.1 Satz

Seien X, Y unendlichdimensionale Banachräume und $A \in \mathfrak{L}(X,Y)$ injektiv und vollstetig. Dann folgt $R(A) \neq \overline{R(A)}$ (also A ist nicht abgeschlossen).

Beweis: Ann.: $R(A) = \overline{R(A)}$
$\Rightarrow A^{-1} : R(A) \subset Y \to X$ ist beschränkt
$\Rightarrow \forall x \in X : \; \|x\|_X \leq K\|Ax\|_Y$ mit $K > 0$
Aber in jedem unendlichdimensionalen Banachraum existiert eine beschränkte Teilmenge T, die nicht relativ kompakt ist. (denn im ∞-dim. ist die Einheitskugel nie kompakt!)
$\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ sodass (x_n) keine konvergente Teilfolge besitzt.
Nach VS ist $A(T) = \{y \in Y | \exists x \in T \; Ax = y\}$ relativ kompakt.
$\Rightarrow (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A(T)$ besitzt eine konvergente Teilfolge
Sei $(Ax_m)_{m \in J}$ mit $J \subset \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge von $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \forall m, k \in J \ \|x_m - x_k\| < K\|Ax_m - Ax_k\|$ mit $K > 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge,
und da X ein Banachraum ist, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. WSP!!

3.2 Korollar

Seien X, Y unendlichdimensionale Banachräume und $A \in \mathfrak{L}(X,Y)$ injektiv und vollstetig, sodass $Ax = y$ gilt. Dann ist die Stabilitätsbedingung der "korrektheits" Definition verletzt und die lineare Operatorglichung inkorrekt nach Hadamard.

Beweis: Aus dem vorangegangenen Satz folgt, da $R(A)$ nicht abgeschlossen ist, dass A^{-1} unbeschränkt ist, womit kein $K > 0$ existiert sodass $\|A^{-1}y\|_X \leq K\|y\|_Y$ gilt. Womit A^{-1} nicht stetig sein kann.

3.3 Lemma

Sei $k \in C([c,d] \times [a,b])$ und A als LFI1 in der Form

$$A : \begin{cases} C[a,b] \longrightarrow L^2(c,d) \\ [Ax](s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt \quad (c \leq s \leq d) \end{cases}$$

gegeben. Dann ist A ein vollstetiger Operator. Ebenso ist der Operator A mit quadratisch integierbarem Kern $k \in L^2((c,d) \times (a,b))$ im Raumpaar $X = L^2(a,b)$ und $Y = L^2(c,d)$ vollstetig.

ohne Beweis!

Bemerkung: Aus diesem Lemma folgt, dass lineare Fredholmesche Integralgleichungen erster Art in Paaren X und Y stetiger Funktionen sowie in Paaren X und Y quadratisch integrierbarer Funktionen inkorrekt nach Hadamard sind. Sie erfordern dementsprechende Maßnahmen, um eine stabile näherungsweise Lösung dieser Gleichung zu sichern. Im Gegensatz dazu sind lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art

$$x(s) + \int_a^b k(s,t)x(s)dt = y(s) \quad \text{mit } (c \leq s \leq d)$$

als Operatorgleichungen der Form $x + Ax = y$ mit $x \in X, y \in Y, A \in \mathfrak{L}(X,Y)$ vollstetig mit $\|A\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} < 1$ in diesen Räumen stets korrekt nach Hadamard.