1 Orientierungstest

Ziel dieses »Orientierungstestes« ist es, dass du über deine bisherigen Erfahrungen bzgl. Mathematik sowie deinen bisherigen Kenntnissen klar wirst. Das hat zwei Gründe:

- Du kannst dann im Lauf des Kurses sowie des ersten Semesters besser einschätzen, was du bisher erlebt hast, was du dadurch wahrscheinlich erwartest und wo du evtl. noch Nachholbedarf hast. Erst dadurch können etwaige Lücken oder Fehlvorstellungen behandelt werden.
- Um das Niveau des Brückenkurses sowie das zu erwartende Vorwissen realistisch einschätzen zu können, sind diesbezüglich Informationen für den Kursleiter notwendig.

Es ist von daher auch für dich selbst wichtig, dass du diesen »Test« alleine (und ohne Hilfsmittel) bearbeitest. Schau also bitte für diesen Orientierungstest nicht in deinen Schulbüchern oder -heften nach.[1] Ein »schlechtes« Abschneiden bei diesem »Test« hat keine negative Auswirkung auf eine Beurteilung. Falls Themengebiete in der Schule nicht ausreichend behandelt wurde, gib das jeweils an (»Diese Aufgabe kann ich mit meinen Schulwissen nicht lösen.« usw.).

Studienwahl:	☐ Bachelor	☐ LAK
Schule: ☐ HAK ☐ BAKIP ☐ HTL ☐ Gymnasium	☐ Realgymnasium	
Ich habe in Mathematik maturiert:	☐ schriftl.	☐ mündl.
Durchschnittliche Note in Mathematik in der Oberstufe (einkreisen)	1 2 3 4 5	
Wurden diese Themengebiete in der Schule ausreichend behandelt?	Ja	Nein
(Aussagen-)Logik	☐	☐
Rechnen mit Zahlen/Variablen	☐	☐
Komplexe Zahlen	☐	☐
Vektoren (z. B. Skalares Produkt)	☐	☐
Gleichungssysteme	☐	☐
Ungleichungen (z. B. mit Beträgen)	☐	☐
Funktionen	☐	☐
Grenzwerte/Stetigkeit	☐	☐
Differentialrechnung (z. B. Kettenregel)	☐	☐
Integralrechnung (z. B. Substitution)	☐	☐
Folgen (z. B. Monotonie)	☐	☐
Reihen (z. B. Konvergenz)	☐	☐

1.1 Allgemeine Fragen

i) Wie hast du dich über dein Studium informiert?

ii) Warum hast du dich für dieses Studium entschieden? (Schlagwörter wie »Interesse« bitte näher ausführen.[2])

iii) Was verstehst du unter »Mathematik«? Was macht Mathematik für dich aus?

iv) Beschreibe deinen bisherigen Mathematikunterricht, sodass sich ein Außenstehender ein realistisches Bild davon machen kann.

v) Welche Rolle nahmen Beweise oder Herleitungen im Schulunterricht ein? Wie relevant sind Beweise deiner Meinung nach?

vi) Wie hast du in der Schule Mathematik gelernt? (Hausübungen, Schularbeiten, . . .)

1 Im restlichen Verlauf des Kurses ist das dagegen selbstverständlich erlaubt bzw. erwünscht.
2 Was genau interessiert dich daran? Usw.

1.2 Verständnis- und Überblicksfragen

Ziel ist es, zu überprüfen, in wie weit jeweils ein Verständnis der jeweiligen Begriffe vorhanden ist.

Bsp. 1.1: reelle Zahlen

Was sind die reellen Zahlen? Was ist der entscheidende Unterschied zu den rationalen Zahlen? Für welche Zahlen a, b, c gilt die Gleichung

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \ ?$$

Bsp. 1.2: Funktion

Erkläre den Begriff »Funktion« so genau (und so allgemein wie möglich). Gib zudem zumindest ein konkretes Beispiel und begründe, warum es ein Beispiel für eine Funktion ist.

Bsp. 1.3: Differenzierbarkeit

Wann ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 des Definitionsbereichs differenzierbar? Erkläre die dabei vorkommenden Begriffe zumindest kurz. Gib eine möglichst unmissverständliche Erklärung für die geometrische Bedeutung von $f'(x_0)$.

Bsp. 1.4: Zahlen-Folge

Was ist eine (Zahlen-)Folge? Was bedeutet der Begriff »Grenzwert« in diesem Zusammenhang?

Bsp. 1.5: Reihen

Welche Bedeutung hat der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \ ?$$

Bsp. 1.6: Vektoren

Erkläre den Begriff »Vektor« und »Vektorraum«. Was unterscheidet Vektoren von reellen Zahlen?

Bsp. 1.7: Integrale

Was bedeuten die Symbole $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? (Nur den Namen des jeweiligen Objektes zu nennen ist keine ausreichende Bedeutungsklärung).

1.3 Konkrete (Rechen-)Aufgaben

Begründe nach Möglichkeit jeweils dein Vorgehen.

Bsp. 1.8: Termvereinfachung

Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{(x^2-8)\cdot(-\frac{1}{3})^2}{3^{-1/2}} : \frac{\sqrt{27}\cdot(x^2-2\sqrt{32}+16)}{x-2\sqrt{2}} = \dots$$

Bsp. 1.9: Polynomgleichung

Bestimme, falls möglich, alle Lösungen der Gleichung:

$$x^3-2x^2-5x+6=0\,.$$

Bsp. 1.10: Gleichungssystem

Löse das folgende lineare Gleichungssystem (falls möglich):

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 & \quad (I) \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 & \quad (II) \end{array}$$

Bsp. 1.11: Funktion skizzieren

Skizziere die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & \text{für } x>3\\ \frac{1}{x-3} & \text{für } x<3\,.\end{cases}$$

Bsp. 1.12: Ableitung

Bestimme, falls möglich, die erste Ableitung der Funktion $f:]4,\infty[\to\mathbb{R}$ mit:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{(x-4)^3}}\,.$$

Hinweis: mit $]4,\infty[\subset\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen echt größer als 4 gemeint.

Bsp. 1.13: Integral

Berechne

$$\int_3^4 \frac{1}{x}+3x^2+e^{4x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bsp. 1.14: Folge

Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{2n^2+2}{3n^2-n-1}\,.$$

2 Übungsblatt

Bsp. 2.1: Mengenoperationen

Seien $M := \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ und $N := \{2, 3, 5, 8, 10\}$ gegeben. Bestimme $N \cup M$, $N \cap M$, $N \setminus M$ sowie $M \setminus N$.

Bsp. 2.2

Seien die (reellen) Intervalle I_1, I_2, I_3, I_4 gegeben. Bestimme $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$, $I_3 \cap I_4$ und $I_3 \cap I_4$ sowie $I_1 \setminus I_4$.

$$I_1 := (-\infty, 3) \qquad I_2 := (3, +\infty) \qquad I_3 := (-\infty, 3] \qquad I_4 := [2, 3)$$

Gib auch geeignete Skizzen der Mengen auf der reellen Zahlengeraden an.

Bsp. 2.3

Seien die Intervalle I_1, I_2, I_3 gegeben. Bestimme die Mengen $I_1 \times I_2, I_2 \times I_3, I_1 \times \mathbb{R}$.

$$I_1 := (0, \infty) \qquad I_2 := (3, 4] \qquad I_3 := [-2, 4]$$

Gib auch geeignete Skizzen in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ (also in einem x-y-Koordinatensystem) an.

Bsp. 2.4

Sei nun p die Aussage: »Es regnet« und q die Aussage »Die Sonne scheint«. Formalisiere folgende Aussagen (d. h. gib sie in mathematischer Kurzschreibweise an):

a) »Es regnet und die Sonne scheint«
b) »Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht«
c) »Es regnet oder es scheint die Sonne«
d) »Entweder regnet es, oder es scheint die Sonne.«

Bsp. 2.5

Erstelle eine Wahrheitstafel mit den Aussagen p, q für die Aussage $\neg(p \wedge q)$ und $\neg(p \vee q)$ sowie für $\neg p \wedge \neg q$ und $\neg p \vee \neg q$. Was fällt dir auf?

Bsp. 2.6

Bestimme eine Wahrheitstafel für die Aussage $\neg(p \Rightarrow q)$ und vergleiche mit $\neg p \vee q$. Gib eine verbale Erklärung deiner Erkenntnis.

3 Übungsblatt

Optionale Aufgaben zählen nicht zu den 100 % der Übungsbeispiele, werden aber natürlich als gemacht bei deiner Prozentzahl eingerechnet. Bsp 3.9. ist (aus Papiergründen) nur digital verfügbar.

Bsp. 3.1
Zeige, dass die Summe einer geraden Zahlen und einer ungeraden Zahl ungerade ist.

Bsp. 3.2
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann gilt:

$$x^2 < x \quad \Rightarrow \quad x < 1 \,.$$

Tipp: Verwende das Beweisprinzip der Kontraposition (d. h. drücke $p \Rightarrow q$ gleichwertig durch $\neg q \Rightarrow \neg p$ aus) und beweise dann diese Aussage.

Bsp. 3.3: Rechenregeln für Vereinigung und Durchschnitt
Seinen A, B, C Mengen. Es sei $M_1 := (A \cup B) \cap C$ sowie $M_2 = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Zeige, dass dann gilt:

$$M_1 = M_2 \,.$$

Versuche auch eine geometrische Interpretation mit sogenannten Venn-Diagrammen (siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Mengendiagramm`).

Tipps und Strategien zum obigen Beispiel:

- Beginne wie üblich, die Definitionen der jeweiligen Mengen Schritt für Schritt aufzuschreiben. Versuche, die Mengen M_1 und M_2 jeweils durch Eigenschaften $P(x)$ und $Q(x)$ zu charakterisieren, d. h.
$$M_1 = \{x \mid P(x)\} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \{x \mid Q(x)\} \,.$$
- Man überlege sich, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ ist.
- Versuche nun, die logische Äquivalenz von $P(x)$ und $Q(x)$ zu zeigen. (Beispielsweise per Wahrheitstafel).

Bsp. 3.4: Quantoren
Die Menge der natürlichen Zahlen beginnen bei 1, d. h. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$. Bestimme den Wahrheitsgehalt der Aussagen. Beweis oder Gegenbeweis/Gegenbeispiel.

i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : m$ ist gerade $\wedge\ m > n$

ii) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n < m$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ : n > m \Rightarrow n^2 > m^2$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ : x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

v) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ : x \neq y \Rightarrow x^2 < y^2$

Bsp. 3.5: abstrakte Verknüpfung

Sei $M := \{a, b\}$. Wir betrachten folgende Verknüpfung $\diamondsuit$ auf M. Wir legen fest:

$$a\diamondsuit a := a \qquad a\diamondsuit b := b \qquad b\diamondsuit b := a \qquad b\diamondsuit a := b$$

Stelle eine Verknüpfungstabelle auf.

a) Berechne für folgende Ausdrücke das Verknüpfungsergebnis und begründe dabei jeden Schritt:
$$(a\diamondsuit a)\diamondsuit b = ?$$
$$(a\diamondsuit b)\diamondsuit a = ?$$
b) Ist die Gleichung
$$a\diamondsuit(a\diamondsuit b) = (b\diamondsuit a)\diamondsuit a$$
eine wahre Aussage?
c) Untersuche die Verknüpfung $\diamondsuit$ auf Kommutativität.
d) Welche besondere Rolle nimmt das Element a ein und warum?
e) Was ist das inverse Element bzgl. $\diamondsuit$ zum Element b?

Bsp. 3.6: Binomische Formel

Zeige die Gültigkeit der binomischen Formel

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Du darfst dabei verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Ein Hinweis: Es ist zunächst nicht offensichtlich, dass z. B. $a + a = 2a$ ist. Das ist mit der Gleichung $a = 1 \cdot a$, der Rechenregel $1 + 1 = 2$ sowie den Rechengesetzen (z. B. Distributiv-Gesetz) erst zu zeigen. Notiere insbesondere bei jedem Schritt, welche Rechenregel im Körper du verwendet hast.

Bsp. 3.7: Rechnen mit komplexen Zahlen

Es seien $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -1 - 4i, z_3 = 8i$ gegeben. Berechne

$$z_1 + z_2, \quad z_1 \cdot z_3, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

Gilt die Ungleichung
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad ?$$
(Siehe Skriptum)

Bsp. 3.8: Rechnen mit Wurzeln (optional)

Berechne:

$$2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = ?$$
$$\sqrt{\sqrt{a^{2/3}}} = ?$$
$$\sqrt{36a^4b^4} : \sqrt{4a^2} = ?$$
$$\frac{\sqrt[6]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[8]{y^6 \cdot \sqrt[9]{y^2}}} = ?$$

Besonders für Bachelor-Studierende für die Lineare Algebra zu empfehlen:

Bsp. 3.9: Matrizen (optional)

Die Menge der (reellen) quadratischen 2×2-Matrizen ist gegeben durch:

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mid x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispielsweise wäre etwa die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Element von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Seien A und B zwei Matrizen mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} .$$

Wir definieren dann das Matrizen-Produkt AB (»A mal B«) durch

$$AB := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeige, dass die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Rolle des neutralen Elements übernimmt, also dass

$$AI = IA = A$$

ist für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Berechne dann CD sowie DC mit

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ist die Matrizenmultiplikation kommutativ? Ist die Matrizenmultiplikation kommutativ, wenn wir nur Matrizen der Form

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} .$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ zulassen?

c) Wir definieren die sogenannte Nullmatrix $\mathbf{0}$ als die Matrix, die nur Nullen enthält:

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass dann der sogenannte Produkt-Null-Satz für Matrizen nicht gilt, also dass für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Implikation

$$AB = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0}$$

nicht erfüllt ist.

4 Übungsblatt

Bsp. 4.1: Verknüpfung von Funktionen

Wir betrachten die Menge $M = \{a, b\}$ mit der Verknüpfung Verknüpfung $\diamondsuit$ aus Bsp 3.5.

Sei V die Menge, die alle wohldefinierten Funktionen von M nach M enthält. Wie viele Elemente (also Funktionen von M nach M) enthält die Menge V?

Seien nun $f : M \to M$ gegeben durch $f(a) := a$ und $f(b) := b$ sowie $g : M \to M$ mit $g(a) = b$ und $g(b) = b$.

Bestimme dann die Funktion $f \triangle g : M \to M$ mit

$$(f \triangle g)(x) := f(x) \diamondsuit g(x)$$

Bestimme dann die Funktion $f \circ g$ sowie $g \circ f$, wobei das Zeichen $\circ$ nun die Hintereinanderausführung von Funktionen bezeichnet.

Bsp. 4.2: Parabeln

Skizziere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x+2)^2 + 4$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x^2 + 2x - 4$. Bestimme jeweils die Koordinaten des Scheitels der Parabel.

Bsp. 4.3: Logarithmus und Exponential-Funktion

Skizziere die Funktion $\ln(x-1)$ sowie $e^{(x^2)}$, wo die Funktionen definiert sind.

Bsp. 4.4: Funktionenfolge

Wir betrachten für $n \in N_{>0}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1} \cdot x$$

Skizziere qualitativ einige Funktionen f_n. Was passiert, wenn n immer größer wird?

Bsp. 4.5

Skizziere die Funktionen $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2$$

Was ist der größtmögliche, sinnvolle reelle Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$?

Skizziere die Funktion $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Was ist der größtmögliche, sinnvolle reelle Definitionsbereich $\mathcal{D}_g$?

Bsp. 4.6: Funktionsgraph

Es sei $\mathcal{D} := \{-1, 0, 1\}$ und $Y = \mathbb{R}$. Es seien nun $f : \mathcal{D} \to Y$ und $g : \mathcal{D} \to Y$ gegeben durch

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^3 .$$

Bestimme nun den Graph von f sowie den Graph von g. Vergleiche die beiden Funktionen.

Bsp. 4.7: Definitionsbereich

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 4$ gegeben und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$. Bestimme jeweils die Funktionen $g \circ f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ sowie $f \circ g : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$. Was ist jeweils der größte, sinnvolle reelle Definitionsbereich $\mathcal{D}_1$ bzw. $\mathcal{D}_2$?

5 Übungsblatt

Bsp. 5.1: (besonders für Bachelor-Studierende zu empfehlen)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(a+ib) = a - ib$ für $z = a+ib \in \mathbb{C}$. Zeige oder widerlege (also Gegenbeispiel angeben):

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad & f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad & f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \end{aligned}$$

Welche Rechenregeln ergeben sich dann mit der Schreibweise $f(z) = \overline{z}$?

Bsp. 5.2: Funktion

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ wird die Menge $U_{ab} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + ax + b = 0\}$ definiert. Wir betrachten die Zuordnung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto (\min(U_{ab}), \max(U_{ab})) \,. \end{cases}$$

Es ist also

$$f(a, b) = (\min(U_{ab}), \max(U_{ab})) \,.$$

Zur Notation: Ist M eine Menge, so bezeichnet $\min(M)$ das kleinste Element dieser Menge, das heißt $\forall m \in M : \min(M) \le m$. Ist M eine Menge, so bezeichnet $\max(M)$ das größte Element dieser Menge, das heißt $\forall m \in M : \max(M) \ge m$.

- **i)** Zeige, dass f keine Funktion ist.
- **ii)** Bestimme $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ möglichst groß und so, dass $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
- **iii)** Gibt es (a, b) und (c, d), wobei $a = c \wedge b = d$ nicht gilt, aber trotzdem $f(a, b) = f(c, d)$ ist?
- **iv)** Ist $f(D) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Wenn nein, bestimme $f(D)$.

Tipp: Skizziere den Definitionsbereich in einem a-b-Koordinatenystem und skizziere die Werte $f(a, b)$ in einem zweiten.

Bsp. 5.3: Komplexe Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

$$z_1 = 8 - 7i \qquad z_2 = -3 - i$$

Berechne

$$z_1 + z_2 \qquad z_1 - z_2 \qquad \frac{z_1}{z_2}$$

Skizziere z_1, z_2 sowie $z_1 + z_2$ in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimme jeweils die Winkel φ

Bsp. 5.4

Löse die Ungleichung

$$\frac{x+2}{x-2} \ge 4$$

Bsp. 5.5
Löse die Ungleichung
$$x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0$$

Bsp. 5.6
Löse die Ungleichung
$$|2 - 4x| \geq 3$$
mittels Fallunterscheidung und gib auch geometrische Interpretation (mit dem Abstand).

6 Übungsblatt

Wie auch im Vorlesungsteil liefert die Anschauung (d. h. Skizzen) die Ideen für Grenzwerte, Beschränktheit und Monotonie. Weitere Aspekte, nach denen man sich richten kann, lernt man im Lauf des ersten Semesters kennen.

Bei den Abschätzungen verwendet man folgende »Tricks«: Ein Bruch wird umso größer, je kleiner der Nenner ist und je größer der Zähler ist, beispielsweise (für $x, y > 0$)

$$\frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n} \quad \text{sowie} \quad \frac{n}{y} \leq \frac{n+1}{y} \quad \text{oder auch} \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \; .$$

Durch geschicktes Weglassen oder Addieren kann sich also ein kompliziert aussehender Bruch zu einem einfacheren Bruch nach oben abschätzen lassen.

Bsp. 6.1

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := n^2 - 4$ gegeben. Berechne die ersten 4 Folgenglieder der Folge. Untersuche die Folge auf Monotonie (Beweis oder Gegenbeweis).

Skizziere die Folge in einem n-a_n-Koordinatensystem sowie auf der reellen Zahlengeraden. Ist die Folge beschränkt? Ist die Folge nach oben oder nach unten beschränkt?

Bsp. 6.2: Rekursive Folge

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. $a_0 := 1$ und $a_1 := 1$. Für $n \geq 2$ definieren wir

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \; .$$

Gib eine verbale Beschreibung des Bildungsgesetzes. Berechne die ersten 5 Folgenglieder. Ist die Folge monoton oder beschränkt? (Anschauliche Argumentation reicht jeweils.)

Bsp. 6.3

Es sei die Folge

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

gegeben. Untersuche die Folge auf Beschränktheit und Monotonie. Welchen Grenzwert hat die Folge?

Bsp. 6.4: Grenzwert

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

gegeben. Erstelle eine Skizze der Folge in einem n-a_n-Koordinatensystem und auch auf der Reellen Zahlengerade. Ist die Folge beschränkt? (Beweis oder Gegenbeweis). Ist die Folge monoton? (Beweis oder Gegenbeweis).

Hat die Folge einen Grenzwert? Wenn ja, dann zeige per Definition des Grenzwertes, dass die Folge wirklich den (vermuteten) Grenzwert besitzt.

Bsp. 6.5

Zeige, dass die Folge

$$a_n := \frac{2n^3 - 1}{n^3 + n} \qquad \text{für } n \geq 1 \ ,$$

den Grenzwert 2 hat, indem du die ϵ-N-Definition verwendest. Gehe dabei in der Suchphase so vor, dass du wie im Vorlesungsteil den Ausdruck $|a_n - L|$ Schritt für Schritt vereinfachst. Beispielsweise können auch Ersetzungen wie 1 durch n oder n durch n^2 (oder umgekehrt) helfen, einen möglichst einfachen Ausdruck zu bekommen. Ziel ist es, die Potenzen im Nenner so weit wie möglich zu kürzen.

(Die Rechenregeln für konvergente Folgen haben wir noch nicht zur Verfügung, diese bitte daher nicht verwenden. Dieses Bsp. dient auch zum Üben von Abschätzungen.

Löse folgende linearen Gleichungssysteme. Folgende Fälle sind dabei möglich: keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen (vgl. Skript).

Die Lösungen am Montag in der LV werden mithilfe des sogenannten Gauß-Algorithmus präsentiert, da man dabei viel weniger schreiben muss. Daher bitte die entsprechenden Kapitel im Skriptum durcharbeiten, um Verständnisprobleme am Montag zu minimieren.

Bsp. 6.6

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 10 & \quad (I) \\ -x & + & y & = & 2 & \quad (II) \end{array}$$

Bsp. 6.7

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcll} 3x & + & 5y & = & -1 & \quad (I) \\ 2x & - & y & = & 2 & \quad (II) \\ 4x & - & 2y & = & 0 & \quad (III) \end{array}$$

Bsp. 6.8

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & y & + & 2z & = & 1 & \quad (I) \\ & & 2y & + & z & = & 2 & \quad (II) \\ -x & + & 2y & + & z & = & -1 & \quad (III) \end{array}$$

Bsp. 6.9

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 3y & + & z & = & 10 & \quad (I) \\ x & - & y & + & 2z & = & 7 & \quad (II) \end{array}$$

7 Übungsblatt

Die erste Aufgabe soll wieder (so wie Bsp 5.2) das abstrakte Denken schulen und die Problemlösungsfähigkeit trainieren.

Bsp. 7.1: Partition

Eine Menge $\mathcal{R}$ nichtleerer Teilmengen einer gegebenen Menge M heißt »Partition von M«, wenn es zu jedem $x \in M$ genau eine Menge $R \in \mathcal{R}$ gibt, sodass $x \in R$.

i) Schritt 1: formalisieren

Versuche, die Aussage »$\mathcal{R}$ ist Partition von M« mit Hilfe von Quantoren zu formalisieren.

ii) Schritt 2: (anschaulich verstehen)

Da die Definition sehr abstrakt ist, versuchen wir uns nun selbst Beispiele bzw. Gegenbeispiele zu konstruieren. Dazu wählen wir uns beispielsweise die Menge $M := \{a, b, c\}$. Wir versuchen nun, herauszufinden, wie so eine Menge $\mathcal{R}$ aussehen kann (bzw. muss). Achtung: Die Elemente von $\mathcal{R}$ sind selbst Mengen.

Welche der folgenden Mengen $\mathcal{R}_i$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind Partitionen von M?

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &:= \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}\} \\
\mathcal{R}_2 &:= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \\
\mathcal{R}_3 &:= \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\} \quad \text{(das } d \text{ ist kein Tippfehler)} \\
\mathcal{R}_4 &:= \{\{a, b, c\}\} \\
\mathcal{R}_5 &:= \{\{a, c\}, \{b\}\} \,.
\end{aligned}$$

iii) Schritt 3: Verständnis anwenden

Es sei nun $M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (Achtung, die 0 ist dabei!). Wir definieren für $j \in \{0, 1, 2\}$ die Menge

$$R_j := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k + j\}$$

und weiters $\mathcal{R} := \{R_0, R_1, R_2\}$.

Ist $\mathcal{R}$ eine Partition von $\mathbb{N}$? Begründe deine Antwort ausführlich.

Bsp. 7.2: Cosinus-Funktion

Wir erinnern uns an den Einheitskreis. Skizziere mit Hilfe des Einheitskreises den Graph von cos. Die Funktionswerte an den x-Stellen 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π sowie $\frac{5\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ sollen dabei genau gezeichnet werden.

Der Rest des Aufgabenblattes beschäftigt sich mit Inhalten, die auf Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen vorbereiten sollen. Es stellt sich nämlich heraus, dass die anschaulich so einfach zu fassende »Bleistift-Stetigkeit« (Eine Funktion ist, stetig, wenn man ihren Graphen ohne absetzen des Bleistiftes zeichnen kann) mathematisch vergleichsweise schwierig zu beschreiben ist. Ähnliches mussten wir ja auch bei den Grenzwerten von Folgen feststellen.

Wir werden am Dienstag, 24.9. daher als Vorbereitung auf den Grenzwert-Begriff **zuerst** mit diesen Übungsaufgaben starten uns danach die (exaktere) Theorie erarbeiten. Bitte die Zettel also nach Möglichkeit **bereits um 13:15 abgeben**, damit ich mir einen Überblick über die Lösungen bzw. Fehler verschaffen kann.

Bsp. 7.3: affine Funktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2x + 1$ gegeben.

i) Skizziere den Graphen von f so genau, dass die ganzzahligen Koordinaten tatsächlich ganzzahlig sind (z. B. mittels kariertem Papier).

ii) Wir fixieren nun eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und geben uns ein (nicht näher bekanntes) $\delta > 0$ vor. Finde ein passendes $\epsilon_1 > 0$, sodass

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \epsilon_1$$

ist. Wie hängt das ϵ_1 von δ ab? Analoges für

$$f(x_0 - \delta) = f(x_0) - \epsilon_2 \, .$$

Skizziere die oben beschriebenen Sachverhalte und markiere jeweils die Stellen x_0, $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ sowie $f(x_0)$, $f(x_0 + \delta)$ und $f(x_0 - \delta)$ auf den passenden Achsen.

iii) Wir setzen $x_0 = 1$ und $I = (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1) \subset \mathbb{R}$.

Finde ein passendes $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \in I$. Tipp: Orientiere dich dabei an der Skizze. Eine anschauliche Argumentation reicht dabei.

Bsp. 7.4: quadratische Funktion

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$ gegeben.

i) Skizziere den Graphen von f wieder so genau, dass die Stellen $x = -1, 0, 1, 2$ exakt gezeichnet sind.

ii) Wir fixieren die Stelle $x_0 = 1$ und geben das Intervall $I = (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1) \subset \mathbb{R}$ vor.

Finde ein passendes $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \in I$. Tipp: Orientiere dich dabei wieder an der Skizze. Eine anschauliche Argumentation reicht dabei.

Bsp. 7.5

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1, 1]$ gegeben durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \, .$$

i) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n} \, .$$

Welchen Grenzwert hat diese Folge (Beweis nicht notwendig)? Wir basteln uns nun mit Hilfe dieser Folge und der Funktion f eine neue Folge, nämlich $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, also

$$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5), \ldots) \, .$$

Wir nehmen also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (im Definitionsbereich) und setzen diese in die Funktion f ein und erhalten damit eine neue Folge (im Wertevorrat). Berechne das n-te Folgenglied $f(a_n)$. Welchen Grenzwert hat die Folge $f(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

ii) Wir betrachten die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \, .$$

(Falls das Bildungsgesetz auf den ersten Blick schwierig erscheint, berechne konkret die ersten paar Folgenglieder.) Welchen Grenzwert hat diese Folge (Beweis wieder nicht notwendig)? Wir definieren dann die Folge $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, also

$$(f(b_1), f(b_2), f(b_3), \ldots) \, .$$

Berechne wieder das n-te Folgenglied $f(b_n)$. Welchen Grenzwert hat die Folge $f(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

iii) Skizziere (so gut wie möglich) den Graph von f, zeichne die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der x-Achse ein, sowie die Punkte $(a_n, f(a_n))$ sowie $(b_n, f(b_n)$ am Graphen.

Name: Matrikelnummer:

8 Übungsblatt

Bsp. 8.1: Asymptoten und Grenzwerte

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

gegeben. Skizziere die Funktion f mitsamt ihren Asymptoten. (Tipp: Polynomdivision mit Rest). Bestimme die Ausdrücke

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) \qquad \lim_{x\to-1} f(x)$$

falls möglich (anschauliche Argumentation reicht).

Bsp. 8.2: Grenzwert?

Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Grenzwert besitzt:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x-1)^2} .$$

Fertige auch eine Skizze an (Tipp: Vorher kürzen).

Bsp. 8.3: Grenzwert?

Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4 - 3 \cdot |x - 2|}{x - 2}$$

einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ hat. Skizze! (Tipp: Fallunterscheidung machen, um den Betrag aufzulösen.)

Bsp. 8.4: Gauß-Klammer

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$$

gegeben (also wieder die Gauß-Klammer). Skizziere den Graphen. (Tipp: Skizziere zuerst $\lfloor x \rfloor$.)

i) Bestimme alle Stellen, für die die einseitigen Grenzwerte existieren. Die Menge dieser Stellen nennen wir M_1.

ii) Bestimme alle Stellen, wo der Grenzwert existiert. Die Menge dieser Stellen nennen wir M_2.

iii) Bestimme alle Stellen, an denen die Funktion stetig ist. Die Menge dieser Stellen nennen wir M_3.

Eine anschauliche Argumentation reicht jeweils.

Ordne die Mengen M_1, M_2 und M_3 mit Hilfe des $\subset$-Symbols und begründe das Ergebnis.

Bsp. 8.5: ϵ-δ

Zeige, dass jede konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, indem du die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit verwendest. Du musst also zeigen, dass f an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(Eine Funktion heißt konstant, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt $f(x) = c$.)

Wie kann/muss δ in Abhängigkeit von ϵ gewählt werden?

Bsp. 8.6: noch mehr ϵ-δ

Zeige mit Hilfe der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x - 1$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig ist. Fertige auch eine Skizze an.

9 Übungsblatt

Bsp. 9.1

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Möglicherweise kann folgende Formel für $n \in \mathbb{N}$ helfen:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k \, .$$

Zur Summenschreibweise mit dem Symbol $\sum$ siehe Kapitel 16.1 im Skript.

Bsp. 9.2

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x_0 \in (0, \infty)$ differenzierbar ist. Was passiert bei $x_0 = 0$? (Skizze)

Tipp: Binomische Formel, um den Zähler so zu verändern, dass er nicht mehr gegen Null geht, wenn x gegen x_0 geht.

Bsp. 9.3

Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^3 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ Ist die Funktion an $x_0 \in \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar? Ist die Funktion stetig? Skizziere f, f' sowie f'' (falls/wo möglich).

Hinweis: Die Stelle $x_0 = 0$ braucht eine eigene Untersuchung, weil die Funktionsvorschrift an dieser Stelle gestückelt ist. Die üblichen Rechenregeln für das Differenzieren dürfen nur für Stellen x_0 angewandt werden, wenn es um x_0 ein offenes Intervall $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $\delta > 0$ gibt, auf dem die Funktionsvorschrift gleich ist. Wenn es kein so ein Intervall gibt, so muss über die Definition (Differentialquotient) gerechnet werden. Vgl. mit dem $|x|$ aus dem VO-Teil.

Bsp. 9.4

Finde eine Formel für die n-te Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Bestimme also $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x), \ldots f^{(n)}(x)$.

Hinweis: Berechne die ersten paar Ableitungen und versuche, eine Gesetzmäßigkeit zu finden. Evtl. kann die sogenannte n-Faktorielle, also $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ helfen.

Bsp. 9.5

Finde eine (allgemeine) Formel für die Ableitung von $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und $h(x) = \ln(f(x))$, wobei $f(x) > 0$ eine differenzierbare Funktion ist.

Bsp. 9.6

Finde jeweils eine Stammfunktion zu

$$f(x) = 4x^5 - 3x - 1 + \frac{2}{x} - 3e^x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{x-2}{x^2 - 2x} \qquad \text{sowie} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x} \, .$$

Rechne zur Kontrolle die Probe, indem du die Stammfunktion ableitest.
Tipp: Verwende für g und h Bsp 9.5.

10 Abschlusstest

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bitte auf jedes beschriebene Blatt den Namen und die Matrikelnummer schreiben. (Bei »echten« Prüfungen sind die Definitionen der Begriffe natürlich nicht angegeben.)

Bsp. 10.1: Folge

Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n := \frac{n+1}{n} \,.$$

Skizze!

Zur Erinnerung: Eine Folge heißt monoton steigend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ ist; monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. Eine Folge heißt beschränkt, wenn es ein $M > 0$ gibt, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$.

Bsp. 10.2: Differenzierbarkeit nachweisen

Zeige über die Definition der Ableitung, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist.

$$f(x) = \frac{1}{x} \,.$$

Überprüfe deine Rechnung (Skizze oder übliche Rechenregeln zum Differenzieren). Zur Erinnerung: Eine Funktion f heißt differenzierbar in $x_0 \in D$ genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

existieren.

Bsp. 10.3: Funktionen skizzieren

Skizziere (qualitativ) die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \lfloor 2x \rfloor \qquad \text{sowie} \qquad g(x) = x + 3 + \frac{1}{x+2}$$

inkl. der jeweiligen Asymptoten (falls vorhanden). (Eine Wertetabelle ist nicht notwendig.) Zur Erinnerung:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\} \,.$$

Hinweis: Eine Asymptote muss nicht immer waagrecht oder senkrecht sein. Jede Kurve bzw. Gerade, an die sich der Graph beliebig nahe annähernd, ohne sie zu erreichen, wird als Asymptote bezeichnet.

Bsp. 10.4: math. Problemlösen

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir führen einen neuen Begriff ein:

f heißt »befreundet« mit g (Kurzschreibweise $f \sim g$) $:\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \geq c : f(x) = g(x)$.

i) Was bedeutet es für die Graphen von f und g, wenn $f \sim g$ ist? Skizze!

ii) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen an, die nicht befreundet sind. (Graphen reichen)

iii) Finde eine Funktion g (Funktionsvorschrift angeben) mit $f \sim g$, wobei $f(x) = |x - 1|$. Begründe deine Lösung.

Feedbackbogen

Zutreffendes bitte ankreuzen! Wenn bei den offenen Fragen (Seite 2) zu wenig Platz ist, dann bitte auf der Hinterseite weiterschreiben (und die Frage-Nr) angeben. Legende:

1	2	3	4	5
trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft teilweise zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu

Vorlesungsteil

Folgende Inhalte wurden im Vorlesungsteil ausreichend behandelt:	1	2	3	4	5
Mengenlehre	☐	☐	☐	☐	☐
Logik und mathematische Aussagen ($\wedge, \vee, \ldots$)	☐	☐	☐	☐	☐
Rechnen mit Zahlen/Variablen	☐	☐	☐	☐	☐
Komplexe Zahlen	☐	☐	☐	☐	☐
abstrakte Mathematik und Beweise	☐	☐	☐	☐	☐
Ungleichungen (inkl. Betrag)	☐	☐	☐	☐	☐
Gleichungssysteme	☐	☐	☐	☐	☐
Funktionen (Definitionen, Beispiele, inkl. Skizzieren, ...)	☐	☐	☐	☐	☐
Grenzwerte/Stetigkeit von Funktionen (ϵ-δ-Definition, etc.)	☐	☐	☐	☐	☐
Differentialrechnung (z. B. Differenzierbarkeit und Rechenregeln)	☐	☐	☐	☐	☐
Integralrechnung	☐	☐	☐	☐	☐
Folgen (z. B. Monotonie, Grenzwerte)	☐	☐	☐	☐	☐

	1	2	3	4	5
Der Stoff in den 1,5 h war vom Umfang her fassbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Stoff war vom Schwierigkeitsgrad her fassbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Mehr Beweise wären schön gewesen.	☐	☐	☐	☐	☐
Mehr vorgerechnete Beispiele wären schön gewesen.	☐	☐	☐	☐	☐

Übungsblätter und Beispiele

	1	2	3	4	5
Die Übungsbeispiele waren interessant.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Übungsbeispiele waren vom Schwierigkeitsgrad schaffbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Übungsbeispiele waren vom Umfang her schaffbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Durch die Übungsbeispiele habe ich viel dazugelernt.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Aufgabenstellungen waren anders als in der Schule.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Aufgabenstellungen waren verständlich.	☐	☐	☐	☐	☐

Subjektive Einschätzungen

	1	2	3	4	5
Das Konzept des Kurses (Aufteilung in VO-Teil und Übungsteil inkl. Beispielabgaben) war sinnvoll.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs war mathematisch eine echte Bereicherung.	☐	☐	☐	☐	☐
Ich bin durch den Kurs neugierig auf die Hochschulmathematik.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs hat insgesamt meinem Leistungsniveau entsprochen.	☐	☐	☐	☐	☐
Das Niveau war um Einiges höher als in der Schule.	☐	☐	☐	☐	☐
Ich habe gemerkt, dass ich aus der Schule Defizite habe.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs war wirklich notwendig für mich.	☐	☐	☐	☐	☐
Ich fühle mich durch den Brückenkurs auf das Studium gut vorbereitet.	☐	☐	☐	☐	☐

A) Wurdest du durch die Übungsbeispiele/Inhalte ab und zu auch frustriert/überfordert? Wenn ja, durch welche (Themengebiete/Aufgabenstellungen) besonders?

B) Hat sich die Mathematik im Brückenkurs von deiner Schulmathematik unterschieden? Wenn ja, wie?

C) Hat sich deine Vorstellung von (universitärer) Mathematik durch den Brückenkurs geändert oder verdeutlicht? Wenn ja, wie und wodurch? Wenn nein: Wie sah deine Vorstellung aus?

Resümee:

	1	2	3	4	5
Insgesamt gebe ich dem Lehrenden die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐
Insgesamt gebe ich dem Brückenkurs die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐
Insgesamt gebe ich meinem eigenen Engagement die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐

X) Das hat mir besonders gut gefallen:

Y) Das hat mir weniger gut gefallen (inkl. Verbesserungsvorschläge):

Z) Das möchte ich noch loswerden:

11 Übungsblatt

Bsp. 11.1: Konvergenz bzw. Divergenz?

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots=?$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3^j}=?$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^{k+1}}=?$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=?$$

Berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Tipp zur zweiten und zur dritten: Versuche auf die Form $\sum q^n$ umzuformen. Tipp zur letzten: betrachte die N-te Partialsumme. Darfst du dann etwas herausheben?

Dass das Berechnen von Grenzwerten von Reihen im Allgemeinen trickreich ist, zeigt folgendes Beispiel:

Bsp. 11.2: Tüftel-Beispiel: Grenzwert berechnen

Berechne den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{a_k}.$$

Tipps zum Vorgehen:

i) Wir versuchen zunächst, den Summanden a_k zu vereinfachen, indem wir versuchen, den Malpunkt im Nenner zu vermeiden. Das geht durch folgenden Ansatz (»Partialbruchzerlegung«): Gibt es passende $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}\ ?$$

Tipp: auf gemeinsamen Nenner bringen und den Zähler der linken Seite mit dem Zähler der rechten Seite vergleichen. Man erhält ein Polynom mit der Unbekannten k und vergleicht dabei die Koeffizienten von k^1 und k^0. (Falls nicht bekannt: $k^0 = 1$.)

ii) Es stellt sich letztlich heraus, dass wir a_k schreiben können als $a_k = b_k - b_{k+1}$. Berechne nun S_2, S_3 und S_4. Was bleibt letztlich übrig? Versuche eine allgemeine, möglichst einfache Formel für S_n in Abhängigkeit der b_j zu finden.

iii) Berechne nun

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=\ldots$$