Das Newtonpotential

Bachelor-Arbeit

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen

Universität Graz

Name:	Jakob Wiesmeyr
Matrikelnummer:	0811532
Studium:	Bachelor Mathematik
Studienjahrgang:	2008
betreuender Professor:	ao. Univ. Prof. Dr. Gunther Peichl

1 Einleitung

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $n \in \mathbb{N}$. Zur Erinnerung: ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist eine offene, wegweise zusammenhängende Menge. Das Ziel wird sein das Randwertproblem für die inhomogene Poissongleichung:

$$-\Delta u = f \text{ und } u = g \text{ auf } \partial(G), \tag{1.1}$$

wobei $g \in C^0(\partial(G))$ gegeben ist, zu lösen.
Diese Differentialgleichung gehört zu der Klasse der elliptischen Differentialgleichungen und besitzt ihre Anwendungen in vielen Teilgebieten der Physik. In dieser Arbeit wird der rein mathematische Aspekt bezüglich der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung unter gewissen Voraussetzungen beleuchtet. Es stellt sich hier die Frage, für welche rechten Seiten f sich das Randwertproblem lösen lässt.
Wir werden in der Vorbereitung eine Grundlage für die fundamental wichtigen Sätze im Hauptteil schaffen. Mit diesen werden wir dann, unter der Berücksichtigung gewisser Zusatzvoraussetzungen an f als auch G, einen Eindeutigkeits und Existenzssatz formulieren können.

2 Vorbereitung

Im Folgenden bezeichne $\langle .,. \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $\|.\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Die Definition von Δu ist gegeben durch:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Weiters wollen wir hier an die Definition von Lesbeque- integrierbaren Funktionen erinnern.

Definition 2.1. [8] Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt (Lesbeque-) intergrierbar über $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ gibt. Wir schreiben dann: $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \in \mathbb{R}$. Wenn $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, heißt f über G integrierbar, wenn die Funktion $f_G\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Wir schreiben dann: $\int_G f = \int_{\mathbb{R}^n} f_G$.

Bemerkung 2.2. [8] $\|f\|_1 = \inf \{I(\psi) \mid \psi \text{ ist Hüllreihe von f}\} \in [0,\infty]$ ist die L_1 Halbnorm. Die Funktionenreihe $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ ist Hüllreihe von f mit Q_k offener Quader des $\mathbb{R}^n$ und $c_k \geq 0$, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(x)| \leq \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)$. Dabei bezeichnet 1_{Q_k} die charakteristische Funktion auf der Menge Q_k und $I(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v\,(Q_k)$ den Inhalt der Hüllreihe, wobei $v\,(Q_k)$ der Inhalt des Quaders ist.

Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang ist die Integrierbarkeit von stetigen und beschränkten Funktionen.

Satz 2.3. *[8] Es sei $\emptyset \neq G$ offen und beschränkt, $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt auf G. Dann ist f integrierbar über G.*

Ein aus der Analysis bekanntes Resultat über die Integrierbarkeit von Grenzfunktionen bei monotoner Konvergenz ist der folgende Satz.

Satz 2.4. *[6] (Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz)*
Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^n$. Die punktweise gebildete Grenzfunktion $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ ist genau dann integrierbar, wenn die Folge der Integrale $\int_G f_k(y)dy$ beschränkt ist. Damit gilt dann insbesondere

$$\int_G f(y)dy = \lim_{k\to\infty} \int_G f_k(y)dy.$$

Nun wollen wir erklären, was ein Flächenstück und ein Oberflächenintegral ist.

Definition 2.5. [1] Eine Menge $H \subset \mathbb{R}^n$ heißt reguläres Hyperflächenstück der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N}$, wenn sich die Menge in der Form $H = x(T)$ darstellen lässt mit $x_j = x_j(t)$ für $j \in \{1, ..., n\}$. Dabei ist $t = (t_1, ..., t_{n-1}) \in T \subset \mathbb{R}^{n-1}$, wobei T ein beschränktes Gebiet ist. Weiters ist $x \in C^0\left(\overline{T}, \mathbb{R}^n\right) \cap C^k(T, \mathbb{R}^n)$ und $x\colon \overline{T} \to \mathbb{R}^n$ injektiv mit $Rang(J(x)) = n - 1$ ($J(x)$ bezeichnet die Jacobimatrix von x).
Mit D_j für $j = 1, ..., n$ bezeichnen wir die folgende Funktion:

$$D_j = (-1)^{n+j} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{j-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_{j-1}}{\partial t_{n-1}} \\ \frac{\partial x_{j+1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_{j+1}}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Die Vektoren $s = \pm(s_1, ..., s_n)$ mit

$$s_j = \frac{D_j}{\sqrt{D_1^2 + ... + D_n^2}}$$

für $j = 1, ..., n$, heißen die zu H im Punkt $x = x(t)$ gehörenden Normalen.
Für $f \in C^0(H)$ ist das Oberflächenintegral von f über H gegeben durch:

$$\int_H f(x)do(x) = \int_T f(x(t))\sqrt{D_1^2(t) + ... + D_n^2(t)}dt,$$

wenn $\int_T f(x(t))\sqrt{D_1^2(t) + ... + D_n^2(t)}dt < \infty$ gilt.

Ein reguläres Hyperflächenstück hat keine Selbstdurchschneidungen, da die Abbildung x injektiv ist. Wenn wir für das oben definierte Oberflächenintegral den Fall $n = 2$ und $k = 1$ betrachten, erhalten wir ein Kurvenintegral.
Nun kommen wir zur Definition von Normalgebieten.

Definition 2.6. [1] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. G heißt Normalgebiet, wenn Folgendes gilt:

(i) Zu jedem Randpunkt $x' \in \partial G$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ mit $x_n \to x'$ für $n \to \infty$.

(ii) $\partial G = \overline{H_1} \cup ... \cup \overline{H_N}$ mit regulären Hyperflächen H_j, $j = 1, ..., N$ der Klasse C^1 und es gilt $\overline{H_i} \cap \overline{H_j} = \partial H_i \cap \partial H_j$ für $i \neq j$ und es existiert das Oberflächenintegral $\int_{H_j} 1do$ für alle j.

(iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Kugeln $\overline{B_{\rho_r}(x^{(r)})} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\|x - x^{(r)}\right\| \leq \rho_r\right\}$ mit $x^{(r)} \in \partial H_1 \cup ... \cup \partial H_N$, $\rho_r > 0$, für $r = 1, ..., q = q(\varepsilon)$, so dass $\bigcup_{j=1}^N \partial H_j \subset \bigcup_{r=1}^q \overline{B_{\delta_r}(x^{(r)})}$ und $\sum_{r=1}^q \rho_r^{n-1} \leq \varepsilon$

Für ein Normalgebiet definieren wir das Oberflächenintegral:
$\int_{\partial G} f do = \sum_{j=1}^{N} \int_{H_j} f do.$

Um die Definition von einem Normalgebiet verständlich zu machen, betrachten wir drei einfache Beispiele.

(1) Die punktierte Kugel $G = B_r(0) \setminus \{0\}$ mit $r > 0$ ist kein Normalgebiet, da die Bedingung (i) verletzt ist: Der Rand von G ist gegeben durch $\partial G = \partial B_r(0) \cup \{0\}$. Damit ist $\overline{G} = \overline{B_r(0)}$. Es ist $0 \in \partial G$ und es gibt keine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist G kein Normalgebiet.

(2) Die Kugel $G = B_r(0)$ mit $r > 0$ ist ein Normalgebiet.

(3) Der n-dimensionale Würfel mit Kantenlänge $r > 0$,
$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| < r\}$ ist ein Normalgebiet.

Jetzt können wir den Gaußschen Integralsatz für Normalgebiete formulieren. Dieser ermöglicht uns, das Volumenintegral über eine Divergenz, $divf = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$ als Oberflächenintegral zu schreiben. Der Gaußsche Integralsatz stellt eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung dar. Er liefert uns eine Formel für die partielle Integration in höheren Raumdimensionen.

Satz 2.7. *[1] (Gaußscher Integralsatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet mit äußerer Normale s. Weiters sei $u \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^1(G)$ mit $\int_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \infty$.Dann gilt:

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial G} u(x)s_i(x)do(x).$$

Sei nun $f = (f_1, ..., f_n) \in C^0\left(\overline{G}, \mathbb{R}^n\right) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $\int_G |divf(x)|\, dx < \infty$. Dann gilt:

$$\int_G divf(x)dx = \int_{\partial G} \langle f(x), s(x)\rangle\, do(x).$$

Wir werden im Hauptteil häufig die Transformation eines Integrals in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ benötigen. Dazu formulieren wir die Transformationsformel in Polarkoordinaten von n-dimensionalen Integralen. Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit dem Transformationssatz für Lesbeque-Integrale.

Satz 2.8. *[1] Es sei $R > 0$, $B_R(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_0\| < R\}$ und $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$ die n-dimensionale Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$. Falls die folgenden Integrale existieren, dann gilt mit $r = \|y - x_0\|$ und $\xi = \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$:*

$$\int_{B_R(x_0)} f(y)dy = \int_0^R \left(\int_{S^{n-1}} f(x_0 + r\xi)do(\xi)\right) r^{n-1}dr,$$
$$\int_{\partial B_R(x_0)} f(y)dy = R^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(x_0 + R\xi)do(\xi).$$

Wir wollen nun eine für uns wichtige Folgerung dieses Satzes formulieren und beweisen.

Folgerung 2.9. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $R > 0$. Dann gilt für $\tau \in (-n, \infty)$, dass das Integral $\int_{B_R(x_0)} \|y - x_0\|^\tau \, dy$ existiert und die Darstellung:

$$\int_{B_R(x_0)} \|y - x_0\|^\tau \, dy = \omega_n \frac{1}{\tau + n} R^{\tau+n}$$

hat. Dabei ist $\omega_n = |S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} 1 do(\xi)$ der Flächeninhalt der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir werden mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz 2.4 und des Transformationssatzes die Existenz als auch die obige Darstellung nachweisen.
Sei $f(y) = \|y - x_0\|^\tau$ und $B_R(x_0)$ mit $R > 0$ eine Kreisscheibe um x_0 im $\mathbb{R}^n$. Die Funktion f ist in $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ stetig und hat eine Singularität in x_0. Wir betrachten nun die Funktion

$$f_\varepsilon(y) = \begin{cases} f(y) & y \in B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)} \\ 0 & y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}. \end{cases}$$

Die Funktion $f(y)$ ist beschränkt und stetig in $B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, also auch integrierbar. Da folgende Identität:

$$\int_{B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}} f(y) dy = \int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy$$

gilt, erhalten wir die Integrierbarkeit von f_ε auf $B_R(x_0)$. Weiters ist $f_\varepsilon \geq 0$ und die Folge (f_ε) in $B_R(x_0)$ monoton wachsend. Um den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass die Folge der Integrale $\int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy$ beschränkt ist. Wir können, da die Integrale $\int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy$ existieren, den Satz 2.8 verwenden. Für die Transformation gilt mit $r = \|y - x_0\|$, $\xi = \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$, dass $f(x_0 + r\xi) = f(y) = r^\tau$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy &= \int_\varepsilon^R \left(\int_{S^{n-1}} r^\tau do(\xi) \right) r^{n-1} dr \\ &= \int_\varepsilon^R \underbrace{\left(\int_{S^{n-1}} 1 do(\xi) \right)}_{= \omega_n} r^{\tau+n-1} dr \\ &= \omega_n \int_\varepsilon^R r^{\tau+n-1} dr = \frac{\omega_n}{\tau + n} \left(R^{n+\tau} - \varepsilon^{n+\tau} \right). \end{aligned}$$

Da $\tau + n > 0$, existiert der $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy$. Daraus erhalten wir insbesonders die Beschränktheit der Folge. Somit erhalten wir mit dem Satz von der monotonen Konvergenz 2.4 :

$$\int_{B_R(x_0)} f(y) dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x_0)} f_\varepsilon(y) dy = \frac{\omega_n}{n + \tau} R^{\tau+n},$$

was zu zeigen war. $\square$

Nun kommen wir zu einem wichtigen Satz, der es uns unter gewissen Bedingungen erlaubt, den Limes und die partiellen Ableitungen zu vertauschen.

Satz 2.10. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(G)$ eine Funktionenfolge. Es gelte weiters, dass $(f_n) \to f$ punktweise konvergiert für $n \to \infty$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_n) \to g_i$ gleichmäßig konvergiert für $n \to \infty$ und $i \in \{1, ..., n\}$. Dann ist $f \in C^1(G)$ und es gilt $\frac{\partial}{\partial x_i} f = g_i \in C^0(G)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.*

Bemerkung 2.11. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf G. Wenn (f_n) (lokal) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist f stetig auf G.

Wir können uns nun Folgendes überlegen, um ein noch stärkeres Resultat dieses Satzes zu bekommen. Angenommen wir wissen wie im Satz 2.10, dass $(f_n) \to f$ punktweise konvergiert, aber nur, dass $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_n) \to g_i$ lokal gleichmäßig konvergiert. Das heißt, es gibt zu jedem $x \in G$ ein $R > 0$, sodass $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_n) \to g_i$ auf $B_R(x)$ gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 2.10 erhalten wir, dass auf der offenen Kugel $B_R(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f = g_i$ gilt. Wenn G wegweise zusammenhängend ist, dann gilt $\frac{\partial}{\partial x_i} f = g_i$ auf G. Aus dieser Überlegung heraus können wir eine Folgerung von Satz 2.10 formulieren.

Folgerung 2.12. Wird im Satz 2.10 für G zusätzlich gefordert, dass die Menge wegweise zusammenhängend ist, kann gleichmäßig konvergent durch lokal gleichmäßig konvergent ersetzt werden und die Aussage bleibt richtig.

Da wir vor allem mit parameterabhängigen Integralen arbeiten werden, formulieren wir zwei wichtige Sätze.

Satz 2.13. *[6] (Stetigkeitssatz)*
Es sei X ein metrischer Raum, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f : X \times T \to \mathbb{R}$ und es gilt:

(i) Für jedes $x \in X$ sei f über T integrierbar.

(ii) Für jedes $t \in T$ sei $x \to f(x,t)$ stetig.

(iii) Es gibt eine auf T integrierbare Funktion Θ mit $|f(x,t)| \leq \Theta(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$

Dann ist die durch Integration erhaltene Funktion $F(x) := \int_T f(x,t)dt$ stetig auf X.

Der Beweis des Stetigkeitssatzes erfolgt mit Hilfe des Satzes der majorisierenden Konvergenz (Satz von Lesbeque).

Satz 2.14. *[6](Differentiationssatz)*
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f : X \times T \to \mathbb{R}$ und es gilt:

(i) Für jedes $x \in X$ sei f über T integrierbar.

(ii) Für jedes $t \in T$ ist $x \to f(x,t)$ stetig differenzierbar.

(iii) Es gibt eine auf T integrierbare Funktion Θ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\right| \leq \Theta(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$ und $j \in \{1,..,n\}$.

Dann ist die durch Integration erhaltene Funktion $F(x) := \int_T f(x,t)dt$ stetig differenzierbar auf X.
Weiters gilt für jedes $x \in X$, dass die Funktion $t \to \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,t)$ integrierbar ist und

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt.$$

Den Differentiationssatz beweist man mit Hilfe des Schrankensatzes der Differentialrechnung, dem Satz von Lesbeque und dem zuvor formulierten Stetigkeitssatz.

Im Folgenden wollen wir noch definieren, wodurch harmonische Funktionen ausgezeichnet sind, und die Singularitätsfunktion als harmonische Funktion untersuchen.

Definition 2.15. Eine Funktion heißt auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ harmonisch, wenn $u \in C^2(G)$ und $\Delta u = 0$ ist.

Lemma 2.16. *[1] In $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ löst die Singularitätsfunktion:*
$s_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(\|x\|), & \text{wenn } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\|x\|^{2-n} & \text{sonst.} \end{cases}$ *die Potentialgleichung $\Delta s_n = 0$.*
Das heißt s_n ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Im Folgenden verwenden wir die Singularitätsfunktion in zwei Variablen:
$$s_n(y,x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(\|x-y\|), & \text{wenn } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\|x-y\|^{2-n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 2.17. [1] Eine Funktion $\Phi(y,x) = s_n(y,x) + \varphi(y,x)$ heißt Grundlösung von $\Delta h = 0$ zum Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, falls für feste $x \in G$ die Funktion $\varphi(.,x) \in C^1\left(\overline{G}\right)$ und $\varphi(.,x)$ in G harmonisch ist.

Dabei bezeichnet $C^k\left(\overline{G}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$ den Raum der k mal stetigen Funktionen, welche sich inklusive aller Ableitungen auf den Rand stetig fortsetzen lassen. Zur Erinnerung: eine Funktion h ist in x_0 stetig fortsetzbar genau dann, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ existiert. Nun sind wir in der Lage, den Satz über die Darstellungsformel von glatten Funktionen in Normalgebieten zu formulieren.

Satz 2.18. *[1](Darstellungsformel)*
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und sei $u \in C^2\left(\overline{G}\right)$. Dann gilt für $x \in G$ die Darstellungsformel:

$$u(x) = \int_{\partial G} \left(\Phi(y,x) \frac{\partial u}{\partial s}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(y,x) do(y) \right) - \int_G \Phi(y,x) \Delta u(y) dy,$$

wobei Φ eine beliebige Grundlösung zu $\Delta h = 0$ zu G ist. $s(y)$ bezeichnet den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂G im Punkt $y \in \partial G$.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit einer Lösung von (1.1) benötigen wir das schwache Maximumsprinzip.

Satz 2.19. *[1] (Schwaches Maximumsprinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Falls $F \in C^0\left(\overline{G}\right)$ in G harmonisch ist, gilt

$$\min_{\overline{G}} F = \min_{\partial G} F \textit{ und } \max_{\overline{G}} F = \max_{\partial G} F.$$

Des weiteren brauchen wir noch den Begriff der superharmonischen Funktionen und des regulären Randpunktes.

Definition 2.20. [1] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \colon G \to \mathbb{R}$ heißt superharmonisch in G, wenn $u \in C^0(G)$ ist und es zu jedem $x_0 \in G$ einen Radius $R > 0$ gibt, so dass für alle $\rho \in [0, R]$ gilt $u(x_0) \geq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(x) do(x)$.

Definition 2.21. [1] Ein Randpunkt $x_0 \in \partial G$ heißt regulär, wenn es eine in G superharmonische Funktion $\phi(y, x_0)$ gibt, sodass: $\lim\limits_{y \to x_0} \phi(y, x_0) = 0$ und $\inf_{y \in G \setminus \overline{B_\varepsilon}(x_0)} \phi(y, x_0) > 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist. Eine solche Funktion bezeichnet man auch als Schrankenfunktion zum Randpunkt x_0.

Jetzt können wir einen Eindeutigkeits- und Existenzsatz für die homogene Poissongleichung angeben. Dieser und weitere Sätze ermöglichen es uns, im Hauptteil die inhomogene Poissongleichung (1.1) unter gewissen Voraussetzungen zu lösen.

Satz 2.22. *[1] Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das nur reguläre Randpunkte besitzt, und es sei $g \in C^0(\partial G)$.*
Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^2(G)$ des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \textit{ in } G \textit{ und } u = g \textit{ auf } \partial G.$$

3 Hauptteil

Im Hauptteil wird folgende Vorgehensweise gewählt: Zuerst definieren und analysieren wir das Newtonpotential und zeigen danach, dass unter bestimmten Voraussetzungen dieses Potential eine Lösung der inhomogenen Poissongleichung (1.1) darstellt.

Definition 3.1. Es sei f auf $G \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar.
Dann heißt

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_G \ln(\|x-y\|) f(y) dy, & \text{wenn } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_G \|x-y\|^{2-n} f(y) dy & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1}$$

für $x \in G$ das Newtonpotential von f.

Wir wollen nun die Eigenschaften des Newtonpotentials so wie der partiellen Ableitungen unter gewissen Voraussetzungen untersuchen. Dafür formulieren wir folgenden Satz.

Satz 3.2. *Sei $f \in C^0(G)$ und $\sup_G |f(y)| < \infty$. Dann ist das Newtonpotential $w \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^1(G)$ und die partiellen Ableitungen sind gegeben durch:*

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_G \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} f(y) dy \tag{3.2}$$

für $x \in G$ und $i \in \{1, ..., n\}$.

Wir werden den Beweis dieses Satzes für $n \geq 3$ führen, für $n < 3$ ist der Beweis ähnlich.

Beweis. Vorerst zeigen wir, dass die Integrale in (3.1) und (3.2) existieren. Dafür genügt es zu zeigen, dass sie beschränkt sind. Dazu betrachten wir das Integral über $G \backslash \overline{B_r(x)}$ mit $r > 0$. Dann gilt im Falle von (3.1) für $x \in \overline{G}$, dass $\|x-y\|^{2-n} f(y)$ stetig und beschränkt auf der offenen und beschränkten Menge $G \setminus \overline{B_r(x)}$ und somit integrierbar ist (nach Satz 2.3). Wenn wir nun zeigen können, dass das Integral $\frac{1}{\omega_n(n-2)} \int_{G \backslash \overline{B_r(x)}} \|x-y\|^{2-n} f(y) dy$ beschränkt ist mit einer Konstanten C unabhängig von r, erhalten wir für $r \to 0$ die Existenz des gewünschten Integrals. Bei dieser Argumentation verwenden wir den Satz der monotonen Konvergenz 2.4, wobei wir die monoton wachsende Funktionenfolge $f_r(y) := \left(\|x-y\|^{2-n} f(y)\right) \big|_{G \backslash \overline{B_r(x)}}$ betrachten.
Es sei $d(G) = \sup_{x_1, x_2 \in G} \|x_1 - x_2\|$ der Durchmesser von G. Es gilt $d(G) < \infty$, da G beschränkt ist. Sei $x \in \overline{G}$ beliebig aber fest, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_n(n-2)} \int_{G \backslash \overline{B_r(x)}} \|x-y\|^{2-n} f(y) dy \right| &\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sup_G |f(y)| \int_{G \backslash \overline{B_r(x)}} \|x-y\|^{2-n} dy \\ &\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sup_G |f(y)| \int_{B_{d(G)}(x)} \|x-y\|^{2-n} dy. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt, da $G \subset B_{d(G)}(x)$ (dies gilt auch wenn $x \in \partial G$) und wir aus der Folgerung 2.9 aus dem Transformationssatz wissen, dass dieses Integral existiert. Weiters erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_n(n-2)}\int_{G\setminus\overline{B_r(x)}}\|x-y\|^{2-n} f(y)dy\right| &\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)}\sup_G|f(y)|\frac{\omega_n}{2}d(G)^2\\ &= \frac{d(G)^2}{2(n-2)}\sup_G|f(y)|.\end{aligned}$$

Damit ist die Existenz des Integrals in (3.1) (für n ≥ 3) gezeigt. Weiters zeigen wir, dass das Integral in (3.2) für $x \in G$ existiert. Dabei verwenden wir das gleiche Argument wie für die Existenz von (3.1):

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{G\setminus\overline{B_r(x)}}\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}f(y)dy\right| &\leq \frac{1}{\omega_n}\sup_G|f|\int_{B_{d(G)}(x)}\frac{|x_i-y_i|}{\|x-y\|^n}dy\\ &\leq \frac{1}{\omega_n}\sup_G|f|\int_{B_{d(G)}(x)}\|x-y\|^{1-n}dy.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus $G \subset B_{d(G)}(x)$ und $|x_i - y_i| \leq \|x-y\|$. Wiederum verwenden wir die Folgerung 2.9 und bekommen damit:

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{G\setminus\overline{B_r(x)}}\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}f(y)dy\right| \leq d(G)\sup_G|f|.$$

Wir müssen noch zeigen, dass $w \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^1(G)$ und die partiellen Ableitungen von $w(x)$ durch (3.2) gegeben sind.
Dafür verwenden wir eine geeignete Abschneidefunktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften: $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(s) = 1$ für $|s| \geq 2$, $\eta(s) = 0$ für $|s| \leq 1$ und $|\eta'(s)| \leq 2$. Dazwischen ist die Funktion glatt (stetig differenzierbar) verbunden(dies kann mit einer Polynominterpolation dritten Grades erreicht werden). Betrachten wir nun $\eta_\varepsilon(s) := \eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$ mit $\varepsilon > 0$. Wenn wir $s = \|x-y\|$ setzen, erhalten wir folgende stetig differenzierbare Funktion:

$$\eta_\varepsilon(\|x-y\|) = \begin{cases}0 & \text{für } \|x-y\| \leq \varepsilon\\ 1 & \text{für } \|x-y\| \geq 2\varepsilon\end{cases}$$

und $|\eta'_\varepsilon(\|x-y\|)| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ (Abbildung 1).

Damit können wir nun das geglättete Newtonpotential für $x \in \overline{G}$ definieren. Für $\varepsilon > 0$ ist

$$w_\varepsilon(x) := \frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_G \|x-y\|^{2-n}\eta_\varepsilon(\|x-y\|)f(y)dy.$$

Die Existenz dieses Integrals erhalten wir aus der Existenz von w. Damit haben wir die Singularität für $y = x$ entfernt. Es gilt für alle $x \in \overline{G}$:

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\omega_n(n-2)}\sup_G|f(y)|\int_G\|x-y\|^{2-n}|1-\eta_\varepsilon(\|x-y\|)|dy.$$

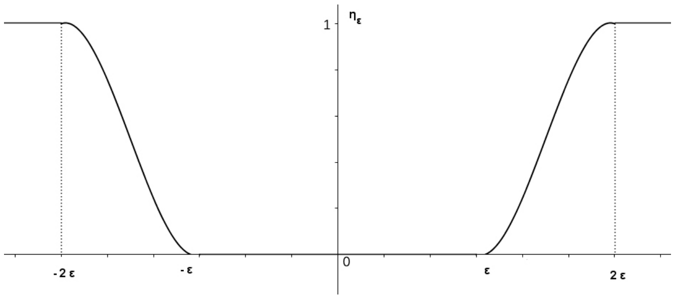

Abbildung 1: Abschneidefunktion η_ε

Für $\|x-y\| \geq 2\varepsilon$ ist $|1-\eta_\varepsilon(\|x-y\|)| = 0$, darum genügt es, das Integral auf $B_{2\varepsilon}(x)$ zu betrachten. Dort gilt $|1-\eta_\varepsilon(\|x-y\|)| \leq 1$. Weiters verwenden wir wiederum die Folgerung 2.9 und erhalten:

$$\begin{aligned}
|w(x) - w_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sup_G |f(y)| \int_{G\cap B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{2-n}\, dy \\
&\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sup_G |f(y)| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{2-n}\, dy \\
&= \frac{2}{(n-2)} \sup_G |f(y)|\, \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir, dass w_ε gleichmäßig auf $\overline{G}$ gegen w konvergiert.
Wir zeigen nun, dass w_ε für feste $\varepsilon > 0$ stetig auf $\overline{G}$ ist. Dazu verwenden wir den Stetigkeitssatz 2.13. Wir betrachten dazu:

$$h_\varepsilon(x,y) := \|x-y\|^{2-n}\, \eta_\varepsilon(\|x-y\|)\, f(y).$$

Die Integrierbarkeit von h_ε über G für feste $x \in \overline{G}$, haben wir uns vorher bereits überlegt. Die Funktion $h_\varepsilon(x,y)$ ist für feste $y \in G$ stetig auf $\overline{G}$, was wir durch die Abschneidefunktion erhalten haben. Weiters gilt für alle $(x,y) \in \overline{G} \times G$:

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(x,y)| &\leq \sup_G |f(y)|\, \|x-y\|^{2-n}\, \eta_\varepsilon(\|x-y\|) \\
&\leq \sup_G |f(y)|\, \varepsilon^{2-n}.
\end{aligned}$$

Wobei die letzte Abschätzung aus der Tatsache folgt, dass $\eta_\varepsilon(\|x-y\|) = 0$ für $\|x-y\| \geq \varepsilon$ und $|\eta_\varepsilon| \leq 1$. Also ist h_ε beschränkt.
Damit erhalten wir mit dem Stetigkeitssatz 2.13, dass w_ε stetig auf $\overline{G}$ ist. Da w_ε gleichmäßig auf $\overline{G}$ gegen w konvergiert, erhalten wir die Stetigkeit von w auf $\overline{G}$. Betrachten wir

nun die partiellen Ableitungen von $w_\varepsilon(x)$. Dazu verwenden wir den Differentiationssatz 2.14. h_ε ist stetig differenzierbar für alle $x \in G$ (durch η_ε erzwungen). Um den Differentiationssatz anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass die partiellen Ableitungen von h_ε beschränkt sind für alle $x \in G$. Die partiellen Ableitungen für $i = 1, ..., n$ sind gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h_\varepsilon(x, y) = -f(y)(n-2)\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\eta_\varepsilon(\|x-y\|) + f(y)\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^{n-1}}\eta'_\varepsilon(\|x-y\|).$$

Nun zeigen wir die Beschränktheit der partiellen Ableitungen.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} h_\varepsilon(x, y)\right| \leq \sup_G |f(y)| (n-2) \left(\frac{\|x-y\|}{\|x-y\|^n}\eta_\varepsilon(\|x-y\|) + \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|^{n-1}} |\eta'_\varepsilon(\|x-y\|)|\right).$$

Für $\|x-y\| \leq \varepsilon$ gilt $\eta_\varepsilon = 0$ und $\eta'_\varepsilon = 0$ und für $\|x-y\| \geq \varepsilon$ gilt $\eta_\varepsilon \leq 1$ und $\eta'_\varepsilon \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Somit erhalten wir die Beschränktheit.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} h_\varepsilon(x, y)\right| \leq \sup_G |f(y)| (n-2) \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{2}{\varepsilon^{n-1}}\right).$$

Das heißt, für festes $\varepsilon > 0$ sind die Voraussetzungen erfüllt. Damit erhalten wir $w_\varepsilon(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_G h_\varepsilon(x, y)dy \in C^1(G)$ und für die partiellen Ableitungen von w_ε gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\omega_n(n-2)}\int_G \frac{\partial}{\partial x_i} h_\varepsilon(x, y)dy \\
&= -\frac{1}{\omega_n}\int_G f(y)\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\eta_\varepsilon(\|x-y\|)dy \\
&+ \frac{1}{\omega_n(n-2)}\int_G \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^{n-1}}\eta'_\varepsilon(\|x-y\|)f(y)dy \\
&= -\frac{1}{\omega_n}\int_G f(y)\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}dy - I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &= \frac{1}{\omega_n}\int_G f(y)\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\left(\eta_\varepsilon(\|x-y\|) - 1\right)dy \\
I_2(\varepsilon) &= \frac{1}{\omega_n(n-2)}\int_G \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^{n-1}}\eta'_\varepsilon(\|x-y\|)f(y)dy.
\end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden zeigen, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0$ für $x \in G$ gilt.
Für $I_1(\varepsilon)$ können wir folgende Abschätzung finden:

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon)| &\leq \frac{1}{\omega_n}\sup_G |f(y)| \int_G \frac{|x_i - y_i|}{\|x-y\|^n}|\eta_\varepsilon(\|x-y\|) - 1|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\omega_n}\sup_G |f(y)| \int_{G\cap B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{1-n}\,dy \\
&\leq \frac{1}{\omega_n}\sup_G |f(y)| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{1-n}\,dy.
\end{aligned}$$

Dies gilt, da $|\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1| = 0$ für $\|x-y\| \geq 2\varepsilon$ und $|\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1| \leq 1$. Wir verwenden die Folgerung 2.9 und bekommen

$$|I_1(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \sup_G |f(y)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Für $I_2(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon)| &\leq \frac{1}{\omega_n(n-2)} \sup_G |f(y)| \int_G \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|^{n-1}} |\eta_\varepsilon'(\|x-y\|)| \, dy \\
&\leq \frac{2}{\omega_n(n-2)\varepsilon} \sup_G |f(y)| \int_{G \cap B_{2\varepsilon}(x) \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}} \|x-y\|^{2-n} \, dy \\
&\leq \frac{2}{\omega_n(n-2)\varepsilon} \sup_G |f(y)| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{2-n} \, dy.
\end{aligned}$$

Dies bekommen wir, da $\eta_\varepsilon' = 0$ für $\|x-y\| \leq \varepsilon$ und $\|x-y\| \geq 2\varepsilon$ bleibt noch $B_{2\varepsilon}(x) \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, wo nach Konstruktion $|\eta_\varepsilon'| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ gilt. Die Verwendung der Folgerung 2.9 liefert:

$$\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon)| &\leq \frac{2}{(n-2)\omega_n \varepsilon} \sup_G |f(y)| \, \omega_n \frac{1}{2} 4\varepsilon^2 \\
&= \frac{4}{(n-2)} \sup_G |f(y)| \, \varepsilon \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir für $x \in G$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_G f(y) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} dy \right| &\leq |I_2(\varepsilon) - I_1(\varepsilon)| \\
&\leq |I_2(\varepsilon)| + |I_1(\varepsilon)| \\
&\leq C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da C unabhängig von x ist, erhalten wir:

$$\sup_{x \in G} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_G f(y) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} dy \right| \leq C\varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $\frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gleichmäßig auf G gegen das Integral in (3.2) konvergiert. Wir wissen bereits, dass w_ε gleichmäßig auf $\overline{G}$ gegen w konvergiert und damit insbesondere auf G. Somit erhalten wir mit Satz 2.10, dass $\frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \in C^0(G)$ für $i = 1, ..., n$ und durch (3.2) geben ist. Damit ist $w(x) \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^1(G)$. $\square$

Bemerkung 3.3. Es gilt sogar $w(x) \in C^1\left(\overline{G}\right)$. Dafür müssen wir uns überlegen, dass sich die partiellen Ableitungen stetig auf den Rand fortsetztzen lassen. Dazu verwenden wir eine Glättung der ersten Ableitungen und zeigen, dass diese gleichmäßig auf $\overline{G}$ gegen $\frac{\partial}{\partial x_i} w(x)$ konvergiert. Da die Glättung stetig für alle $x \in \overline{G}$ ist und wir gleichmäßige Konvergenz haben, erhalten wir die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial x_i} w(x)$ für $x \in \overline{G}$. Damit sind die partiellen Ableitungen des Newtonpotentials in G insbesondere stetig auf den Rand von G fortsetzbar.

Des Weiteren wollen wir erreichen, dass $w \in C^2(G)$ ist. Dafür müssen wir stärkere Anforderungen an f stellen: f muss nicht nur stetig, sondern auch (lokal) hölderstetig sein. Damit kommen wir zur folgender Definition.

Definition 3.4. (Hölderstetigkeit)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann heißt $u : G \to R$ hölderstetig im Punkt $x_0 \in G$ mit Hölderexponenten $\alpha \in (0, 1]$, wenn Folgendes gilt:
Es gibt Konstanten $L_{x_0} \geq 0$ und $r_{x_0} > 0$, so dass für alle $x, y \in B_{r_{x_0}}(x_0) \cap G$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq L_{x_0} \|x - y\|^\alpha .$$

Hierbei hängen die Konstanten L_{x_0} und r_{x_0} von x_0 ab.

Wir können uns nun leicht überlegen, dass die Hölderstetigkeit eine starke Bedingung an eine Funktion ist und Stetigkeit impliziert. Dazu formulieren wir folgendes Lemma.

Lemma 3.5. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : G \to \mathbb{R}$ hölderstetig in $x_0 \in G$ mit Hölderexponenten $\alpha \in (0, 1]$, so ist u stetig in $x_0 \in G$.*

Aus dieser sehr allgemeinen Definition der Hölderstetigkeit, können wir die Hölderstetigkeit auf kompakten Teilmengen von G folgern.

Lemma 3.6. *Ist $u : G \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x_0 \in G$ hölderstetig mit Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, dann ist u lokal hölderstetig mit Exponenten α. Das heißt, für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ gibt es eine Konstante $L_K \geq 0$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:*

$$|u(x) - u(y)| \leq L_K \|x - y\|^\alpha .$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, es existiere eine kompakte Teilmenge $K_0 \subset G$ und Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:

$$|u(x_n) - u(y_n)| > n \|x_n - y_n\|^\alpha . \tag{3.3}$$

Wir haben uns im obigen Lemma bereits überlegt, dass u stetig in G ist. Das bedeutet u ist insbesondere in der kompakten Menge K_0 stetig und damit auch beschränkt. Damit erhalten wir:

$$\|x_n - y_n\|^\alpha < \frac{1}{n} |u(x_n) - u(y_n)| < \frac{1}{n} S$$

für eine passende Konstante S. Damit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0 \tag{3.4}$$

Da K_0 kompakt ist wissen wir, dass die Folgen x_n und y_n in K_0 konvergente Teilfolgen besitzen, welche einen Grenzwert in K_0 besitzen. Diese seien $a, b \in K_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a$ und $\lim_{n\to\infty} y_{\psi(n)} = b$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\varphi = \psi$ gilt. Nach der Überlegung (3.4) muss damit nun $a = b$ gelten. Wir bezeichnen den gemeinsamen

Grenzwert nun mit $z \in K_0$. Nach Voraussetzung wissen wir, dass u hölderstetig in z ist. Das heißt, es existieren Konstanten $L_z \geq 0$ und $r_z > 0$, so dass für alle $x, y \in B_{r_z}(z) \cap G$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq L_z \|x - y\|^\alpha$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme (3.3), da für n hinreichend groß $x_{\varphi(n)}$ und $y_{\varphi(n)} \in B_{r_z}(z)$ liegen. □

Des Weiteren wollen wir die lokal hölderstetigen Funktionen auf G noch genauer betrachten. Die Menge der in G lokal hölderstetigen Funktionen bezeichnen wir mit:

$$C^{0,\alpha}(G) = \{v \colon G \to \mathbb{R} \mid v \text{ ist in G lokal hölderstetig mit Exponent } \alpha\}$$

Wir werden weiters folgende Bezeichnung verwenden:

$$|u|_{C^{0,\alpha}(K)} = \sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \tag{3.5}$$

Bemerkung 3.7. Der in (3.5) definierte Ausdruck ist für $u \in C^{0,\alpha}(G)$ und $K \subset G$ kompakt endlich, da $\frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^\alpha} \leq L_K$ für alle $x, y \in K$ gilt, wobei L_K die Hölderkonstante für die kompakte Menge K ist. Insbesondere gilt: Sei $r > 0$ und $x \in G$ mit $\overline{B_r(x)} \subset G$ und $f \in C^{0,\alpha}(G)$, dann ist $|f|_{C^{0,\alpha}(B_r(x))} \leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_r(x)}\right)} < \infty$, da $\overline{B_r(x)}$ als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt in G ist. Das heißt, dass $|f|_{C^{0,\alpha}(B_r(x))}$ endlich ist.

Die lokale Hölderstetigkeit ist eine stärkere Bedingung als die Stetigkeit.

Lemma 3.8. *Sei $f \in C^{0,\alpha}(G)$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ist f stetig auf G.*

Unter diesen Voraussetzungen können wir jetzt die zweiten partiellen Ableitungen des Newtonpotentials berechnen. Dazu formulieren wir folgenden Satz:

Satz 3.9. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^{0,\alpha}(G)$ und $\sup_G |f(y)| < \infty$. Dann ist $w \in C^2(G)$ und die zweiten partiellen Ableitungen von w sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} w_{x_i x_j}(x) = &- \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x - y\|} \right) \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|^n} dy \\ &+ \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n} s_j(y) do(y) f(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

für $x \in G$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$. Dabei ist G_0 ein beliebiges Normalgebiet mit $G \subset G_0$. Die Funktion f wird auf G_0 trivial fortgesetzt, das heißt $f(x) = 0$ für $x \in G_0 \setminus G$. Die äußere Normale bezüglich G_0 wird mit s bezeichnet.

Zur Erinnerung: δ_{ij} bezeichnet das Kronecker-Delta. Auch diesen Satz beweisen wir für $n \geq 3$. Für die anderen Fälle kann der Beweis beinahe analog geführt werden.

Bemerkung 3.10. Wenn nun G selber ein Normalgebiet ist, kann für G_0 auch G gewählt werden. Dabei bleiben die Aussagen des Satzes sowie der Beweis richtig. In diesem Fall benötigen wir keine triviale Fortsetzung von f auf G_0.

Beweis. Da f nach Lemma 3.8 stetig auf G ist und die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt sind, ist $w \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^1(G)$ und die ersten partiellen Ableitungen sind durch (3.2) gegeben, welche wir mit v bezeichnen. Wenn wir $f(y) = 0$ für $y \in G_0 \setminus G$ setzen, erhalten wir die Identität $\int_G f(y)dy = \int_{G_0} f(y)dy$. Nun können wir auch für die anderen Integrale G_0 statt G verwenden.
Mit den gleichen Bezeichnungen wie in 3.2 bezeichnen wir mit v_ε eine Glättung der ersten partiellen Ableitungen von w mit $i \in \{1, ..., n\}$.

$$v_\varepsilon(x) := -\frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \eta_\varepsilon(\|x-y\|) f(y) dy$$

für $x \in G$.
Vorerst werden wir zeigen, dass $v_\varepsilon \to v$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig konvergiert. Es gilt für alle $x \in G$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|v_\varepsilon(x) - v(x)| &= \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} f(y) \left(1 - \eta_\varepsilon(\|x-y\|)\right) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\omega_n} \sup_G |f| \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{1-n} \, dy \\
&\leq \sup |f| \, 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz auf G.
Nun wollen wir die partiellen Ableitungen von v_ε berechnen, dazu verwenden wir den Differentiationssatz 2.14. Wir setzen

$$h_\varepsilon(x,y) := \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \eta_\varepsilon(\|x-y\|).$$

Wir wissen aus Satz 3.2, dass $h_\varepsilon(x,y)f(y)$ für feste $x \in G$ integrierbar über G ist. Diese Eigenschaft bleibt bei Integration über G_0 erhalten, da ja das Integral außerhalb von G null ist. Weiters ist $h_\varepsilon(x,y)f(y)$ für feste $y \in G_0$ stetig differenzierbar, was wir durch die Abschneidefunktion erhalten. Um den Differentiationssatz anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y) f(y)\right|$ beschränkt ist auf G.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\right) \eta_\varepsilon(\|x-y\|) + \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)\right) \\
&= \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|}\right) \frac{1}{\|y-x\|^n} \eta_\varepsilon(\|x-y\|) \\
&+ \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|} \frac{1}{\|y-x\|^{n-1}} \eta'_\varepsilon(\|x-y\|). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y)\right| &\leq \left((n+1) \frac{1}{\|y-x\|^n} \eta_\varepsilon(\|x-y\|) + \frac{1}{\|y-x\|^{n-1}} \left|\eta'_\varepsilon(\|x-y\|)\right|\right) \\
&\leq \left((n+1)\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{2}{\varepsilon^n}\right) = (n+3)\frac{1}{\varepsilon^n}, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

da $\eta_\varepsilon \le 1$, $|\eta'_\varepsilon| \le \frac{2}{\varepsilon}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y) = 0$ für $\|x-y\| \le \varepsilon$ ist .
Das bedeutet $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y) f(y)\right| \le C_\varepsilon \sup_G |f(y)|$ ist, also für festes ε beschränkt. Mit dem Differentiationssatz folgt jetzt $v_\varepsilon \in C^1(G)$ und $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} = -\frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) f(y) dy$ (da $f(y)$ ein Skalar für die partielle Ableitung nach x_j ist). Um die partiellen Ableitungen zu berechnen berücksichtigen wir, dass

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right). \tag{3.9}$$

Damit können wir für $x \in G$ fortfahren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) (f(y) - f(x)) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right) dy f(x) \\
&= \frac{1}{\omega_n} I_1(\varepsilon) + \frac{1}{\omega_n} I_2(\varepsilon) f(x).
\end{aligned}$$

Wir betrachten $I_2(\varepsilon)$ und wollen den Gaußschen Integralsatz verwenden. Dafür müssen wir zeigen, dass die geforderten Voraussetzungen erfüllt sind. Für festes $x \in G$ gilt: $h_\varepsilon(x,y) \in C^0\left(\overline{G_0}\right) \cap C^1(G_0)$ aufgrund von η_ε.
Aus (3.8) und (3.9) folgt, dass $\left|\frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right)\right| \le C_\varepsilon$ und damit $\int_{G_0} \left|\frac{\partial}{\partial y_j} \left(h_\varepsilon(x,y)\right)\right| dy < \infty$. Weiters ist G_0 ein Normalgebiet. Jetzt können wir den Gaußschen Integralsatz 2.7 anwenden, wobei $s(y)$ äußere Normale bezüglich G_0 ist. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\|x-y\| \ge 2\varepsilon$ für $x \in G$ und $y \in \partial G_0$ gilt. Dies ist möglich, denn für feste $x \in G$ ist, $\inf_{y \in \partial G_0} \|x-y\| = \mu > 0$, da $G \subset G_0$ offen ist (Diese Aussage bleibt gültig für den Fall, dass G ein Normalgebiet ist und $G_0 = G$ gewählt wird.). Nun wählen wir $\varepsilon > 0$, so dass $\mu \ge 2\varepsilon$ ist. Damit folgt, dass $\eta_\varepsilon(\|x-y\|) = 1$. Insgesamt erhalten wir damit:

$$I_2(\varepsilon) = \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \eta_\varepsilon(\|x-y\|) s_j(y) do(y) = \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_j(y) do(y). \tag{3.10}$$

Damit gilt insbesondere $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_2(\varepsilon) = \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_j(y) do(y)$.
Betrachten wir noch einmal (3.7). Für $\|x-y\| \ge 2\varepsilon$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} h_\varepsilon(x,y) = \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|}\right) \frac{1}{\|y-x\|^n}.$$

Dies veranlasst uns, folgendes Integral zu betrachten

$$I_{10} = -\int_{G_0} \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|}\right) \frac{f(y) - f(x)}{\|y-x\|^n} dy$$

(für $x \in G$) und zu hoffen, dass $I_1(\varepsilon) \to I_{10}$ für $\varepsilon \to 0$ konvergiert. Dafür müssen wir vorerst die Existenz von I_{10} zeigen. Es sei $x \in G$ beliebig.
Wir wählen $\delta > 0$, so dass $\overline{B_\delta(x)} \subset G$. Dies ist möglich, da G offen ist. Damit folgt, dass auf der offenen Menge $G_0 \setminus \overline{B_\delta(x)}$ die Funktion $\left(\delta_{ij} - n\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|}\right)\frac{f(y)-f(x)}{\|y-x\|^n}$ beschränkt und stetig ist, da $\|x-y\| > \delta$ ist, für alle $(x,y) \in G \times G_0 \setminus \overline{B_\delta(x)}$. Somit erhalten wir mit Satz 2.3 die Integrierbarkeit der Funktion für feste $x \in G$ über $G_0 \setminus \overline{B_\delta(x)}$. Auf $G_0 \cap B_\delta(x) = B_\delta(x)$ können wir folgende Abschätzung finden:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B_\delta(x)} \left(\delta_{ij} - n\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|}\right)\frac{f(y)-f(x)}{\|y-x\|^n}dy\right| \\
&\leq \int_{B_\delta(x)} (n+1)\,|f(y)-f(x)|\,\|y-x\|^{-n}\,dy \\
&\leq (n+1)\int_{B_\delta(x)} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}\,\|x-y\|^{\alpha-n}\,dy \\
&\leq (n+1)\sup_{B_\delta(x)} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}\int_{B_\delta(x)} \|x-y\|^{\alpha-n}\,dy \\
&= \frac{(n+1)\omega_n}{\alpha}\,|f|_{C^{0,\alpha}(B_\delta(x))}\,\delta^\alpha.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass f hölderstetig auf G und somit $|f|_{C^{0,\alpha}(B_\delta(x))} < \infty$ ist.
Mit der Folgerung 2.9 bekommen wir die letzte Zeile.
Da das Integral I_{10} auf $B_\delta(x)$ beschränkt ist, erhalten wir die Existenz von I_{10} auf dem Normalgebiet G_0. Wir sind jetzt in der Lage folgende Behauptung für $x \in G$ zu formulieren : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon) = I_{10}$
Aus (3.7) und (3.9) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\right) = -\frac{1}{\|y-x\|^n}\left(\delta_{ij} - n\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|}\right).$$

Damit können wir I_{10} nun folgendermaßen schreiben:

$$I_{10} = \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\right)(f(y)-f(x))dy.$$

Jetzt können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon) - I_{10}| &= \left|\int_{G_0}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\eta_\varepsilon(\|x-y\|)\right) - \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\right)\right](f(y)-f(x))dy\right| \\
&= \left|\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\left(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1\right)\right)(f(y)-f(x))dy\right|.
\end{aligned}$$

Für $\|x-y\| \geq 2\varepsilon$ gilt $(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)=0$. Wir können nun ein $\varepsilon_0>0$ wählen mit $\overline{B_{2\varepsilon_0}(x)} \subset G$, da G eine offene Menge ist. Wenn wir nun $\varepsilon < \varepsilon_0$ wählen, erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
&|I_1(\varepsilon)-I_{10}| \\
&\leq \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)\right)\right| \frac{|f(y)-f(x)|}{\|x-y\|^\alpha}\|x-y\|^\alpha\, dy \\
&\leq \sup_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{|f(y)-f(x)|}{\|x-y\|^\alpha} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)\right)\right| \|x-y\|^\alpha\, dy. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Um eine von ε unabhängige Konstante zu finden, schätzen wir $|f|_{C^{0,\alpha}(B_{2\varepsilon}(x))} \leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)}$ ab. Es gilt $|f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)} < \infty$, da f hölderstetig auf G und $\overline{B_{2\varepsilon_0}(x)} \subset G$ kompakt ist. Für die weitere Abschätzung betrachten wir:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)\right)\right| \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\right)(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1) + \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\frac{\partial}{\partial y_j}(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)\right| \\
&= \left|-\frac{(\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1)}{\|x-y\|^n}\left(\delta_{ij} - n\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|}\right) - \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|}\eta_\varepsilon'(\|x-y\|)\right| \\
&\leq \frac{(n+1)}{\|x-y\|^n} + \frac{2}{\varepsilon\,\|x-y\|^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $|\eta_\varepsilon(\|x-y\|)-1| \leq 1$, $|\eta_\varepsilon'(\|x-y\|)| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ und $|x_k-y_k| \leq \|x-y\|$ verwendet. Aus (3.11) folgt nunmehr für $x \in G$:

$$\begin{aligned}
&|I_1(\varepsilon)-I_{10}| \\
&\leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \left((n+1)\|x-y\|^{\alpha-n} + \frac{2}{\varepsilon}\|x-y\|^{\alpha+1-n}\right) dy \\
&\leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)} (n+1)\left(\int_{B_{2\varepsilon}(x)} \|x-y\|^{\alpha-n}\, dy + \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{2}{\varepsilon}\|x-y\|^{\alpha+1-n}\, dy\right) \\
&= |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)} (n+1)\left[\omega_n\frac{2^\alpha}{\alpha}\varepsilon^\alpha + \omega_n\frac{2^{\alpha+2}}{\alpha+1}\varepsilon^\alpha\right] \\
&\leq C\,|f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)}\varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Hier ist zu bemerken, dass die Konstante $C\,|f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)}$ unabhängig von ε ist.

Weiters bezeichnen wir mit $I_{A(j)}(x)$ die rechte Seite von (3.6) für $j \in \{1,...,n\}$. Damit erhalten wir für $x \in G$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass die Bedingungen für (3.10) und (3.11) erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x_j}v_\varepsilon(x) - I_{A(j)}(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\omega_n}I_1(\varepsilon) + \frac{1}{\omega_n}I_2(\varepsilon)f(x) - \frac{1}{\omega_n}I_{10} - \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial G_0}\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^n}s_j(y)do(y)f(x)\right|.
\end{aligned}$$

Nach (3.10) gilt, dass $\frac{1}{\omega_n} I_2(\varepsilon) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_j(y) do(y)$. Damit folgt:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon(x) - I_{A(j)}(x) \right| = \frac{1}{\omega_n} \left| I_1(\varepsilon) - I_{10} \right| \leq \frac{C \, |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)}}{\omega_n} \varepsilon^\alpha. \tag{3.12}$$

Diese Ungleichung gilt für $x \in G$. Unser Ziel ist es jetzt, lokal gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon(x)$ gegen $I_{A(j)}(x)$ in G zu erreichen. Sei $x_0 \in G$ beliebig. Dann gibt es ein $r_0 > 0$ mit $B_{r_0}(x_0) \subset G$ und $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset G$. Wählen wir $\varepsilon_0 > 0$ hinreichend klein, dann gibt es eine kompakte Menge K_{x_0} in G, so dass für alle $x \in B_{r_0}(x_0)$ gilt $B_{2\varepsilon_0}(x) \subset K_{x_0}$. Die Menge K_{x_0} kann konstruiert werden durch eine passende Wahl von r_0 und ε_0, so dass $r_0 + 2\varepsilon_0 < d_{x_0}(G)$. Dabei bezeichnet $d_{x_0}(G) = \inf\{\|x - x_0\| \mid x \in \partial G\}$ den Randabstand von x_0 in G. Damit ist gesichert, dass $\overline{B_{r_0+2\varepsilon_0}(x_0)} \subset G$. Wir können nun $K_{x_0} = \overline{B_{r_0+2\varepsilon_0}(x_0)}$ wählen und bekommen die obige Aussage. Damit folgt für $x \in B_{r_0}(x_0)$, dass $|f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)} \leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(K_{x_0}\right)} = L_{K_{x_0}}$, wobei $L_{K_{x_0}}$ die Hölderkonstante bezüglich K_{x_0} ist. Wir erhalten damit gleichmäßige Konvergenz auf $B_{r_0}(x_0)$, da nach (3.12) für $x \in B_{r_0}(x_0)$ gilt:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} v_\varepsilon(x) - I_{A(j)}(x) \right| \leq \frac{C \, |f|_{C^{0,\alpha}\left(B_{2\varepsilon_0}(x)\right)}}{\omega_n} \varepsilon^\alpha \leq \frac{C L_{K_{x_0}}}{\omega_n} \varepsilon^\alpha.$$

Da $x_0 \in G$ beliebig war, erhalten wir lokal gleichmäßige Konvergenz. Wir wissen bereits, dass $v_\varepsilon(x)$ gleichmäßig nach $\frac{\partial}{\partial x_i} w(x)$ auf G konvergiert und nach Voraussetzung G wegweise zusammenhängend ist. Mit der Folgerung 2.12 erhalten wir, dass $w_{x_i x_j}$ durch $I_{A(j)}$ gegeben und $w_{x_i x_j} \in C^0(G)$ ist. Also gilt $w(x) \in C^2(G)$. □

Nach diesen beiden wichtigen Sätzen sind wir nun in der Lage, ein erstes Teilergebnis zur Lösung der inhomogenen Poissongleichung (1.1) anzugeben. Dabei ist zu beachten, dass wir die Lösung vorerst nur auf G garantieren können.

Folgerung 3.11. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^{0,\alpha}(G)$ und $\sup_G |f(y)| < \infty$. Dann ist das Newtonpotential $w \in C^2(G)$ und eine Lösung der Poissongleichung $-\Delta w = f$ auf G.

Beweis. Wir verwenden dafür die Formel für die zweiten Ableitungen des Newtonpotentials (3.6).

$$\begin{aligned}
-\Delta w(x) &= -\sum_{i=1}^{n} w_{x_i x_i}(x) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{G_0} \left(1 - n\frac{(x_i - y_i)^2}{\|x-y\|^2}\right) \frac{f(y)-f(x)}{\|y-x\|^n} dy \\
&- \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_i(y) do(y) f(x) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \frac{f(y)-f(x)}{\|y-x\|^n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(1 - n\frac{(x_i-y_i)^2}{\|x-y\|^2}\right)}_{=0} dy \\
&- \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{1}{\|x-y\|^n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) s_i(y) do(y) f(x) \\
&= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{\langle x-y, s(y)\rangle}{\|x-y\|^n} do(y) f(x).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Hier haben wir verwendet, dass wir Summation und Integration für endlich viele Elemente vertauschen können.
Wir müssen des Weiteren noch das verbleibende Randintegral untersuchen. Mit dem Satz 2.18 gilt für $u \in C^2\left(\overline{G_0}\right)$ die Darstellungsformel für $x \in G_0$:

$$u(x) = \int_{\partial G_0} \left(\Phi(y,x)\frac{\partial u}{\partial s}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial s}(y,x)\right) do(y) - \int_{G_0} \Phi(y,x)\Delta u(y) dy,$$

wobei Φ eine beliebige Grundlösung und s die äußere Normale an ∂G_0 im Punkt $y \in G_0$ ist. Wir wissen bereits, dass die Singularitätsfunktion s_n eine Grundlösung ist und setzen $\Phi = s_n$. Weiters wählen wir $u(x) \equiv 1$ für $x \in \overline{G_0}$. Dann ist $\Delta u = 0$ auf G_0 und die Richtungsableitung von u in Richtung s, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ auf ∂G_0. Damit erhalten wir:

$$1 = -\int_{\partial G_0} \underbrace{u(y)}_{=1} \frac{\partial s_n}{\partial s}(y,x) do(y). \tag{3.14}$$

Die Funktion s_n hat keine Singularität, da $y \in \partial G_0$ und $x \in G \subset G_0$ und somit $\|x-y\| > 0$ ist.
Wir wissen, dass $\frac{\partial s_n}{\partial s}(y,x) = \left\langle \nabla s_{n_y}, s\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{(n-2)\omega_n}\|x-y\|^{2-n}\right) s_i(y)$, wobei ∇s_{n_y} der Gradient bezüglich y ist. Für die partielle Ableitung nach y_i gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{(n-2)\omega_n}\|x-y\|^{2-n}\right) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\right)^{\frac{2-n}{2}} = \frac{1}{\omega_n}\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}.$$

Mit (3.14) folgt nun:

$$\begin{aligned}
1 &= -\int_{\partial G_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_n} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_i(y) do(y) \\
&= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{\langle x-y, s(y)\rangle}{\|x-y\|^n} do(y).
\end{aligned}$$

Damit folgt für (3.13): $-\Delta w(x) = f(x)$ für $x \in G$. □

Wir wollen nun auch noch erreichen, dass die zweiten Ableitungen des Newtonpotentials hölderstetig und damit insbesondere lokal hölderstetig sind. Dafür benötigen wir zusätzliche Forderungen an G als auch an f. Dies fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.12. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)$ mit $\alpha \in (0,1)$ und $\sup_G |f(y)| < \infty$. Die zweiten partiellen Ableitungen des Newtonpotentials sind (nach Satz 3.9 mit $G_0 = G$ gewählt) durch die Integralformel:*

$$\begin{aligned}
w_{x_i x_j}(x) = &-\frac{1}{\omega_n} \int_G \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|}\right) \frac{f(y) - f(x)}{\|y-x\|^n} dy \\
&+ \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} s_j(y) do(y) f(x)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

für $x \in G$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ und s äußere Normale bezüglich G gegeben.
Dann ist $w \in C^{2,\alpha}(G)$.

Beweis. Wir müssen $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} w(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ für $i, j \in \{1, ...n\}$ zeigen. Wir verwenden die Formel (3.15) und die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
P_i(x,y) &= \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \\
P_{ij}(x,y) &= \frac{1}{\|x-y\|^n} \left(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j - y_j}{\|x-y\|}\right)
\end{aligned}$$

für $i, j \in \{1, .., n\}$. Damit erhalten wir für $x \in G$:

$$w_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_G P_{ij}(f(y) - f(x)) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G} P_i(x,y) s_j(y) do(y) f(x).$$

Wir wollen nun zeigen, dass die zweiten Ableitungen hölderstetig sind. Daraus folgt mit Hilfe des Lemmas 3.6 die lokale Hölderstetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen des Newtonpotentials in G.
Es seien $x, x' \in B_R(x_0)$ mit $R > 0$ und $\overline{B_{3R}(x_0)} \subset G$ und $x \neq x'$ mit $x_0 \in G$ beliebig. Dies ist möglich da $G \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Der Fall $x = x'$ ist für die Hölderstetigkeit der

zweiten partiellen Ableitungen klar. Wir setzen nun $\overline{x} = \frac{1}{2}(x+x')$ und $\delta = \|x - x'\| > 0$. Dann ist $\delta < 2R$. Damit gilt für $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned}\omega_n \left(w_{x_i x_j}(x) - w_{x_i x_j}(x')\right) = &- \int_G P_{ij}(x,y)(f(y) - f(x))dy \\ &+ \int_{\partial G} P_i(x,y) s_j(y) do(y) f(x) \\ &+ \int_G Pij(x',y)(f(y) - f(x'))dy \\ &- \int_{\partial G} P_i(x',y) s_j(y) do(y) f(x').\end{aligned}$$

Fassen wir die Integrale nun anders zusammen bekommen wir folgenden Ausdruck für die Differenz:

$$\begin{aligned}\omega_n \left(w_{x_i x_j}(x) - w_{x_i x_j}(x')\right) = &\int_{\partial G} (P_i(x,y) - P_i(x',y)) s_j(y) do(y) f(x) \\ &+ \int_{\partial(G)} P_i(x',y) s_j(y) do(y)(f(x) - f(x')) \\ &- \int_G P_{ij}(x,y)(f(y) - f(x))dy \\ &+ \int_G P_{ij}(x',y)(f(y) - f(x'))dy,\end{aligned}$$

wobei wir die Linearität des Integrals verwendet haben. Wir können das Integrationsgebiet in zwei Mengen aufteilen: $(G \cap B_\delta(\overline{x}))$ und $G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}$.
Hierbei ist zu erwähnen, dass folgende Identität für eine auf einer Menge G integrierbare Funktion h mit $\overline{B_r(a)} \subset G$ gilt: $\int_{B_r(a)} h(y)dy = \int_{\overline{B_r(a)}} h(y)dy$.
Damit erhalten wir folgende sechs Integrale:

$$\begin{aligned}\omega_n \left(w_{x_i x_j}(x) - w_{x_i x_j}(x')\right) = &\int_{\partial G} (P_i(x,y) - P_i(x',y)) s_j(y) do(y) f(x) \\ &+ \int_{\partial G} P_i(x',y) s_j(y) do(y)(f(x) - f(x')) \\ &- \int_{G \cap B_\delta(\overline{x})} P_{ij}(x,y)(f(y) - f(x))dy \\ &- \int_{G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)(f(y) - f(x))dy \\ &+ \int_{G \cap B_\delta(\overline{x})} P_{ij}(x',y)(f(y) - f(x'))dy \\ &+ \int_{G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x',y)(f(y) - f(x'))dy \\ =&I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6.\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die zweiten partiellen Ableitungen von w hölderstetig sind, müssen wir die Integrale I_j für $j \in \{1, ..., 6\}$ passend abschätzen.
Wir beginnen mit I_1. Es gilt $B_R(x_0) \subset B_{3R}(x_0) \subset G$. Damit können wir für $y \in \partial G$ folgern:

$$\|x - y\| \geq \|x_0 - y\| - \|x - x_0\| \geq 2R - R \geq R.$$

Eine analoge Abschätzung gilt für x'. Wir erhalten $\|x' - y\| \geq R$. Für die folgenden Abschätzungen verwenden wir:

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| \sum_{i=0}^{n-1} |a|^{n-i-1} |b|^i, \tag{3.16}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Der Beweis dieser Ungleichung erfolgt mit Induktion.
Nun können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
|P_i(x,y) - P_i(x',y)| &= \left| \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n} - \frac{x_i' - y_i}{\|x' - y\|^n} \right| \\
&= \left| \frac{x_i - x_i'}{\|x - y\|^n} + \frac{x_i' - y_i}{\|x - y\|^n} - \frac{x_i' - y_i}{\|x' - y\|^n} \right| \\
&\leq \frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|^n} + \left| \frac{(x_i' - y_i)\left(\|x' - y\|^n - \|x - y\|^n\right)}{\|x - y\|^n \|x' - y\|^n} \right|.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Ungleichung (3.16) auf den zweiten Term des obigen Ausdruckes an und bekommen:

$$\begin{aligned}
|P_i(x,y) - P_i(x',y)| &\leq \|x - x'\| R^{-n} \\
&\quad + \|x' - y\| \frac{\left|\|x' - y\| - \|x - y\|\right| \sum_{i=0}^{n-1} \|x' - y\|^{n-i-1} \|x - y\|^i}{\|x - y\|^n \|x' - y\|^n} \\
&\leq \|x - x'\| R^{-n} + \|x - x'\| \|x' - y\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|x' - y\|^{n-i-1}}{\|x' - y\|^n} \frac{\|x - y\|^i}{\|x - y\|^n} \\
&= \|x - x'\| R^{-n} + \|x - x'\| \|x' - y\| \sum_{i=0}^{n-1} \|x' - y\|^{-i-1} \|x - y\|^{-n+i} \\
&\leq \|x - x'\| R^{-n} + \|x - x'\| \|x' - y\| \sum_{i=0}^{n-1} R^{-i-1} R^{-n+i} \\
&\leq \|x - x'\| R^{-n} + \|x - x'\| \|x' - y\| nR^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Abschätzung von I_1:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{\partial G} |P_i(x,y) - P_i(x',y)|\, |s_j(y)|\, do(y)\, |f(x)| \\
&\leq \sup_{B_R(x_0)} |f(x)| \int_{\partial G} \left(R^{-n} + \|x'-y\|\, nR^{-1-n} \|s_j(y)\|\right) do(y)\, \|x-x'\| \\
&\leq \sup_G |f(x)| \int_{\partial G} \left(R^{-n} + d(G) nR^{-1-n}\right) do(y)\, \|x-x'\| \\
&\leq C(R,f)\, \|x-x'\|^{1-\alpha} \|x-x'\|^{\alpha} \\
&\leq C_1(R,f)\, \|x-x'\|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet: $|s_j(y)| \leq \|s(y)\| = 1$, $\|x'-y\| \leq d(G) < \infty$, da G als Normalgebiet beschränkt ist, und $\|x-x'\| \leq 2R$.
Für I_2 gehen wir folgendermaßen vor: Es gilt $|P_i(x',y)| \leq \|x'-y\|^{1-n}$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{\partial G} \|x'-y\|^{1-n} |s_j(y)|\, do(y)\, |f(x) - f(x')| \\
&\leq \int_{\partial G} R^{1-n} do(y) \frac{|f(x)-f(x')|}{\|x-x'\|^{\alpha}} \|x-x'\|^{\alpha} \\
&\leq C(R)\, |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_R(x_0)}\right)} \|x-x'\|^{\alpha} \\
&\leq C_2(R,f)\, \|x-x'\|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $|f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_R(x_0)}\right)}$ endlich ist.
Für I_3 verwenden wir $|P_{ij}(x,y)| \leq (n+1)\, \|x-y\|^{-n}$ und $G \cap B_\delta(\overline{x}) = B_\delta(\overline{x})$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq (n+1) \int_{B_\delta(\overline{x})} \frac{|f(y)-f(x)|}{\|y-x\|^{\alpha}} \|y-x\|^{\alpha-n} dy \\
&\leq (n+1)\, |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_{3R}(x_0)}\right)} \int_{B_\delta(\overline{x})} \|y-x\|^{\alpha-n} dy.
\end{aligned}$$

Dabei benötigten wir, dass $B_\delta(\overline{x}) \subset \overline{B_{3R}(x_0)} \subset G$ und $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)$ ist. Jetzt wollen wir eine Kugel um x finden, in der $B_\delta(\overline{x})$ enthalten ist. Sei $y \in B_\delta(\overline{x})$. Dann gilt:

$$\|y-x\| \leq \|y-\overline{x}\| + \|\overline{x}-x\| \leq \delta + \frac{1}{2}\|x-x'\| = \frac{3}{2}\delta,$$

also $B_\delta(\overline{x}) \subset B_{\frac{3}{2}\delta}(x)$. Jetzt können wir die Folgerung 2.9 verwenden und folgern:

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq (n+1)\, |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_3R(x_0)}\right)} \int_{B_{\frac{3}{2}\delta}(x)} \|y-x\|^{\alpha-n} dy \\
&= C_3(R,f)\delta^{\alpha} = C_3(R,f)\, \|x-x'\|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Analog können wir für das Integral I_5 vorgehen (x und x' in vertauschten Rollen) und erhalten:

$$|I_5| \leq C_5(R,f)\, \|x-x'\|.$$

Wir werden nun I_4 und I_6 gemeinsam abschätzen. Dazu betrachten wir :

$$\begin{aligned}
I_4 + I_6 = & \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \left(P_{ij}(x',y)(f(y)-f(x')) - P_{ij}(x,y)(f(y)-f(x))\right) dy \\
= & \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} (P_{ij}(x',y) - P_{ij}(x,y))(f(y)-f(x'))dy \\
& + \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)(f(x)-f(x'))dy \\
= & S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Auf dem Integrationsgebiet $G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}$ gilt: $\|y-\overline{x}\| \geq \delta = \|x-x'\|$. Damit können wir folgende Abschätzung finden:

$$\|y-x'\| \geq \|y-\overline{x}\| - \|\overline{x}-x'\| = \|y-\overline{x}\| - \frac{1}{2}\|x-x'\| \geq \frac{1}{2}\|x-x'\|.$$

Hierbei wurde für $\overline{x}$ eingesetzt und die obige auf dem Integrationsgebiet gültige Ungleichung verwendet. Wir fahren fort:

$$\|y-x\| = \left\|y - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} + \frac{x'}{2} - \frac{x}{2}\right\| \geq \|y-\overline{x}\| - \frac{1}{2}\|x-x'\| \geq \frac{1}{2}\|y-\overline{x}\|.$$

Ebenso gilt für $\|y-x'\|$:

$$\|y-x'\| \geq \frac{1}{2}\|y-\overline{x}\|.$$

Als nächstes betrachten wir folgende Differenz:

$$\begin{aligned}
& |P_{ij}(x',y) - P_{ij}(x,y)| \\
& = \left| \left(\|x-y\|^{-n} - \|x'-y\|^{-n}\right)\delta_{ij} - n\left(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|^{n+1}} - \frac{x_i'-y_i}{\|x'-y\|}\frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|^{n+1}}\right)\right| \\
& \leq \left|\|x-y\|^{-n} - \|x'-y\|^{-n}\right| + n\left|\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|}\frac{x_j-y_j}{\|x-y\|^{n+1}} - \frac{x_i'-y_i}{\|x'-y\|}\frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|^{n+1}}\right| \\
& = A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

Wir betrachten vorerst den Term A_1 und verwenden dabei die Ungleichung (3.16).

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left|\|x'-y\|^n - \|x-y\|^n\right|}{\|x-y\|^n \|x'-y\|^n} \\
&\leq \frac{\left|\|x'-y\| - \|x-y\|\right| \sum_{i=0}^{n-1} \|x'-y\|^{n-i-1} \|x-y\|^i}{\|x-y\|^n \|x'-y\|^n} \\
&\leq \|x-x'\| \sum_{i=0}^{n-1} \|x'-y\|^{-i-1} \|x-y\|^{i-n} \\
&\leq \|x-x'\| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\|y-\overline{x}\|\right)^{-i-1} \left(\frac{1}{2}\|y-\overline{x}\|\right)^{i-n} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)} n \|x-x'\| \|y-\overline{x}\|^{-(n+1)} .
\end{aligned}$$

Für A_2 können wir folgendermaßen vorgehen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}A_2 \leq & \left| \left(\|x-y\|^{-n} - \|x'-y\|^{-n} \right) \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j-y_j}{\|x-y\|} \right| \\
& + \|x'-y\|^{-n} \left| \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j-y_j}{\|x-y\|} - \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|} \right| \\
& + \|x'-y\|^{-n} \left| \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|} \frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|} - \frac{x_i'-y_i}{\|x'-y\|} \frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|} \right| \\
= & \left(A_2^{(1)} + A_2^{(2)} + A_2^{(3)} \right).
\end{aligned}$$

Wir werden nun diese drei Terme jeweils separat abschätzen.

$$A_2^{(1)} \leq \left| \|x-y\|^{-n} - \|x'-y\|^{-n} \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)} n \|x-x'\| \|y-\overline{x}\|^{-(n+1)}$$

Hierbei haben wir die bereits durchgeführte Abschätzung für A_1 und $\frac{|x_i-y_i|}{\|x-y\|} \leq 1$ verwendet. Wir werden nun $A_2^{(2)}$ passend abschätzen:

$$\begin{aligned}
A_2^{(2)} &\leq \|x'-y\|^{-n} \frac{|x_i-y_i|}{\|x-y\|} \left| \frac{x_j-y_j}{\|x-y\|} - \frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|} \right| \\
&\leq \|x'-y\|^{-n} \left| \frac{x_j-x_j'}{\|x-y\|} + \frac{x_j'-y_j}{\|x-y\|} - \frac{x_j'-y_j}{\|x'-y\|} \right| \\
&\leq \|x'-y\|^{-n} \left| \frac{x_j-x_j'}{\|x-y\|} + \frac{\left(x_j'-y_j\right)\left(\|x'-y\| - \|x-y\|\right)}{\|x-y\| \|x'-y\|} \right| \\
&\leq \|x'-y\|^{-n} \left(\frac{\|x-x'\|}{\|x-y\|} + \frac{\|x'-y\| \|x-x'\|}{\|x-y\| \|x'-y\|} \right) \\
&= 2^{n+2} \|x-x'\| \|y-\overline{x}\|^{-(n+1)} .
\end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass auf dem Integrationsgebiet folgende Ungleichungen gelten: $\|y - x'\| \geq \frac{1}{2}\|y - \overline{x}\|$ und $\|y - x\| \geq \frac{1}{2}\|y - \overline{x}\|$. Auf analoge Weise können wir eine Abschätzung für $A_2^{(3)}$ finden. Insgesamt bekommen wir nun:

$$|P_{ij}(x', y) - P_{ij}(x, y)| \leq C\,\|x - x'\|\,\|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}$$

für eine passende Konstante $C \geq 0$. Nun können wir eine Abschätzung für S_1 finden:

$$\begin{aligned}
|S_1| &\leq \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} |P_{ij}(x', y) - P_{ij}(x, y)|\,|f(y) - f(x')|\,dy \\
&\leq C\,\|x - x'\| \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\,|f(y) - f(x')|\,dy \\
&\leq C\,\|x - x'\| \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\,(|f(y) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(x')|)\,dy \\
&\leq C\,\|x - x'\|\left(S_1^{(1)} + S_1^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{\alpha-(n+1)}\,\frac{|f(y) - f(\overline{x})|}{\|y - \overline{x}\|^{\alpha}}dy \\
S_1^{(2)} &= \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\,dy\frac{|f(\overline{x}) - f(x')|}{\|\overline{x} - x'\|^{\alpha}}\,\|\overline{x} - x'\|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Wir beginnen mit $S_1^{(1)}$. Da $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)$ und $y \in G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}$, erhalten wir: $\frac{|f(y)-f(\overline{x})|}{\|y-\overline{x}\|^{\alpha}} \leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)} < \infty$. Damit bekommen wir eine Abschätzung für $S_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
S_1^{(1)} &\leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)} \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{\alpha-(n+1)}\,dy \\
&\leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(\overline{x})} \|y - \overline{x}\|^{\alpha-n-1}\,dy \\
&\leq |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)} \int_\delta^\infty \left(\int_{S^{n-1}} r^{\alpha-n-1}do(\xi)\right) r^{n-1}dr \\
&= |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)}\,\omega_n \int_\delta^\infty r^{\alpha-2}dr = |f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)}\,\frac{\omega_n}{1-\alpha}\,\|x - x'\|^{\alpha-1} \\
&\leq K_1(R, f)\,\|x - x'\|^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

für eine passende Konstante $K_1(R, f)$. Im dritten Schritt dieser Abschätzung sehen wir die Notwendigkeit für die Einschränkung von α auf $(0, 1)$. Damit ist $\alpha - 2 < -1$ und somit das Integral beschränkt. Bei diesen Schritten haben wir wiederum den Transformationssatz 2.8 verwendet.
Für $S_1^{(2)}$ verwenden wir die lokale Hölderstetigkeit von f in $\overline{G}$. Damit gilt $\frac{|f(\overline{x})-f(x')|}{\|\overline{x}-x'\|^{\alpha}} \leq$

$|f|_{C^{0,\alpha}(B_{3R}(x_0))} < \infty$. Weiters ist $\|\overline{x} - x'\|^\alpha = \left\|\frac{1}{2}(x + x') - x'\right\|^\alpha = \frac{1}{2}\|x - x'\|^\alpha$. Damit bekommen wir für $S_1^{(2)}$:

$$S_1^{(2)} \leq \frac{1}{2}|f|_{C^{0,\alpha}(B_{3R}(x_0))} \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\, dy\, \|x - x'\|^\alpha .$$

Betrachten wir $\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\, dy$. Durch eine ähnliche Rechnung wie in der Abschätzung von $S_1^{(1)}$ erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes 2.8:

$$\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y - \overline{x}\|^{-(n+1)}\, dy \leq \omega_n \frac{1}{\delta} = \omega_n \|x - x'\|^{-1} .$$

Damit folgt für $S_1^{(2)}$:

$$S_1^{(2)} \leq \frac{\omega_n}{2}|f|_{C^{0,\alpha}(B_{3R}(x_0))}\|x - x'\|^{\alpha-1} = K_2(R,f)\|x - x'\|^{\alpha-1} .$$

Fügen wir die Abschätzungen von $S_1^{(1)}$ und $S_1^{(2)}$ zusammen, erhalten wir für S_1:

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq C\|x - x'\|\left(K_1(R,f) + K_2(R,f)\right)\|x - x'\|^{\alpha-1} \\ &\leq \tilde{C}_{4,6}(R,f)\|x - x'\|^\alpha \end{aligned}$$

für eine passende Konstante $\tilde{C}_{4,6}(R,f)$.
Als nächstes wollen wir das Integral S_2 passend abschätzen. Dafür wissen wir bereits, dass folgende Identität gilt:

$$P_{ij}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n}\right).$$

Weiters soll der Gaußsche Integralsatz 2.7 verwenden werden. Vorerst zeigen wir, dass die Voraussetzungen erfüllt sind. Laut Voraussetzung ist G ein Normalgebiet. Des Weiteren ist $\overline{B_\delta(\overline{x})} \subset G$ und daher auch $G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}$ ein Normalgebiet. Die Funktion $y \to P_{ij}(x,y)$ ist stetig differenzierbar in diesem Normalgebiet und stetig am Rand. Auf dem Normalgebiet $G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}$ gilt, dass $-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\right)$ für $i \in \{1, ..., n\}$ beschränkt ist. Damit erhalten wir insbesondere,
dass $\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}}\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}\right)\right| < \infty$ ist. Wir bekommen aus diesen Überlegungen und dem Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} \int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)dy &= -\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n}\right) dy \\ &= -\int_{\partial G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n} s_j(y) do(y), \end{aligned}$$

wobei $s(y)$ die äußere Normale bezüglich dem Normalgebiet $G \setminus \overline{B_\delta(\overline{x})}$ ist. Wir wollen zeigen, dass das Integral $\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)dy$ durch eine Konstante beschränkt ist. Wir verwenden, dass auf diesem Normalgebiet $\|y-x\| \geq \frac{1}{2}\|y-\overline{x}\|$ gilt. Wir betrachten:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)dy\right| &\leq \int_{\partial G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|x-y\|^{1-n}|s_j(y)|\,do(y) \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\int_{\partial G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} \|y-\overline{x}\|^{1-n}\,do(y) \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\int_{\partial G} \|y-\overline{x}\|^{1-n}\,do(y) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\int_{\partial B_\delta(\overline{x})} \|y-\overline{x}\|^{1-n}\,do(y) \\
&= T_1 + T_2.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun diese beiden Integrale abschätzen. Wir beginnen mit T_1: Wir wissen, dass $\|y-\overline{x}\| \geq R > 0$ für $y \in \partial G$ und ∂G eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ ist. Die Funktion $y \to \|y-\overline{x}\|^{1-n}$ ist stetig auf ∂G. Damit nimmt sie Ihr Maximum auf ∂G an. Somit gibt es ein $M \geq 0$, so dass $\|y-\overline{x}\| \leq M$ für alle $y \in \partial G$ ist. Damit bekommen wir nun:

$$T_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} M \int_{\partial G} 1do(y) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\hat{M}$$

mit einer passenden Konstante $\hat{M} > 0$. Für T_2 gehen wir folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned}
T_2 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\delta^{1-n}\int_{\partial B_\delta(\overline{x})} 1do(y) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\delta^{1-n}\int_{S^{n-1}} 1do(\xi)\delta^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}\omega_n.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir den Transformationssatz 2.8 für Randintegrale verwendet. Da wir jetzt eine passende Konstante gefunden haben, erhalten wir damit endgültig das gewünscht Resultat:

$$\begin{aligned}
|S_2| &\leq \left|\int_{G\setminus\overline{B_\delta(\overline{x})}} P_{ij}(x,y)dy\right| \frac{|f(x)-f(x')|}{\|x-x'\|^\alpha}\|x-x'\|^\alpha \\
&\leq \hat{C}_{4,6}(R)\,|f|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{B_{3R}(x_0)}\right)}\|x-x'\|^\alpha \\
&\leq \hat{C}_{4,6}(R,f)\,\|x-x'\|^\alpha.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Summe der Integrale:

$$|I_4 + I_6| \leq C_{4,6}(R,f)\,\|x-x'\|^\alpha.$$

Fügen wir alle Abschätzungen der Integrale $I_1, ..., I_6$ zusammen, erhalten wir für $x, x' \in B_R(x_0)$

$$\left|w_{x_i x_j}(x) - w_{x_i x_j}(x')\right| \leq K(R, f) \left\|x - x'\right\|^{\alpha}$$

für eine passende Konstante $K(R, f) \geq 0$. Da $x_0 \in G$ beliebig war, erhalten wir die Hölderstetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen des Newtonpotentials in G. Wie am Beginn des Beweises erwähnt, erhalten wir mit dem Lemma 3.6 die lokale Hölderstetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen des Newtonpotentials. □

Bemerkung 3.13. Wir können den Satz 3.12 auch anders formulieren. Dabei genügt es, dass $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist. Dafür benötigen wir stärkere Voraussetzungen an die triviale Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f : G \to \mathbb{R}$ auf eine Menge G_0 mit $G \subset G_0$ (wie in Satz 3.9). Um den Beweis des Satzes führen zu können, benötigen wir $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G_0}\right)$. Das bedeutet, f muss auf ∂G null sein. Dies stellt eine Einschränkung der rechten Seiten der inhomogenen Poissongleichung dar. Der Satz könnte nun alternativ folgendermaßen formuliert werden:

Satz 3.14. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^{0,\alpha}(G)$ mit $\alpha \in (0,1)$, $\sup_G |f(y)| < \infty$. Für die triviale Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf eine Menge $G_0 \supset G$ gelte, $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G_0}\right)$. Dann ist $w \in C^{2,\alpha}(G)$.*

Der Beweis dieses Satzes kann beinahe analog wie der Beweis des Satzes 3.12 geführt werden.

Aus den bisherigen Resultaten, welche wir uns über das Newtonpotential erarbeitet haben, sowie Resultaten aus der Vorbereitung, können wir nun einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz formulieren.

Satz 3.15. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet beschränkt mit nur regulären Randpunkten, $g \in C^0(\partial G)$, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{G}\right)$ mit $\alpha \in (0,1)$ und $\sup_G |f(y)| < \infty$. Dann existiert genau eine Funktion $u \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$ mit*

$$-\Delta u = f \text{ in } G \text{ und } u = g \text{ auf } \partial G. \tag{3.17}$$

Beweis. Es sei u_1 das Newtonpotential zu f. Dann bekommen wir mit den Sätzen 3.2, 3.9, 3.12 und mit der Folgerung 3.11: $u_1 \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$ und u_1 löst die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u_1 = f \text{ in } G.$$

Insbesondere gilt, dass u_1 auch in $C^0(\partial G)$ ist. Wir setzen jetzt $\psi = g - u_1 \in C^0(\partial G)$. Nun lösen wir mit Satz 2.22 das Randwertproblem bezüglich ψ (Voraussetzungen sind erfüllt) und erhalten eine eindeutige Lösung $u_2 \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^2(G)$ mit:

$$-\Delta u_2 = 0 \text{ in } G \text{ und } u_2 = \psi \text{ auf } \partial G.$$

Wir erkennen, dass die Lösung u_2 harmonisch in G ist. Aus der Analysis wissen wir, dass harmonische Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Damit sind insbesondere die zweiten Ableitungen von u_2 wiederum stetig differenzierbar. Weiters erfüllen stetig differenzierbare Funktionen eine lokale Lipschitz-Bedingung und sind somit insbesondere hölderstetig, also $u_2 \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$ ist. Wir setzten jetzt $u = u_1 + u_2 \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$. Damit gilt:

$$-\Delta u = f \text{ in } G \text{ und } u = u_1 + g - u_1 = g \text{ auf } \partial G.$$

Das heißt, u ist eine Lösung von (3.17). Wir müssen noch die Eindeutigkeit der Lösung in $C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$ zeigen. Angenommen, es existiert eine weitere Lösung $\tilde{u}$ von (3.17) in $C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$. Wir definieren $F(x) := u(x) - \tilde{u}(x)$. Es gilt, dass $F \in C^0\left(\overline{G}\right) \cap C^{2,\alpha}(G)$, da u und $\tilde{u}$ diese Eigenschaft haben. Insbesondere ist $F \in C^2(G)$ nach Lemma 3.8. Die Funktion F löst das folgende Randwertproblem:

$$\Delta F = 0 \text{ in } G \text{ und } F = 0 \text{ auf } \partial G.$$

Somit ist F in G harmonisch. Jetzt können wir das schwache Maximumsprinzip 2.19 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \min_{\overline{G}} F &= \min_{\partial G} F = 0 \\ \max_{\overline{G}} F &= \max_{\partial G} F = 0. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \overline{G}$ gilt damit $F(x) = 0$ und damit $F = 0$ auf $\overline{G}$. Damit erhalten wir $u = \tilde{u}$ und somit die Eindeutigkeit der Lösung. □

Literatur

[1] Dziuk, G. *Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen.* De Gruyter, 2010.

[2] Gilbarg, D.; Trudinger, N. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 2001.

[3] Heuser, H. *Lehrbuch der Analysis Teil 2.* Vieweg+Teubner, 2008.

[4] Jost, J. *Partial differential equations.* Springer, 2002.

[5] Königsberger, K. *Analysis 1.* Springer, 1999.

[6] Königsberger, K. *Analysis 2.* Springer, 2003.

[7] Lettl, G. *Vorlesungsskriptum Analysis 1.* 2008.

[8] Lettl, G. *Vorlesungsskriptum Analysis 2.* 2009.