Ein Präsenz-Brückenkurs als Einstiegshilfe in ein Mathematikstudium an der Karl-Franzens-Universität Graz

Von der Analyse der Problemfelder bis zur Evaluierung des Kurses

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Magisters der Naturwissenschaften

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von

Martin GLATZ

am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

Begutachter: Ao.Univ.-Prof. Dr.phil. Bernd Thaller

Graz, 2013

Abstract

An In-Class Bridging Course for the Transition from School Mathematics to Mathematics at the University of Graz

A General Approach—From Analysis of Problem Areas to the Evaluation of the developed Course.

Starting a mathematics program (teachers' training or bachelor) at the University of Graz frequently turns out to be very challenging for freshmen. This results in discontent among students, poor accomplishments in classes and a high dropout rate.

Thus in this diploma thesis an in-class bridging course will be developed, presented and evaluated. The development starts with an analysis of the curricula (of both school and university) to point out the problem areas and is refined with personal experience to determine the aims of this course. The content of this course includes the repetition and extension of knowledge achieved in school, the introduction to scientific mathematics and some typical problems of 1st semester classes. The teaching and learning methods of the course are: a lecture-part, a self-study-part to work on homework-problems and a part for checking solutions in the class. Thereby, the students are additionally introduced to the "didactic contract" at university level.

For evaluation of the already applied concept a pre- and a post-test, questionnaires at the end of the course and the end of the 1st semester and grades in 1st semester classes were used.

In spite of good grades in school the participating students showed a lack of mathematical skills, which they couldn't completely acquire within two weeks of attending the course, with some aspects (proofs, transferring theory to homework problems) remained problematic. Nevertheless, students claimed the course to be useful and well prepared. Students attending the developed course received better grades in 1st semesters classes than than the students that did not. They also showed less problems concerning motivation and finding sense in academic mathematics. In conclusion, this bridging course is to be recommended to support students before and in their first semester as mathematics undergraduates.

Kurzfassung

Ein Präsenz-Brückenkurs als Einstiegshilfe in ein Mathematikstudium an der Karl-Franzens-Universität Graz

Von der Analyse der Problemfelder bis zur Evaluierung des Kurses

Der Einstieg in ein Mathematikstudium (Lehramt für Höhere Schulen bzw. Bachelor Fachwissenschaft) gestaltet sich für viele Studierende an der Uni Graz schwierig – schlechte Leistungen in Lehrveranstaltungen, hohe Abbruchquoten sowie Unzufriedenheit unter den Studierenden sind die Folge.

In dieser Arbeit wird daher ein Konzept für einen Präsenz-Brückenkurs vor Studienbeginn entwickelt, im Detail vorgestellt und evaluiert. Ausgehend von Curricula-Analysen von Schule und Hochschule werden Problemfelder charakterisiert, durch Erfahrungen des Autors ergänzt und daraus Ziele für einen Brückenkurs formuliert. Das ganzheitliche Konzept wiederholt Schulwissen, baut dieses tragfähig aus, führt in die wissenschaftliche Mathematik ein und thematisiert typische Probleminhalte des 1. Semesters. Die Abhaltungsform besteht aus einem Vorlesungsteil, einem Selbststudienanteil zum Bearbeiten der Aufgaben sowie einem Übungsteil zur Kontrolle der Lösungen. Damit wird auch auf den »didactic contract« des Studiums vorbereitet.

Die Evaluierung des Brückenkurses erfolgte durch einen Orientierungs- und Abschlusstest, durch Fragebögen am Kursende und am Semesterende sowie durch die Noten bei Lehrveranstaltungen des 1. Semesters.

Trotz (sehr) guter Schulnoten verfügten die Teilnehmenden über mangelhafte Kompetenzen, die nicht alle durch den zweiwöchigen Kurs ausgebessert werden konnten. Einige Aspekte des Studieneinstiegs blieben auch im Lauf des ersten Semesters problematisch (Beweise, Übertragen von Theorie auf Aufgaben). Nichtsdestotrotz wurde das Konzept des Kurses von den Studierenden zu jedem Zeitpunkt als sinnvoll und gut vorbereitend empfunden. Die Brückenkursteilnehmenden schnitten bei Lehrveranstaltungen durchwegs besser ab als Nichtteilnehmende und zeigten weniger Probleme mit Motivation und Sinnstiftung. Der entwickelte Brückenkurs stellt somit eine sinnvolle Maßnahme zur Unterstützung beim Studieneinstieg dar.

Inhalt

Vorwort und Danksagung

Es war sehr schön, es hat mich sehr gefreut!
(Standardspruch von Franz Joseph I.)

Das Studium der Mathematik war bis jetzt mein herausforderndster Lebensabschnitt, aber auch mein spannendster, schönster und unterhaltsamster. Das Studium habe ich zunächst gewählt, nicht weil es mich brennend interessiert hat, sondern weil mir Mathematik in der Schule leicht gefallen ist. Gott sei Dank hat sich das geändert – nicht das »leichtfallen«, sondern das »nicht wirklich interessieren«. Und genauso, wie ich an den Inhalten interessiert bin, bin ich am Vermittlungsprozess bzw. Aneignungsprozess interessiert.

Dass nicht alle mit ihrem Mathematik-Studium so glücklich waren wie ich, ist mir nicht entgangen – meine Motivation, zu unterstützen, wo es nur geht, wurde geweckt.. Und so führte mein Weg über Tutorenstellen, über die Studienvertretung bis hin zum Verantwortlichen für einen Brückenkurs. Das Vertrauen, das mir entgegengebracht wurde, habe ich hoffentlich erfüllt. Und wenn alle bei meinen Tätigkeiten im Laufe des Studium nur annähernd so viel profitiert haben, wie ich dabei Spaß hatte, darf ich zufrieden sein.

Es bleibt mir jenen zu danken, die mich durch das Studium begleitet haben, die mich motiviert haben, die mir Möglichkeiten zur Entfaltung und Selbstverwirklichung gegeben haben, aber auch jenen, die meine Freizeit bereichert haben (Fußball) – und mein »Privatleben« (also selbstverständlich auch meine Familie und meine engeren Freunde und Freundinnen).

Namentlich erwähnen möchte ich meinen Betreuer – man ist geneigt, »Mentor« zu sagen – Bernd Thaller, der mich ab meinem ersten Semester begleitet hat. Ich danke für das Vertrauen und die Zusammenarbeit.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

Graz, am 14. August 2013

(Martin Glatz)

Abkürzungsverzeichnis

Die folgende Auflistung gibt einen Überblick der wichtigsten in dieser Arbeit vorkommenden Begriffe, Akronyme, Abkürzungen und Formelzeichen:

	Abkz.	**Erklärung**
A	AHS	Allgemeinbildende Höhere Schulen
B	Bac	Bachelor (Fachwissenschaft)
	BHS	Berufsbildende Höhere Schulen (HTL, HLW, HAK)
	BK	Brückenkurs
	BORG	Oberstufenrealgymnasium
	Bsp/Bspe	Beispiel/Beispiele (Übungsaufgaben)
E	ECTS	Leistungspunkte im European Credit Transfer System
G	Gym	Gymnasium
H	HAK	Handelsakademie
	HLW	Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe
	HTL	Höhere Technische Lehranstalt
L	LA	Lehramt (z. B LA-Studierende)
	LV	Lehrveranstaltung
Ö	ÖH	Österreichische HochschülerInnenschaft
P	P & P	paper and pencil (Fragebogen in Papierform)
	PS	Lehrveranstaltungstyp Proseminar (siehe UE)
S	SoSe	Sommersemester
	SSt	Semesterwochenstunde (1 SSt = 45 Minuten pro Woche im Semester)
	StV	Studienvertretung (»Fachschaft«)
U	UE	Lehrveranstaltungstyp Übung
	UGO	Uni Graz Online - Onlinesystem der Uni Graz (LV-Anmeldungen etc.)
	Uni	Universität (z. B. Uni Graz: Karl-Franzens Universität Graz)
V	V.I.	Vollständige Induktion
	VO	Lehrveranstaltungstyp Vorlesung
	VU	Lehrveranstaltungstyp Vorlesung mit Übung
W	WS	Wintersemester

1. Einleitung

»Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt.«
(Edmund Landau, Zahlentheoretiker, (1877-1938)
(zitiert nach [1], S.142)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Problematik des Studieneinstieges in Mathematik-Studien mit Fokus auf das Lehramtsstudium Mathematik für Höhere Schulen an der Karl-Franzens Universität Graz, im Folgenden Uni Graz genannt. Davon ausgehend wird ein Konzept für einen Brückenkurs entwickelt, der im Wintersemester 2012/13 umgesetzt wurde. Abschließend wird untersucht, inwiefern das Konzept des Brückenkurses die Problemfelder sinnvoll behandelt hat und inwiefern sich Auswirkungen bei den Teilnehmenden des Brückenkurses feststellen lassen. Dazu werden sowohl fachliche Tests im Kurs als auch Fragebögen am Beginn sowie am Ende des ersten Semesters eingeholt. Darüber hinaus werden die Lehrveranstaltungsleistungen der Teilnehmenden mit den Leistungen der anderen Studierenden am Ende des ersten Semesters verglichen.

1.1. Problemfelder beim Studieneinstieg in ein Mathematik-Studium

Über Probleme im Zusammenhang mit Mathematik und dem Studienbeginn wird oft (und auch schon seit langem[1]) berichtet: Neben Ingenieursstudien mit hohen Mathematikanteilen sind besonders Studien der Fachwissenschaft Mathematik und des Höheren Lehramts davon betroffen. Lehrende klagen über fachlich schwache Leistungen und wenig Anstregungsbereitschaft, Studierende über zu hohe Anforderungen und wenig Rücksicht der Lehrenden. Es gibt etliche (auch internationale) Arbeiten[2], die sich dieser Problematik angenommen haben um die Ursachen zu eruieren. Zum Teil fehlen allerdings empirische Untersuchungen im deutschsprachigen Raum.[3] Als wesentlicher Aspekt wird der Charakter der akademischen Mathematik[4] und das notwendige *advanced mathematical thinking* (siehe [11]) festgehalten, wodurch unter Umständen nur wenig Gemeinsamkeiten mit der Schulmathematik gegeben sind. Oft werden zwar Gegenmaßnahmen gesetzt (etwa die Calculus-Reform und darauf aufbauende Konzepte in den USA, vgl. etwa [12] S.291ff), ohne jedoch von Forschungsergebnissen auszugehen und ohne deren Wirksamkeit zu untersuchen. Andere Reformen versuchen die Studieneingangsphase zu überarbeiten [13].[5]

1.2. Brückenkurse als Unterstützungsmaßnahme

Eine der Unterstützungsmaßnahmen, die an vielen deutschsprachigen Universitäten und Fachhochschulen bereits seit Jahren umgesetzt ist, ist ein Brückenkurs (auch Vorkurs genannt) vor dem eigentlichen Studienbeginn. Dieser stellt eine Chance dar, »angehende Studierende in die aus der Schule kaum

1 Schon Felix Klein stellte 1908 fest, dass der Eintritt in ein Mathematik-Lehramtsstudium sowie der Wiedereintritt in die Schule zwei wesentliche Sprünge im Hinblick auf die behandelte Mathematik darstellen. (Zitiert nach [2], S.1-2).
2 Vergleiche beispielsweise international [3, 4], für den deutschsprachigen Raum etwa [5, 6, 7], für den europäischen [8, 9].
3 Feststellung von Fischer, Heinze und Wanger in [10], S.258
4 Gemeint ist hier »undergraduate mathematics«, und nicht die Mathematik als Forschungsgegenstand an sich.
5 Einführung von Zusatzangeboten im Sinne von Lernbetreuung, Neuorientierung von Lehrveranstaltungen, besondere Übungs- und Aufgabenformate usw. sind weitere Maßnahmen, die gesetzt werden. Diese Maßnahmen werden in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt, auch wenn die Analyse der Problemfelder in Teil I und II Hinweise zu deren Zielen und Inhalten liefern kann.

bekannten Charakteristika und Arbeitsweisen der akademischen Mathematik [...] einzuführen und somit den Übergang von der Schule an die Hochschule zu erleichtern.«[10], S.301.

Neben reinen Online-Brückenkursen[6], bei denen die Studierenden nur vom PC aus mathematische Theorie und Übungsaufgaben durcharbeiten, gibt es sogenannte Blended-Learning-Kurse (Kombination von Online- und Präsenzangeboten)[7] sowie Brückenkurse, die nur aus Präsenzanteilen bestehen (vgl. [17]). Die Kursdauern sind sehr unterschiedlich, zweiwöchige Angebote sind ebenso üblich wie ganzjährige (Online-)Angebote (vgl. [17]). Bzgl. der Abhaltungsformen gibt es sowohl typische Vorlesungen, als auch Kleingruppentutorien im Sinne einer Nachhilfegruppe. Häufiges Ziel ist das Ausgleichen von bestehenden Defiziten aus der Schulzeit durch Behandlung von Schulstoff der Sekundarstufe I (Unterstufe, 10 - 14 Jahre) und II (Oberstufe, 14 - 19 Jahre) – vor allem bei Brückenkursen für Ingenieursstudien. Brückenkurse für Mathematikstudien versuchen auch Aspekte universitärer Mathematik, etwa Beweisen und Beweisführung, zu behandeln (vgl. z. B. [18]).

Über die Wirkung dieser Angebote gibt es vor allem für Mathematikstudien kaum empirische Ergebnisse, obwohl subjektive Rückmeldungen meist positiv sind (vgl. [17]). Brückenkurse für Ingenieursstudienrichtungen zeigen, dass Studierende durchaus Lücken und Rückstände ausgleichen können.[8] Oft wird die subjektive Zufriedenheit der Studierenden als Erfolgsindikator genommen, zum Teil auch die Klausurergebnisse nach dem ersten Semester (vgl. [19]).

Das Gründen eines Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm, eröffnet 2011)[9] zeigt, dass mathematikbezogene hochschuldidaktische Forschung zunehmend versucht, die Probleme (organisiert) in Angriff zu nehmen, was die Arbeitstagungen »Vor- und Brückenkursen«[10] (November 2011) sowie »Mathematik im Übergang Schule/Hochschule«[11] (Februar 2013) zeigen.

1.3. Forschungsfragen

> Welche Problemfelder zeigen sich beim Einstieg in ein Mathematik-Studium (Lehramt für Höhere Schulen oder Bachelor Fachwissenschaft an der Uni Graz) und wie können diese durch einen Brückenkurs entschärft werden?

Es ergeben sich folgende Unterfragen:

i) Über welche (schulischen) Voraussetzungen verfügen die angehenden Studierenden laut Papier? Was wird von den Erstsemestrigen im Lauf des ersten Semesters erwartet?

ii) Woraus begründen sich die Probleme der Erstsemestrigen? Welche Problemfelder können charakterisiert werden?

iii) Welche dieser Problemfelder können im Rahmen eines Brückenkurses vor dem Studium behandelt werden?

iv) Welches Konzept soll ein Brückenkurs haben, um die festgestellten Problemfelder zu entschärfen? Welche Inhalte und Methoden sind dafür zweckmäßig?

v) Wie lässt sich die Wirksamkeit eines Brückenkurses untersuchen? Welche Auswirkungen zeigen sich unmittelbar nach dem Kurs und am Ende des ersten Semesters?

6 Etwa der Online-Mathematik Brückenkurs einiger deutschsprachiger technischer Universitäten, vgl. [14] und [15]
7 Etwa der VEMA Brückenkurs (Virtuelles Eingangstutorium Mathematik) an der Universität Kassel, Paderborn und der TU Darmstadt, vgl. [7] und [16] (S.21-33).
8 So erreichen Brückenkursteilnehmende, die nur einen Grundkurs in der Schule besucht haben, ähnliche Leistungen wie Leistungskurs-SchülerInnen ohne Brückenkurs. [15]
9 »Das KHDM verfolgt das Ziel, wissenschaftliche Grundlagen einer fachbezogenen Hochschuldidaktik in mathematikhaltigen Studiengängen zu entwickeln« vgl. [20].
10 Der erst unlängst erschienene Tagungsband [21] konnte aufgrund seines erst kurzfristigen Erscheinens noch nicht in die vorliegende Arbeit einbezogen werden.
11 Es ist ebenfalls wieder ein Tagungsband in Arbeit.

1.4. Beitrag zur wissenschaftlichen Forschung

Es gibt bislang relativ wenige, punktuelle empirische Studien, die nur einige Problemfelder bzgl. der Herausforderung vom Übergang Schule-Hochschule aufdecken. Darauf aufbauend besteht Forschungsbedarf nicht nur hinsichtlich der kognitiven Anforderung, sondern vielmehr auch hinsichtlich affektiver und behavioraler Faktoren (Motivation, Selbstregulation, Selbstkonzept). Daneben sind Studien erforderlich, die Studienleistung und allgemeine Denkfähigkeiten (inkl. metakognitiven Strategien[12]) in Zusammenhang bringen. Untersuchungen sind wünschenswert, die Lernvoraussetzungen von Schülern bzw. Studierenden feststellen, um daran anknüpfend tragfähige Konzepte zu entwickeln. Auch die didaktisch-methodischen Fähigkeiten der Lehrenden gehören untersucht. [10] S.266-267

Obwohl nicht im Hauptaugenmerk dieser Arbeit, können doch Beiträge zu Fragen wie diesen gegeben werden: Die Eingangvoraussetzungen der Mathematik-Studierenden werden anhand eines Orientierungstest (50 Teilnehmende) sowie der Schulnoten erhoben. Typische Probleme und Schwierigkeiten am Studienbeginn zeigen sich auch beim Abschlusstest des Brückenkurses. Viele Kommentare und Rückmeldungen der Erstsemestrigen wurden durch den Fragebogen erfasst, es zeigen sich weitgehend die erwarteten Probleme.

Die wesentliche wissenschaftliche Leistung der vorliegenden Arbeit liegt darin, den Weg von den Lehr- und Studienplänen bis zur konkreten Umsetzung des Brückenkurses aus einer didaktischen Perspektive zu entwickeln. Die Vorgangsweise kann auf andere Standorte und Voraussetzungen problemlos adaptiert werden. Daneben wird sich in dieser Arbeit zeigen, in wie weit es Sinn macht, sich in einem Brückenkurs nicht nur auf die Wiederholung von Schulwissen zu beschränken. Zudem wird sich zeigen: Auch an den Universitäten sollte das didaktische Dreieck nicht »entartet« sein, sondern aus Lehrenden – Lernenden – Inhalt bestehen. Überspitzt formuliert: Der »didaktische Punkt«[13], also allein der Fokus auf den Inhalt (als entartetes didaktisches Dreieck) kann universitäres Lernen nicht adäquat beschreiben, wie es Studierende erleben. Die Rolle der Lehrenden ist nicht zu unterschätzen.

1.5. Aufbau dieser Arbeit

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit orientiert sich im Wesentlichen an den zuvor genannten Forschungsfragen:

- In Teil I »Curricula-Analyse« wird ausgehend vom Lehrplan der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) untersucht, über welche Kenntnisse Studierende dieses Schultyps verfügen sollten und welche Mathematik in der Schule betrieben werden sollte. Daneben wird die Mathematik an der Uni Graz dargestellt, wie sie im ersten Semester im Lehramtsstudium und im Bachelor-Fachstudium betrieben wird. Davon ausgehend werden konzeptbedingte Problemfelder eingegrenzt und durch Ergebnisse aus der Literatur ergänzt.
- In Teil II »Empirische Analyse der Studieneinstiegsproblematik« wird konkreter auf die Situation an der Uni Graz eingegangen und die (zu erwartenden) Probleme differenzierter betrachtet. Die drei Eckpfeiler dieser Analyse sind: Statistiken der Uni Graz, der fachliche Einblick als Tutor sowie der Erfahrungsschatz als Studienvertreter.
- In Teil III »Entwicklung und Implementierung des Brückenkurs-Konzepts« werden die in den ersten beiden Teilen aufgeworfenen Probleme und Ziele für einen Brückenkurs in einer Zielbeschreibung des Kurses strukturiert. Die Rahmenbedingungen des Wintersemesters (WS) 2012/13 an der Uni Graz führen dann zu konkreten Beschreibungen und Begründungen des 2012/13 abgehaltenen Kurses im Hinblick auf umgesetzte Ziele, verwendete Methoden sowie behandelte Inhalte.

12 Das sind Strategien der Lernenden, die unmittelbar in Lernprozessen als Kontroll-, Regulations- und Planungsmechanismen eingesetzt werden. Im Hinblick auf mathematische Aktivitäten etwa Mechanismen zur Überprüfung, ob bzw. wann ein selbst verfasster Beweis als korrekt angesehen wird.

13 Eine Wortneuschöpfung in dieser Arbeit

- Teil IV »Evaluierung des Brückenkurses« beschreibt die unternommenen Maßnahmen zur Messung der Zielerreichung des Kurses in ihrer zeitlichen Reihenfolge. Parallel dazu werden die Ergebnisse der Maßnahmen dargestellt, Unterschiede zwischen Brückenkursteilnehmenden und Studierende, die daran nicht teilgenommen haben, interpretiert.
- In Teil V »Resümee« werden die Ergebnisse dieser Arbeit strukturiert zusammengefasst und im Hinblick auf die Forschungsfragen der Einleitung diskutiert. Daneben wird ein Ausblick auf Verbesserungsvorschläge für den Kurs sowie auf weiterführende Forschung gegeben.
- Im Anhang finden sich noch die gesammelten Übungsaufgaben zum Brückenkurs, sowie einige Fragebögen, die Brückenkursbeschreibung und das Vorwort vom Skriptum zum Kurs.

1.6. Lesehinweise

Abschließend noch einige Lesehinweise: Jeder Teil und jedes Kapitel beginnt dabei grundsätzlich mit einem kurzen Überblick.

Blau umrahmt sind Übungsbeispiele und Aufgaben

Gelb umrahmt sind Ziele, die ein Brückenkurs verfolgen kann bzw. soll.

Namen von Lehrveranstaltungen wie *Höhere Mathematik I* sind kursiv geschrieben, ebenso fachdidaktische Ausdrücke, die nicht übersetzt wurden, beispielsweise *didactic contract*.

Bei Zitaten aus den Online-Fragebögen, die im Rahmen dieser Arbeit ausgewertet wurden oder die der Autor im Rahmen seiner Tätigkeit als Studierendenvertreter durchgeführt hat, sind Rechtschreib- und Grammatikfehler aufgrund der besseren Lesbarkeit korrigiert worden.

Die vorliegende Arbeit hat einen umfassenden Anspruch, der dem ganzheitlichen Konzept geschuldet ist. Die Entscheidung dafür liegt auf der Hand: Zuviel-Geschriebenes kann übersprungen werden – Nicht-Geschriebenes kann dagegen nicht gelesen werden. Es ist vielleicht zu erwarten, dass nicht immer alle Details von Interesse sein werden. Es folgt daher eine Leseempfehlung:

Das theoretische Grundgerüst wird in folgenden Abschnitten abgehandelt:

- *didactic contract* in Abschnitt 4.1
- *epistemoligical* und *didactic obstacles* in Abschnitt 4.5
- die *APOS*-Theorie in Abschnitt 6.3.1
- *concept definition* und *concept image* in Abschnitt 6.3.2
- *beliefs* und *belief overhangs* in Abschnitt 7.3.1
- *process*, *concept* und das *procept*-Modell in Abschnitt 12.8

Eine Übersicht der Problemfelder findet sich in Abschnitt 4.7, einen Überblick der Ziele, die ein Brückenkurs als Antwort darauf haben sollte, in Kapitel 8. Ansonsten ist es wohl am sinnvollsten, jeweils die Einleitung der jeweiligen Kapitel zu lesen.

Teil I.

Curricula-Analyse

»Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.«
(deutsches Sprichwort)

Dieser Teil der Arbeit befasst sich mit den Unterschieden zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik.[14]

- In Kapitel 2 »Mathematik an der AHS« wird die Mathematik in der Schule anhand des gültigen Lehrplanes der AHS (Allgemeinbildende Höhere Schulen) als typische Vertreterin einer Schule mit Reifeprüfung analysiert – im Fokus stehen Ziele, Methoden und Inhalte.
- Analog dazu erfolgt in Kapitel 3 »Mathematik an der Uni Graz« die Analyse der Hochschulmathematik anhand der jeweiligen Studienpläne an der Uni Graz. Schwerpunkt bildet dabei das Lehramtsstudium für Höhere Schulen. Inhaltlicher Fokus liegt auf dem ersten Semester.
- Im Kapitel 4 »Unterschiede und konzeptbedingte Problemfelder« werden die Erkenntnisse aus den Kapiteln 2 und 3 einander gegenübergestellt, wodurch sich Unterschiede und Problemfelder beim Studieneinstieg eröffnen. Parallel dazu werden bereits Ziele formuliert, die eine Unterstützungsmaßnahme am Studienbeginn, primär ein Brückenkurs, verfolgen kann.

14 Damit ist die Mathematik in »echten« Mathematikstudien gemeint, also dem Bachelorstudium Fachiwssenschaft bzw. dem Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik für Höhere Schulen. Darüber hinaus ist damit nicht die Mathematik als Forschungsgegenstand der WissenschafterInnen gemeint, sondern die Mathematik als Lerngegenstand in Lehrveranstaltungen.

2. Mathematik an der AHS

Dieses Kapitel behandelt Schulmathematik ausgehend von einer Analyse des Lehrplans [22] (intendiertes Curriculum[1]) in der Allgemeinbildenden Höheren Schule (AHS)[2] der Oberstufe[3].

Da das intendierte Curriculum nur den für die Lehrkräfte umzusetzenden Idealplan (Vorgabe des Bildungssystems) darstellt – und die Unterrichtsrealität davon abweichen kann und wird –, wird zusätzlich noch das von den Lehrkräften implementierte Curriculum einbezogen – also die konkrete Umsetzung des intendierten Curriculums auf der Ebene des Klassenzimmers (siehe [23], S.22). Es ist klar, dass Lehrkräfte etwa durch die Auswahl der konkreten Inhalte noch einen bedeutenden Beitrag dazu liefern. Das Thematisieren des implementierten Curriculums geschieht durch den Einbau von Erfahrungswissen[4], wobei – unvermeidbar – gleichzeitig Eindrücke vom realisierten Curriculum[5] erhalten werden.

Zunächst werden die grundlegenden Ansprüche Konzepte und Zugänge zur Schulmathematik – und damit die verfolgten Ziele – dargestellt, danach folgt ein kurzer Abriss, welche Lernformen und Methoden im schulischen Mathematikunterricht eingesetzt werden. Zuletzt werden noch die in der AHS-Oberstufe behandelten Inhalte dargestellt, sofern sie für die vorliegende Arbeit relevant sind.

2.1. Aspekte und Ziele von Schulmathematik

Die in der Schule praktizierte Mathematik steht in einem engen Zusammenhang mit den als wünschenswert festgesetzten Zielen[6] der Allgemeinbildung in der AHS-Oberstufe. Durch die Darstellung der Ziele des Mathematikunterrichts werden somit Ansprüche an Schulmathematik offenkundig.

2.1.1. Ziele und Bildungsbereiche

Die Ziele des Mathematikunterrichts an Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) in Österreich sind laut Lehrplan zunächst sehr breit und vage gehalten, was dem allgemeinbildenden Ziel[7] dieses Schultyps Rechnung trägt:

> »Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen.«
>
> »Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von

1 Das intendierte Curriculum ist die institutionalisierte Form dessen, was die SchülerInnen in einem Fach lernen sollen – also der Lehrplan an sich, vgl. [23], S.22.
2 Da rund 2/3 der Lehramtsstudierenden Mathematik diesen Schultyp besucht haben, er für die Betrachtung herangezogen.
3 Sekundarstufe II, Altersgruppe der SchülerInnen: 14 bis 18 Jahre. Der Schultyp schließt mit der sogenannten Reifeprüfung (Matura) ab, was dem in Deutschland üblichem Abitur entspricht.
4 Erfahrungen werden aus folgenden Quellen herangezogen: Eigene Unterrichtserfahrungen aus der Schulzeit, Hospitationen während des Studiums in Rahmen von Praktika, Gespräche/Kontakte mit Mitstudierenden und Erstsemestrigen im Rahmen des Studiums und Tutorien, Gespräche mit Studieninteressierten bei Info-Veranstaltungen, Erfahrungen mit NachhilfeschülerInnen.
5 Das realisierte oder erreichte Curriculum ist letztlich das von den SchülerInnen Gelernte.
6 Dahinter »verbirgt« sich somit ein normativer Aspekt.
7 und dem damit verbundenen Humboldt'schen Anspruch nach Autonomie, Mündigkeit und Selbstverwirklichung

> Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.« [22]

Bei der Umsetzung dieser Ziele auf die Inhaltsebene des Unterrichts[8] darf in Frage gestellt werden, in wie weit sich diese Ziele durch die alltägliche, inhaltsorientierte Unterrichtspraxis verwirklichen lassen. Allgemein darf davon ausgegangen werden, dass die Planung von Unterricht großteils inhaltsorientiert geschieht und kaum in einem größeren Rahmen zielgeleitet ist.

In Hinblick auf spätere Probleme beim Umgang mit Beweisen sei hier betont: Erziehung zum analytisch-folgerichtigen Denken wird zwar gefordert, ob das auch großteils im schulischen Alltag umgesetzt wird (und daneben gelingt!), bleibt offen (vgl. Teil II dieser Arbeit).

Der Lehrplan [22] gibt dann für die konkretere Beschreibung und Realisierung der Ziele eine Auflistung von sogenannten Bildungsbereichen[9], wobei der jeweilige Beitrag der Mathematik explizit wird:

- »Sprache und Kommunikation: Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie; neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache«
- »Mensch und Gesellschaft: Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt«
- »Natur und Technik: Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden«
- »Kreativität und Gestaltung: Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden«
- »Gesundheit und Bewegung: Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden«

Es ist davon auszugehen, dass der Beitrag der Mathematik zu diesen Bereichen im schulischen Unterricht den Schülern und Schülerinnen kaum explizit gemacht wird. Es ist zu bezweifeln, dass etwa die Bereiche »Natur und Technik« sowie »Mensch und Gesellschaft« von den SchülerInnen adäquat wahrgenommen werden (können), was dann in Aussagen wie »Wofür brauche ich Mathematik? Warum müssen wir das lernen? Kann man Mathematik nicht auch in der Praxis anwenden?« mündet. Aus fachlicher Sicht kann angemerkt werden, dass viele Anwendungsprobleme (vor allem aus der Physik) deutlich über den Mitteln der schulischen Mathematik liegen.[10]

2.1.2. Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik

Im Zusammenhang mit diesen Bildungsbereichen und der von der Sekundarstufe II im Rahmen eines indendierten Curriculums diskutierten[11] Wissenschaftsorientierung sowie Wissenschaftsprobädeutik[12] muss klar gestellt werden, dass damit nicht die Vorbereitung auf ein späteres, wissenschaftliches Mathematikstudium zu meinen ist – in erster Linie geht es um »vereinfachte Exempla dafür, was Wissenschaften für die Aufklärung von individuell und gesellschaftlich bedeutsamen Lebensproblemen

8 Zur Schwierigkeit der Curricula-Entwicklung vergleiche beispielsweise [24] S. 10 ff). Dort wird ebenfalls auf die Rolle von normativen und deskriptiven Aussage in der Begründung von Zielen im Zuge der üblichen Ziel-Mittel-Argumentation näher eingegangen.
9 Diese sind fächerübergreifend für die AHS-Oberstufe festgelegt.
10 Als Beispiele seien hier erwähnt (Abfolge: fehlender Mathematischer Inhalt $\leftrightarrow$ Anwendungsgebiet): Matrizenrechnung $\leftrightarrow$ Federsysteme; Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ inkl. Differenzierbarkeit $\leftrightarrow$ Vektorfelder, Bewegung von Teilchen im Raum; Mehrdimensionale Integrale $\leftrightarrow$ Flächen- und Volumsmessung, Masse von Körper usw.
11 Vergleiche hierzu etwa [24] S. 15, der diesen Zugang Klafkis näher ausführt.
12 Wissenschaftsprobädeutik bedeutet die Vorbereitung auf Wissenschaft.

leisten können ...«. Sekundär sei die Wissenschaftsorientierung mit einer allgemeinen Studienreife zu verbinden. Die Umsetzung der damit geforderten wissenschaftlichen Arbeitsstufen für die Mathematik sind demnach laut Tietze [24] (S.16)

- Hypothesen entwickeln und überprüfen, Probleme formulieren und lösen;
- Mathematisieren, Modellbilden, Anwenden;
- rationales Argumentieren, Begründen, Beweisen.

Laut Klafki ginge es »dabei nicht (auch nicht in der gymnasialen Oberstufe!) um die verkleinerte Abbildung des Erkenntnisstandes, der in bestimmten Wissenschaften erreicht ist ...« (vgl. [24] S. 15). Nichtsdestotrotz bleibt ein großer Interpretationsspielraum im Hinblick auf das Niveau und die Auswahl der Inhalte im Rahmen der zuvor geforderten Vereinfachung.

Seit Beginn der 2000-Jahre hat in Österreich ein weiterer Aspekt zusehends an Einfluss gewonnen, nämlich das Ziel, das AbgängerInnen von Oberstufen-Schulen fähig sind, mit Experten und Expertinnen der jeweilige Fachgebiete zu kommunizieren, ihnen die richtigen Fragen stellen und ihre Antworten sinnvoll verarbeiten zu können (vgl. [25], S.3). Diese von Fischer ([26]) geforderte »Kommunikationsfähigkeit mit Experten« sei als Ziel für Höhere Schulen anzusehen, wobei die Schulabsolventen als Schnittstelle agieren können sollten. Damit verbunden sind einerseits ein mit Experten und Expertinnen gemeinsames Grundwissen, andererseits aber auch eine notwendige Reflexionsfähigkeit der SchülerInnen.

Im Kontext der zuvor erwähnten Bildungsbereiche wird unmittelbar klar, dass Anwendungsbezug eine wesentliche Rolle im Unterricht zu spielen hat, wenn zielführenden Beiträge zu den Bereichen geleistet werden sollen. Noch bei den letzten Generationen an Schülern und Schülerinnen davon auszugehen, dass sich »die Anwendungsbeispiele meist auf überschaubare Textaufgaben zu Standardmodellen [beschränken], die sich leicht ins reguläre Curriculum einbetten lassen und abgegrenzten methodischen Zwecken dienen« (Blum, zitiert nach [24], S.141). »Der Modellbildungsprozeß als Ganzes, insbesondere wesentliche Komponenten, wie die Rückinterpretation der mathematischen Ergebnisse in die Realität und die Validierung des Modells, erscheinen weiterhin eher unbedeutende Nebenaspekte des MU zu sein.« ([24], S.141). Es ist davon auszugehen, dass sich in den letzten Jahren durch den Beginn der Kompetenzorientierung im österreichischen Mathematikunterricht (vgl. Abschnitt 2.1.4) zunehmend ein Wandel vollzieht, der Aspekte wie Modellieren, Argumentieren und Interpretieren stärker betont als noch in den letzten Jahren.[13]

2.1.3. Aspekte der schulischen Mathematik

Im Lehrplan [22] werden neben den Bildungsbereichen explizit Aspekte der Mathematik dargestellt, die im Unterricht (vermutlich) vorkommen sollen.[14] Die Aspekte sind:

- »Schöpferisch - kreativer Aspekt: Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden«
- »Sprachlicher Aspekt: Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden«
- »Erkenntnistheoretischer Aspekt: Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen«

13 Für die Studierenden, die vor 2013/14 ein Mathematik-Studium begonnen haben, wird dieser Wandel noch nicht durchgehend bemerkbar gewesen sein. Bei Fortbildungen für Lehrer und Lehrerinnen zeigt sich immer wieder, dass die tägliche Unterrichtspraxis im Hinblick auf die Kompetenzorientierung und Standardisierung noch mit Unklarheit und Skepsis behaftet ist. Bis diese neuen Schwerpunkte zum Unterrichtsalltag gehören, wird wohl noch etwas Zeit nötig sein.

14 Im Lehrplan ist nicht fixiert, wie mit diesen Aspekten umgegangen werden soll. Es ist nicht klar, ob diese Aspekte explizit thematisiert werden sollen oder nur implizit im Unterricht beinhaltet sein sollen.

- »Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt: Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder«
- »Autonomer Aspekt: Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess«
- »Kulturell - historischer Aspekt: Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung«

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Gewichtung dieser Aspekte stark von der Lehrkraft abhängig ist, vom persönlichen Interesse, vom mathematischen Selbstverständnis, von Vorlieben für verschiedene Zugänge, usw. Sieht eine Lehrkraft beispielsweise den Mathematikunterricht primär als eine Umsetzung von formaler Bildung, kann davon ausgegangen werden, dass der schöpferisch-kreative Aspekt stärker im Mittelpunkt steht als der kulturell-historische. Analoge empirische Ergebnisse liefert auch Tietze (vgl. [24], S.17):

> »Grob lassen sich vier Gruppen von Lehrern unterscheiden:
>
> - Lehrer, die für eine möglichst einfache und wenig formalisierte Mathematik plädieren
> - solche, die auch von einfachen und anschaulichen Sachverhalten ausgehen, diese dann aber im Verlauf des Kurses hinterfragen und dann exakter und formaler gestalten (›exaktifizierender Ansatz‹),
> - Lehrer, die von Anfang an auf eine Fachsprache Wert legen, dies aber in gemäßigter Weise tun, und
> - schließlich Lehrer, die eine rigide Fachsystematik lehren und ihre Aufgabe in erster Linie im Sinne einer Berufsvorbereitung auf künftige Mathematiker und Naturwissenschaftler sehen.
>
> Zusätzlich haben diese Selbstansichten zahlreiche Auswirkungen auf andere Aspekte des Mathematik-Unterrichts, z. B. Rolle von Medien, Anwendungsbezug usw.«

Es ist allerdings davon ausgehen, dass diese Aspekte kaum explizit thematisiert werden, wodurch Aspekte wie »Autonomer Aspekt« sowie »Erkenntnistheoretischer und Sprachlicher Aspekt« vermutlich wenig im Bewusstsein der SchülerInnen stehen und erst an der Hochschule entwickelt werden, wenn sich die Schwerpunkte verschieben.

Daraus kann man ableiten, dass trotz einheitlichem Curriculum davon ausgegangen werden kann, dass es große Unterschiede im Unterricht und damit bei den Schülern und Schülerinnen gibt. Es kann daher von einer heterogenen TeilnehmerInnengruppe auch beim Mathematik-Studium an der Universität ausgegangen werden, was das Bild von Mathematik und die entsprechenden Fähigkeiten und Zugänge betrifft.

2.1.4. Exkurs: Entwicklung des Mathematikunterrichts in Österreich

Um den zuvor umrissenen Rahmen in einen etwas längerfristigen Kontext zu stellen, sei an dieser Stelle kurz auf die Entwicklung des (deutschsprachigen) Mathematikunterrichts im Hinblick auf seine Relevanz für den momentanen (österreichischen) Unterricht eingegangen:

Zunächst darf festgehalten werden, dass die Strömung der Neuen Mathematik[15] momentan in Österreich kaum spürbar ist. Dagegen kann doch festgestellt werden, dass der Einfluss eines Kataloges von allgemeinen, verhaltensorientierten Lernzielen wie von Winter (1975) (vlg. [24], S.8) (beispielsweise: Fähigkeit zur sachlichen und rationalen Argumentation, Mathematisieren, Modellbilden usw.) und die nachfolgenden Diskussionen in den 90ern die Strömung rund um die Jahrtausendwende in Österreich beeinflusst haben.

Auch auf den Zug der Strukturierung nach Kompetenzen (Kompetenzorientierung) ist man seit 2008 in Österreich aufgesprungen[16], wobei diese Strömung eher noch im Wachstum ist und man zudem annehmen muss, dass der Großteil der momentanen Studierendengeneration diesen Umschwung noch nicht aus der eigenen Schullaufbahn erfahren hat – bzw. erst gegen Ende der Schulzeit kennen gelernt hat. Daneben gibt es die Bildungsstandards (vgl. [27]) (ab 2008) am Ende des Übergangs zwischen Unterstufe und Oberstufe und am Ende der Oberstufe, um die bisherige Inputorientierung (z. B. Was soll man SchülerInnen beibringen?) durch eine Outputorientierung (Was können SchülerInnen tatsächlich?) zu ergänzen bzw. abzusichern.

Zunächst sei kurz erklärt, was seit 2010 unter dem Kompetenzbegriff in österreichischen Mathematikunterricht zu verstehen ist (zitiert nach [28], S.9):

- Unter Kompetenzen werden längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen.
- Mathematische Kompetenzen beziehen sich auf mathematische Tätigkeiten, auf mathematische Inhalte sowie auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzungen.
- Mathematische Standards meinen jene Teilmenge messbarer mathematischer Kompetenzen, über die Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Schulstufe verfügen sollten.

Im momentanen noch gültigen Lehrplan der AHS [22] werden dagegen folgende Kompetenzen unterschieden:

- Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse beziehen (Vertrautsein mit Inhalten)
- Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen: (Verknüpfung mit Grundvorstellungen)
- Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen

Im Zuge der Intensivierung durch Kompetenzen und Standards wird in Österreich auch ab 2014/15 die neue, standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung an der AHS starten. (vgl. `http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.xml`) Die (schriftliche) Reifeprüfung wird in zwei Bereiche geteilt sein. Der erste Bereich deckt kurze, mathematische Aufgaben ab, die nur wenige Grundkompetenzen[17] abprüfen, der zweite Bereich dagegen beinhaltet größere Aufgaben, oft mit Anwendungskontext, die das Anwenden und Kombinieren verschiedener Grundkompetenzen erfordert. Eine Übersicht dieser Grundkompetenzen zu den jeweiligen inhaltlichen Bereichen findet sich in [30].

Als Beispiel sei aus dem Themenbereich Lineare Funktionen $f(x) = kx + d$ angeführt:

> Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können. ([30], S.10).

---

15 Als Neue Mathematik wird jene Mathematik-Didaktik-Strömung bezeichnet, die sich ab Mitte der 60iger Jahre in Deutschland stark an die formale Darstellung von wissenschaftlicher Mathematik (Bourbakismus) angelehnt hat, um mit größerer fachlicher Präzision und strengem deduktiven Vorgehen schulmathematische Unzulänglichkeiten auszugleichen. Insbesondere der exakte, strenge Produktcharakter wurde dabei betont. Dabei wurde versucht, diesen Aspekt von Mathematik direkt in die Schule umzusetzen, jedoch ohne wesentliche Erfolge auf Seiten der SchülerInnen hat. Vlg. [24], S.5-6.

16 Der ab 2004 gültige Lehrplan der AHS [22] ist zwar auch kompetenzorientiert formuliert, allerdings nur sehr »grob«.

17 Hinsichtlich dieser Begriffe ist Vorsicht geboten. Grundkompetenzen sind nicht mit Kompetenzen gleichzusetzen. Grundkompetenzen sind »sorgsam ausgewählte und gut begründete Kompetenzen, die aufgrund ihrer fachlichen und gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind« (siehe [29], S.6).

Es wird sich zeigen, in wie weit sich die Entwicklung des Mathematik-Unterrichts in Österreich auf die mathematischen Leistungen und die Studierfähigkeit für ein Mathematik-Studium auswirken. Zumindest in Deutschland lässt sich im Zuge der allgemeinbildenden Reformen ab 2001 (PISA-Schock) ein Absinken der mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen feststellen (vgl. [31]). Es stellt sich heraus, dass durch die entsprechenden Reformen (nur) das untere mathematisches Leistungsniveau gestärkt wird, aber nicht die Leistungsspitze.

2.2. Didaktische Grundsätze und Methoden

Der Lehrplan der AHS [22] hält auch Vorgaben zu didaktischen Grundsätzen und Methoden bereit:

> »Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen. Zur Sicherung des Unterrichtsertrages bieten sich Einzel-, Team- und Gruppenarbeiten, Projektarbeiten und regelmäßige Hausübungen an.«

Das Lernen hat dabei in verschiedenen Kontexten zu erfolgen, die kurz vorgestellt werden, um einige Charakteristika schulischen Mathematik-Lernens herauszuarbeiten:

- Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

  Wie in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.3 erwähnt wird der Anwendungsbezug zur Verdeutlichung der Nützlichkeit der Mathematik herangezogen. Das wird als wesentliche Motivation dargestellt, um neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben.

  Ausblick: Falls diese Art der Motivation die einzige Triebkraft für Mathematik ist, besteht bei einem Mathematik-Studium die Gefahr, je nach Themengebiet zunächst[18] kaum Nährboden dafür zu finden.

- Lernen in Phasen

  »Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifzieren[19] .«[22]

  Ausblick: Dieser didaktischer Grundsatz wird im Studium kaum fortgeführt. Für gewöhnlich werden z. B. Definitionen und Theorien in einer möglichst breiten Allgemeinheit eingeführt, wobei sofort mit der exakten Formulierung eingestiegen wird, um sich weitere Exaktifizierungen und Verallgemeinerungen weitgehend zu ersparen.

- Lernen im sozialen Umfeld

  Kurz gesagt: Die Sozialformen sollen an die Ziele und an die Inhalte angepasst sein.

  Ausblick: Traditionelle Lern-/Lehrformen an der Uni sind diesbezüglich meist sehr unflexibel und starr, vgl. Abschnitt 3.2.

- Lernen mit instruktionaler Unterstützung

  »Die minimale Realisierung besteht in der Bereitstellung von schüleradäquaten Lernumgebungen und Lernangeboten, die maximale Realisierung in Differenzierungsmaßnahmen, durch die individuelle Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnisse und Interessen gefördert werden.«[22]

---

18 Viele Anwendungsgebiete finden sich erst in Lehrveranstaltungen nach den Grundlehrveranstaltungen wie der Analysis oder der Linearen Algebra. Beispiele dafür sind etwa die Numerische Mathematik oder Lehrveranstaltungen mit Modellierungsschwerpunkten.

19 Die wichtige Rolle dieses Prinzips wird in [24] S.61 vor allem im Rahmen der Analysis betont. Im Rahmen des Abschnittes 6.3 werden sich Auswirkungen davon zeigen.

Ausblick: Diese Formulierung stellt klar die Lernenden ins Zentrum, weniger die Inhalte und das anzustrebende Niveau. Es scheint zudem schwer möglich, ähnliche Ansprüche in Massenlehrveranstaltungen für Studierende umzusetzen.

- Lernen mit medialer Unterstützung

  »Die Beschaffung, Verarbeitung und Bewertung von Informationen hat auch mit Büchern (zB dem Schulbuch), Zeitschriften und mit Hilfe elektronischer Medien zu erfolgen.«

  Ausblick: Damit scheint zunächst der Anspruch der Studierfähigkeit und des (selbstgesteuerten?) Lernens gegeben zu sein. Fraglich ist nur, in wie weit diese Handlungen ohne instruktionale Unterstützung durchgeführt werden können.

- Lernen mit technologischer Unterstützung

  »Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar.«[22]

  Ausblick: Der Einsatz von technologischer Unterstützung spielt bei klassischen Lehrveranstaltungen und ihren abstrakten Inhalten (verständlicherweise) kaum eine Rolle. Auch bei Prüfungen sind im allgemeinen nur Nicht-Grafikfähige Taschenrechner – wenn überhaupt – zugelassen. Sind SchülerInnen auf technologische Unterstützung angewiesen, kann sich das negativ auswirken.

Zusätzlich ist eine Methodenvielfalt anzustreben, die die oben genannten Grundsätze passend in der jeweiligen Unterrichtssituation umsetzen lässt (vgl.[22]). Gängige Unterrichtsmethoden sind etwa

- LehrerInnenvortrag

  Üblich sind vergleichsweise kurze Einheiten von rund 15 Minuten, d. h. es ist davon auszugehen, dass es SchülerInnen kaum gewöhnt sind, längeren Vortragen (1,5 Stunden) zu folgen.

- LehrerIn-SchülerInnen-Gespräch

  Diese Methode wird häufig im fragend entwickelndem Unterricht eingesetzt.[20] Insbesondere werden dadurch die Inhalte (im Gegensatz zum LehrerInnenvortrag) vergleichsweise langsam erarbeitet.

- Einzel- und Partnerarbeit

  Diese Form wird oft in Übungsphasen genützt, bei der zuvor gelernte Inhalte angewandt werden müssen. Für gewöhnlich ist dabei kaum Eigenverantwortung nötig, da die Lehrkraft trotzdem bei Fragen und Problemen zur Verfügung steht. Es sei dahingestellt, ob diese Unterrichtsmethode adäquat auf eigenverantwortliches Lernen auf universitärem Niveau (vgl. Abschnitt 3.2 und 6.2) vorbereiten kann.

- Gruppenarbeit

  Es handelt sich dabei vermutlich nach wie vor eher um eine Randerscheinung im Mathematikunterricht. Daneben sind die Arbeitsaufträge meist sehr eng und klar abgegrenzt.

Im Kontext dieser Arbeit ist es nicht notwendig, näher auf die Vor- und Nachteile der jeweiligen Methoden einzugehen. Im Abschnitt 4.4 werden wir auf die Methoden und den Unterschieden zur Hochschule zurückkommen.

20 »Beim fragend entwickelnden Unterricht versucht der Lehrer durch geeignete Fragen an die Schüler und Schülerinnen, zu einem Erkenntnisgewinn bei jenen zu gelangen.« ([24], S.80-82). »Der fragend-entwickelnde Unterricht ist die am Gymnasium vorherrschende Unterrichtsform.« (ebendort)

2.3. Themengebiete und Inhalte

Im Folgenden werden die für einen Mathematik-Studieneinstieg relevanten Inhalte dargestellt, die laut AHS-Lehrplan ([22]) in den entsprechenden Schuljahren in der Oberstufe behandelt werden und die daher (prinzipiell) von angehenden Studierenden mit einer AHS-Matura zu beherrschen sind. Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Bestandsaufnahme des zu erwartenden Mathematikwissens herauszuarbeiten, um dann im Anschluss in Abschnitt 4.6 mögliche Lücken thematisieren zu können und Anknüpfungspunkte für die Hochschulmathematik sichtbar zu machen.. Elementarmathematische Inhalte aus der Unterstufe (Sekundarstufe I[21]) werden im Wesentlichen in der fünften Schulstufe[22] der AHS (Alter: 15 Jahre) weitgehend abgedeckt, wiederholt und exaktifiziert. Daher wird die Unterstufe nicht zusätzlich thematisiert.

Bei den Inhalten und Themengebieten begrenzt sich die Darstellung auf jene Inhalte, die im Wesentlichen im ersten Semester im Studium implizit eine Rolle spielen oder in den Lehrveranstaltungsinhalten (vgl. Abschnitt 3.3) explizit auftauchen. Die Auszüge aus dem Lehrplan der AHS sind daher nur unvollständig darstellt. Im Lehramt sind das die Themenbereiche Analysis, allgemeine Grundlagen (Mengenlehre, Arithmetik) sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung/Kombinatorik[23]. Im Bachelor sind zusätzlich Inhalte aus der Linearen Algebra gefragt. Auf andere Inhalte (Elementargeometrie, darstellende Geometrie, Statistik, Differentialgleichungen usw.) wird hier nicht eingegangen, weil diese im ersten Studienjahr de facto in beiden Studienrichtungen keine Rolle spielen. (vgl. Abschnitt 3.3).

Die Schulinhalte auf den folgenden Seiten sind in jedem Themengebiet zusätzlich nach Schulstufen geordnet, um das Spiralprinzip zu verdeutlichen.

2.3.1. Allgemeine Grundlagen und Algebra

Unter allgemeine Grundlagen und Algebra werden hier jene Themengebiete zusammengefasst, die für die weiteren schulischen Inhalte (implizit) vorausgesetzt werden, also etwa Mengen, Zahlen, Rechenoperationen, Gleichungen und Gleichungssysteme. Dagegen sind laut Lehrplan logische Grundlagen (Äquivalenz, Implikation, Negation, usw.) nicht explizit Thema in der Schule.

Zahlen und Rechengesetze

5. Klasse	Zahlen und Rechengesetze
Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen	
Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze	
6. Klasse	**Potenzen, Wurzeln, Logarithmen**
Definieren von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten, Definieren von Wurzeln und Logarithmen	
Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme	

Die Mengenlehre ist zunächst nur implizit Thema des Lehrplanes, nämlich bei den Zahlenmengen.[24] Damit man über die Sinnhaftigkeit der irrationalen Zahlen reflektieren kann, muss man vorab feststellen, dass $\mathbb{Q}$ Lücken auf der Zahlengerade lässt oder dass schon einfache Gleichungen wie $x^2 = 2$ keine

21 Alter: 10-14, auch Hauptschulen
22 »Schulstufe« und »Klasse« werden auch im Lehrplan [22] synonym verwendet.
23 Ich werde auf diesen Bereich nicht eingehen, da die LV, die dieses Thema behandelt, in den letzten 7 Jahren an der Uni Graz nie eine Hürde darstellte.
24 Andere Konzepte (Funktionen, Geraden, Ebenen, Vektorräume) benötigen den Mengenbegriff allerdings wieder.

rationale Lösung haben können. Das Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze wird zwar gefordert, die Umsetzung davon darf in Frage gestellt werden.

Vielleicht aus mathematischer Sicht fast überraschend werden bereits in der 6. Klasse Potenzen mit reellem Exponenten definiert, was nicht trivial ist.[25] Darüber hinaus sind die Beweise der jeweiligen Rechenregeln vorgesehen, was zur Annahme führen muss, dass Studierende den Umgang mit (direkten) Beweisen in der Schulzeit kennen gelernt haben.

Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen

5. Klasse	Gleichungen und Gleichungssysteme
Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen	
Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation	
Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme	
6. Klasse	**Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme**
Arbeiten mit einfachen Ungleichungen (Abschätzungen, Umformungen, Fallunterscheidungen)	
Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen	
Kennenlernen von Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen	
7. Klasse	**Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen**
Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen	
Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen	
Rechnen mit komplexen Zahlen	
Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra	

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme (mit 2 Unbekannten und 2 Gleichungen) sind ein großes Thema in der Schule, von dem man ausgehen kann, dass es auch als solches umgesetzt wird. Interessant ist dagegen, dass das Arbeiten mit Ungleichungen auch im Zusammenhang mit Abschätzungen und Fallentscheidungen im Lehrplan vorgesehen ist. Fraglich ist diesbezüglich allerdings, welche (innermathematischen) Probleme damit behandelt werden, da diesbezüglich kaum exakt formulierte Begriffe der Analysis (z. B. Grenzwerte) auftauchen (vgl. Abschnitt 2.3.2), deren Behandlung diese Methoden benötigen. Durch die Beschäftigung in der 6. Klasse ist (bei kaum vorhandenen Wiederholungsmöglichkeiten) nicht davon auszugehen, dass Ungleichungen noch nach der Reifeprüfung beim Eintritt in ein Studium beherrscht werden. Das Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen setzt implizit Polynomdivision voraus. Komplexe Zahlen werden für gewöhnlich über die Gleichung $i^2 = -1$ eingeführt (und nicht als $\mathbb{R}^2$ mit einer passenden Multiplikation mit $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\}$). Das Hauptaugenmerk liegt demnach nicht auf den Strukturen der Verknüpfungen.

25 Übliche Zugänge sind: Als Grenzwert von rationalen Folgen von a^{p_n/q_n} mit $p_n/q_n \to \xi \in \mathbb{R}$. Über die $a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$, wobei im Vorfeld Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion auf den reellen, maximalgroßen Definitionsbereichen definiert sein müssen. Insgesamt stellt sich heraus, dass es mit schulischen Mitteln nur schwer möglich ist, ein konsistentes, mathematisch korrektes Konzept umzusetzen. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass mathematische Strenge und (globale) Konsistenz eine untergeordnete Rolle spielen.

2.3.2. Analysis

Bei der Analysis[26] im Schulunterricht ist zunächst bemerkenswert, dass der Grenzwertbegriff von Funktionen nicht die zentrale Rolle einnimmt, die die Analysis in der Wissenschaft auszeichnet.[27]

Funktionen

5. Klasse Funktionen
Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x, a/x^2, ax^2+bx+c, abschnittweise definierte Funktionen)
Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen
Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen

6. Klasse Reelle Funktionen
Definieren, Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie von Winkelfunktionen (Bogenmaß)
Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und von Beziehungen zwischen Funktionen (Umkehrfunktionen)
Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße (absolute und relative Änderung, Differenzenquotient)
Anwenden von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, Vergleichen von Modellen, Erkennen der Grenzen von Modellbildungen
Kennenlernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs
Verketten von Funktionen

Bis zur 6. Klasse wird der Grenzwertbegriff bei Funktionen nicht explizit vom Lehrplan verlangt. Anschauliche Eigenschaften wie Monotonie stehen dabei oft in einem engen Zusammenhang mit Stetigkeit. Unstetige Funktionen sind erfahrungsgemäß kaum Thema. Damit wird Stetigkeit von Anfang an als evidente Eigenschaft kommuniziert, was den Grenzwertbegriff und die Stetigkeit in dieser Hinsicht für die SchülerInnen unnötig erscheinen lassen muss. Der Grenzwertbegriff taucht explizit im Zusammenhang mit Funktionen nur bei der Differentialrechnung auf (siehe unten). Die Phrase »Kennenlernen von Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs« ist (unter der Überschrift »reelle Funktionen«) nicht eindeutig – es ist nicht abzusehen, ob im Hinblick auf Nicht-reelle-Funktionen verallgemeinert werden soll oder im Hinblick auf den Begriff der auf Relationen, da der Funktionsbegriff als Relation mit bestimmten Eigenschaften eingeführt werden kann.[28]

Das Beschreiben und Untersuchen von abschnittsweisen Funktionen ist interessanterweise sogar vorgesehen. (vgl. dazu Aufgabe 3 in Kapitel 13).

26 Das Wort »Analysis« wird im Lehrplan [22] sogar einmal als solches erwähnt!

27 Das scheint kritisch im Kontext, dass dadurch auch angrenzende und aufbauende Inhalte darunter leiden können: »It is accepted in much of the educational research community that students' understanding of one concept influences their learning and understanding of related concepts. In terms of calculus learning, this means that the understandings of the concept of a variable, functions and limits will influence the development of their understanding of derivatives and other calculus concepts.«[32], S.296.

28 Im axiomatischen Aufbau werden bekanntlich Relationen als Teilmengen kartesischer Produkte definiert. Letztendlich lässt sich der Funktionsbegriff also auf der Mengenlehre aufbauen.

Das Thema Umkehrfunktionen wird behandelt, bevor das Verketten von Funktionen thematisiert wird. Damit ist davon auszugehen, dass zunächst der rechnerische Aspekt auf Ebene der Funktionswerte durch $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ besonders betont wird, das Verketten von Funktionen $f \circ f^{-1} = id_Y$ dagegen als solches nur zweitrangig ist (falls dieser Generalisierungsschritt unterbleibt), was spätere Inhalte erschwert (Kettenregel beim Differenzieren in der Schule, Verkettung in der Hochschulmathematik).

Der Anwendungsbezug spielt in der Schule eine vergleichsweise große Rolle, wie folgende Aufgabe aus der schriftlichen Reifeprüfung (Teil 1) [33] zeigt:

(Halbwertszeit von Felbamat)

Zur Behandlung von Epilepsie wird oft der Arzneistoff Felbamat eingesetzt. Nach der Einnahme einer Ausgangsdosis D_0 nimmt die Konzentration D von Felbamat im Körper näherungsweise exponentiell mit der Zeit ab.

Für D gilt folgender funktionaler Zusammenhang: $D(t) = D_0 \cdot 0,9659^t$. Dabei wird die Zeit t in Stunden gemessen.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Halbwertszeit von Felbamat! Geben Sie die Lösung auf Stunden gerundet an!

Folgen

6. Klasse Folgen
rekursives und explizites Darstellen von Folgen
Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert
Definieren der Eulerschen Zahl
Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen
Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)

Der Begriff Grenzwert wird nur intuitiv erfasst (vermutlich zunächst durch graphische Veranschaulichungen und Wertetabellen). Beim Untersuchen auf Konvergenz ist nicht klar, auf welchem Niveau das zu geschehen hat. Ein strenger ϵ-N_0-Grenzwertbegriff ist nicht gefordert, damit können die Rechenregeln für konvergente Folgen nur schwer als beweisbedürftig dargestellt werden, was das selbstverständliche, unreflektierte Hantieren damit unterstützt. Das Nachweisen von bereits bekannten Aussagen wird aus Sicht der SchülerInnen unnötig. Untersuchungen zur Monotonie und Beschränktheit sind explizit gefordert (vgl. Aufgabe 2 im Kapitel 14).

Reihen werden nur im Zusammenhang mit geometrischen Reihen behandelt. Andere Reihen oder auch Potenzreihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ sowie ein Konvergenzbegriff sind nicht (verpflichtend) vorgesehen.

Differentialrechnung

7. Klasse Differentialrechnung
Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
Lösen von Extremwertaufgaben
Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

Es wird gefordert, dass der Differentialquotient explizit über den Differenzenquotienten eingeführt wird. Eine Aufgabe aus der standardisierten, schriftlichen Reifeprüfung soll das Niveau illustrieren [34]:

(Drehkegel)

Für das Volumen V eines Drehkegels mit dem Radius r des Basiskreises und der Höhe h gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie für die Funktion $V(r) = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$ mit $h = 1$ die mittlere Änderungsrate im Intervall $[1; 3]$.

Zusätzlich muss die Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung behandelt werden. Das Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen ist missverständlich im Hinblick auf die Herleitung von Differentiationsregeln von Polynomfunktionen, weil »Berechnen« dadurch den Charakter von »Wissen« haben kann und nicht im Sinne von »per Definition der Ableitung herleiten«. Damit ist unklar, in wie weit der Umgang mit dem Differentialquotienten vorausgesetzt werden darf.

Bei den »weiteren Differentiationsregeln« darf davon ausgegangen werden, dass darunter Quotienten-, Produkt- und Kettenregel zu verstehen sind.

Stetigkeit wird explizit im Lehrplan nur im Zusammenhang mit der Präzisierung des Grenzwertbegriffs im Zusammenhang mit der Differentialrechnung gebracht. Damit wird deutlich, dass Grenzwerte und Stetigkeit an sich nur Beiwerk sind, die für die Differentialrechnung benötigt werden. Nichtsdestotrotz bleibt noch offen, was unter Präzisierung zu verstehen ist. ϵ-δ-Definitionen werden nicht explizit erwähnt. Es ist dahingehend schon alleine durch den Lehrplan zu vermuten, dass kaum eine formale Definition in diesem Themenbereich bei SchülerInnen zur Verfügung steht (vgl. Abschnitt 6.3).

Integralrechnung

8. Klasse Integralrechnung
Ermitteln von Stammfunktionen
Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von »sehr kleinen Produkten« der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)

Durch die sehr kleinen Produkte der Form $f(x) \cdot \Delta x$ ist das Riemann-Integral in der Schule zu verwenden. Das Cauchy-Integral[29] bzw. das (allgemeinere) Lebesgue-Integral[30] werden nicht besprochen. Es darf zudem angenommen werden, dass es sich bei den »elementaren Integrationsregeln« um die Linearität des Integrals und der Kenntnis einiger Stammfunktionen handelt. In wie weit daher Substitutionstechniken sowie partielle Integration behandelt werden, ist zunächst unklar.[31] Das Kennen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung impliziert nicht, dass eine inhaltliche Begründungen bzw. Herleitung gebracht werden muss.

2.3.3. Analytische Geometrie (Lineare Algebra)

Der Begriff »Lineare Algebra« kommt im Lehrplan nicht vor. Stattdessen werden Inhalte dieses mathematischen Themengebietes in Form der Analytischen Geometrie abgehandelt:

5. Klasse Vektoren und analytische Geometrie der Ebene
Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

29 Das Cauchy-Integral geht von Treppenfunktionen h_n und deren gleichmäßigen Konvergenz gegen Regelfunktionen f aus – damit ist es nicht notwendig, dass die Treppenfunktionen h_h tatsächlich gemeinsame Funktionswerte mit der zu integrierenden Funktion haben, d. h. es muss keine $x \in D$ mit $h_n(x) = f(x)$ geben. Dann wird $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$ festgesetzt, wobei $\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$ als der anschauliche (orientierte) Flächeninhalt zwischen dem Graphen von h_n und der x-Achse eingeführt wird, der als Summe von (orientierten) Rechtecksflächen definiert ist.
Es ergibt sich dann über Stammfunktionen H_n von h_n, dass $F := \lim_{n\to\infty} H_n$ (bzgl. gleichmäßger Konvergenz) eine Stammfunktion von f ist. Durch den (vergleichsweise einfach nachzuweisenden) Zusammenhang $\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = H_n(b) - H_n(a)$ erhält man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, auch für Regelfunktionen f.

30 Beim Lebesgue-Integral (Aufbau nach Königsberger [35]) wird durch eine »betragsmäßige Annäherung von oben« mittels sogenannter Hüllreihen eine Halbnorm $\|\cdot\|_{L^1}$definiert, die nun – anstatt der gleichmäßigen Konvergenz wie beim Cauchy-Integral – für einen Approximationsbegriff bzgl. Treppenfunktionen t_n herangezogen wird: Ist $\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\|_{L^1} = 0$, so wird $\int_{Q\subset\mathbb{R}^m} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_{Q\subset\mathbb{R}^k} t_n(x)\,\mathrm{d}x$ festgesetzt, wobei der Integralbegriff der Treppenfunktion wieder die anschauliche (orientierte) Fläche $(k = 1)$ bzw. das k-dimensionale Volumen $(k \geq 1)$ ist.

31 Schulbücher enthalten durchaus Übungsbeispiele zu diesen Techniken.

6. Klasse	Analytische Geometrie des Raumes
Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit	
Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts	
Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen	
Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen	
Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie	

Analytische Geometrie bedeutet im Lehrplan unter anderem[32] das Arbeiten mit Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Es wird nicht fixiert, in welcher Form Vektoren eingeführt werden sollen (Äquivalenzklasse von Pfeilen? Orts- und Richtungsvektoren?[33]). Es ist allerdings davon auszugehen, dass der Schwerpunkt nicht auf den strukturellen Eigenschaften liegt, da der Begriff des (abstrakten) Vektorraums im Lehrplan nicht gefordert wird. Damit besteht die Gefahr, dass die definierten Rechenregeln und die daraus erhaltenen nicht als solche erlebt werden, sondern als »evident durch die Anschauung« charakterisiert werden.[34]

Lineare Abbildungen im Hochschulmathematischen Sinn[35] kommen nicht vor, damit wird auch die algebraische Struktur des Vektorraums wenig genützt.[36] Damit wird ein gänzlich anderes Bild der Linearen Algebra vermittelt als in der Hochschule üblich (vgl. Abschnitt 3.3.3).

32 Nichtlineare analytische Geometrie spielt im 1. Semester in den Mathematikstudien an der Uni Graz de facto keine Rolle. Bis auf die Kreisgleichung (Einheitskreis) werden Kegelschnitte nicht benötigt. Parametrisierte Kurven (ausgenommen Geraden) spielen erst in der Analysis mit mehreren Variablen (frühestens 2. Semester) eine Rolle.
33 In der kommenden standardisierten Reifeprüfung kommt der Begriff »Ortsvektor« nicht mehr vor. Daneben gibt es keine Vorgabe, wie Vektoren in Koordinatendarstellung geschrieben werden müssen. Punkte werden als $(x|y)$ geschrieben. Vgl. [36].
34 Vergleiche die dadurch enstehenden Probleme in Abschnitt 6.3.4.
35 In der Schule werden affine Funktionen mit Funktionsvorschriften der Form $f(x) = kx + d$ auch mit $d \neq 0$ als linear bezeichnet.
36 Interessanterweise sind doch in Formelsammlungen für die Reifeprüfungen Matrizen von Spiegelungen oder Drehungen angeführt.

3. Mathematik an der Uni Graz

Wurde im vorigen Abschnitt die Schulmathematik an der AHS näher untersucht, so wird in diesem Abschnitt die Mathematik[1] (vor allem des ersten Semesters bzw. Studienjahres) in den Mathematikstudien (Bachelor Fachwissenschaft und Lehramt für Höhere Schulen) an der Uni Graz aufgearbeitet. Genauso wie bei der Schulmathematik vom intendierten Curriculum ausgegangen wurde, wird in diesem Abschnitt ebenfalls auf das intendierte Curriculum eingegangen. Ausgegangen wird dabei von den Studienplänen (Curricula) vom Lehramt Mathematik [37] (und auch vom Bachelor Fachmathematik [38]), wobei die konkrete Umsetzung auf Lehrveranstaltungsebene (implementiertes Curriculum) exemplarisch dargestellt ist. Das realisierte Curriculum wird nach Möglichkeit in Teil II diskutiert.

Der Aufbau erfolgt weitgehend analog zum Kapitel für Schulmathematik: Zunächst werden allgemeine Ziele der Studien und die Besonderheiten der (akademischen) Mathematik vorgestellt, danach werden die Lehr- und Lernformen im Studium angeschnitten[2] und zuletzt werden die Themengebiete und Inhalte anhand der Lehrveranstaltungen im ersten Semester (bzw. Studienjahr) exemplarisch vorgestellt.

3.1. Aspekte und Ziele von Hochschulmathematik

Traditionell ist das Mathematik-Lehramtsstudium an der Uni Graz zumindest seit WS 2006/07 am Bachelor Fachmathematik ausgerichtet. Das bedeutet, dass zunächst die Curricula für das Bachelor-Studium entstanden sind[3] und im Anschluss daran die ersten Studienjahre des Lehramtsstudium als abgespeckte Version implementiert wurden.[4] Daher orientiert sich dieser Abschnitt vorrangig an den Zielen des Bachelor-Studiums. Grundlegende Ziele sind u.a. ([38]):

> Der geübte Umgang mit mathematischen Werkzeugen. Die Studierende / Der Studierende soll eine Vertrautheit mit den wichtigsten mathematischen Begriffen und Kenntnisse der fundamentalen Zusammenhänge entwickeln.
>
> Sicherer Umgang mit der mathematischen Sprache. Erkennen und Verarbeiten komplexer Strukturen. Die Fähigkeit zur exakten Argumentation und zum Durchdringen komplexer Sachverhalte soll durch das Studium trainiert werden.
>
> Problemlösungsfähigkeit. Der kreative und effiziente Umgang mit Problemlösungsstrategien soll durch das Studium vermittelt werden.

Im Lehramtsstudienplan [37] werden diese Ziele durch die »fachwissenschaftliche Kompetenz« abgedeckt: »Umfangreiche Kenntnisse über Bedeutung, Systematik, Wissensstand und Methoden der für die Unterrichtsfächer relevanten Wissenschaften« sollen erhalten werden.

Die Umsetzung dieser Ziele erfolgte (im Bachelor bis 11/12, im Lehramt bis 12/13) zunächst anhand zweier (annähernd) paralleler »Schienen«, nämlich einer Calculus-artigen Schiene[5] und einer rigorosen Schiene:

---

1 Mathematik als Forschungsgegenstand im Sinne der Wissenschaft (z. B. in Masterstudien bzw. Doktorrat usw.) ist damit nicht gemeint. Mathematische Forschung ist als Entwicklungsprozess nicht mit der Mathematik als Lerngegenstand zu vergleichen, vlg.[10], S.245.

2 Diese unterscheiden sich zum Teil etwas vom üblichen Ablauf an anderen deutschsprachigen Universitäten.

3 Durch den Bolgona-Prozess wurde 2006/07 eine Umstellung vom Diplom-System auf das Bachelor-Master-System notwendig. Das nur gering veränderte Curriculum vom Studienjahr 2007/08 ist noch verfügbar: [39]

4 Durch eine erneute Umstellung des Bachelors im WS 12/13 [38] wird das Lehramt ab WS 13/14 wieder angepasst (vgl. [40]), wenn auch unabhängiger als bisher.

5 Ein typisches Lehrbuch mit diesem Zugang ist beispielsweise das umfangreiche Werk von Larson [41]

- Calculus-artige Schiene (Umsetzung an der Uni Graz): kaum formaler Zugang zu den Themen der Analysis (Grenzwerte, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw.) ohne axiomatischen (oder konstruktiven) Aufbau der reellen Zahlen, kaum bis ins Detail ausformulierte Beweise. Nützung der Anschauung, um die Aussagen von Sätzen plausibel zu machen, vergleichsweise beispielorientierte Vorlesungen. In Übungen auch Zahlenbeispiele, Schwerpunkt auf Argumentieren, vergleichsweise wenig Augenmerk auf formale Notation.
- rigorose Schiene: (überwiegend) rigoroser Zugang zu grundlegenden Themen (Funktionen, Relationen, Mächtigkeit von Mengen), Themen der Analysis und der Linearen Algebra. Meist axiomatische Einführung der relevanten Begriffe (z. B. $\mathbb{R}$, Vektorraum), durchwegs konsistenter, deduktiver Aufbau, (fast alle) Sätze mit Beweisen im Detail, kaum (ausführliche) Beispiele in Vorlesungen. In Übungen Augenmerk auf exakten Beweisen und formale Notationen.

Mit Ausnahme des Themengebiets der Analysis ist der rigorose, konsistente Aufbau nicht explizit in den Curricula verankert, aber gängige Lehrpraxis. Ab dem WS 12/13 im Bachelor und ab dem WS 13/14 im Lehramt fällt die Calculus-artige Schiene weg.[6] Neu aufgenommen ins Curriculum des Bachelorstudiums [38] wurden auch zu erreichende Kompetenzen wie »Erkennen und Verarbeiten komplexer Strukturen« oder die »Fähigkeit zum formalen und analytischen Denken«, was als eine deutliche Annäherung des verschriftlichen Curriculums an die universitäre Realität anzusehen ist. Allerdings bleibt trotzdem noch Interpretationsspielraum erhalten, wenn es etwa heißt: Die Studierenden »lernen die Struktur des Vektorraumes und dessen Eigenschaften auf einem den ersten beiden Semestern angemessenen Abstraktionsniveau kennen.« [38] In der Realität bedeutet das den Aufbau etwa im Stile des Lehrbuches »Lineare Algebra« von Fischer [42] (inkl. unendlich dimensionalen Vektorräumen). Das angemessene Abstraktionsniveau darf damit wohl als Einführung von Vektorraumstrukturen über Körpern anstatt über Ringen ($\rightarrow$ Moduln) – wie es zum Teil noch vor dem Jahr 2005 an der Uni Graz üblich war – verstanden werden.

Eine näheres Betrachten der einzelnen Lehrveranstaltungen (vgl. Abschnitt 3.3) und der behandelten Übungsaufgaben zeigt einige gängige Charakteristika der Hochschulmathematik und ihrer Umsetzung:

- Auch in den Calculus-artigen Lehrveranstaltungen werden kaum »echte« Anwendungsbeispiele im Sinn der Schulmathematik behandelt. Eingekleidete Textaufgaben kommen praktisch nicht vor. Innermathematische Aufgabenstellungen dominieren.
- Auch in den weniger rigorosen Lehrveranstaltungen werden Umformungsschritte zumindest argumentiert und nicht als selbstverständlich gültig dargestellt.
- Bis auf die Calculus-artigen Lehrveranstaltungen wird kaum prinzipielle Rücksicht auf Vorwissen genommen. Vielmehr werden die Inhalte von Grund auf neu vermittelt, im Allgemeinen ohne mögliche Problemfelder zu thematisieren. (Etwa lineare Funktion in der Linearen Algebra versus lineare Funktion $f(x) = kx + d$ in der Schule).
- Es wird kaum intensiv geübt im Sinne von routineartigem Abhandeln von Standardaufgaben. Vielmehr müssen oft einige wenige Beispiele reichen, um Definitionen oder Sätze zu verstehen.
- Die fundamentale Rolle von Axiomen wird kaum ausführlich thematisiert.
- Die (rigorosen) Vorlesungen wirken zum Teil nur als eine Art eine Sammlung von Definitionen, Sätzen und Beweisen, ohne die zentralen dahinterstehenden Ideen, Problematiken und Auswirkungen explizit zu thematisieren. Die zentralen Ideen werden oft nur in einer kurzen Bemerkung als »verbaler Nebensatz« abgehandelt.

Damit muss kritisch angemerkt werden, dass es auch an der Uni Graz in Frage zu stellende »myths and practices in university teaching of mathematics« gibt (siehe [43], S.3ff.).[7]

6 Durch die Kooperation des Bachelorstudiums Mathematik im Rahmen NAWI-Graz Projekt mit der Technischen Universität Graz wurde dieser Zugang wieder fallen gelassen.

7 Zum Beispiel the researches-always make good-teachers-myth (Lehrende werden nach ihren forscherischen Leistungen ausgewählt); self-made-teacher tradition (Erfahrung reicht für gute Lehre, es ist kein »specific training« nötig); deductive organiziation (Lineares, deduktives Vorgehen nach Definition-Satz-Beweis); perfect-theory presentation (Mathematik als fertige Theorie, nicht als lebendiges Objekt mit Fehlern, Schwierigkeiten usw.); top-down approach (Durch Behandlung eines Themas im Allgemeinen werden Spezialfälle automatisch ebenfalls verstanden).

3.2. Methoden und Lehrveranstaltungstypen

Neben diesen prinzipiellen Charakteristika spielt auch die Abhaltungsform[8] der jeweiligen Lehrveranstaltung eine entscheidende Rolle für die Lehrformen – aber auch für die Lernformen der Studierenden. Maßgeblich für die Mathematikstudien sind der Typ »Vorlesung« (VO) und der Typ »Proseminar« (PS)[9] bzw. »Übung« (UE). Darüber hinaus werden Lehrveranstaltungen des Typs »Vorlesung mit Übung« (VU) weitgehend zweigeteilt abgehalten, mit einem frontalen Vorlesungsteil und einem Übungsteil im Stile des LV-Typs Übung (UE).

3.2.1. Vorlesungen (VO)

> Vorlesungen (VO) sind Lehrveranstaltungen, bei denen die Wissensvermittlung durch Vortrag der Lehrenden erfolgt. Die Prüfung findet in einem einzigen Prüfungsakt statt, der mündlich oder schriftlich oder schriftlich und mündlich stattfinden kann. [40] S.5

Die reale Situation entspricht dieser Beschreibung. Im Regelfall handelt es sich in der Mathematik dabei um klassischen Tafelvortrag – der Vortrag mit einem Tablet-PC ist weitgehend unüblich. Das Verwenden von Overhead- oder PowerPoint- bzw. LaTeX-beamer-Folien ist in der Minderheit, wird z. T. aber begleitend zu Tafelvortrag verwendet. Üblich sind Lehrveranstaltungseinheiten mit einer Länge zwischen 45 Minuten und 2 Stunden. Die Einheiten werden grundsätzlich nicht durch Pausen unterbrochen. Folgende Prüfungsvarianten für Vorlesungen werden praktiziert:

- schriftliche Prüfungen (z. .B. 6 Aufgaben, 1,5 Stunden): Wiedergabe von Definitionen, Sätzen, Beweisideen oder vollständigen Beweisen, aber auch Beispiele.
- mündliche Prüfungen (kaum beispielorientiert): Dauer 30 Minuten bis 2 Stunden
- schriftliche Prüfungen (liefert Berechtigung für mündlichen Teil) mit anschließendem mündlichen Teil
- Computer-Multiple-Choice-Prüfungen

Die Wahl der Prüfungsmethode hängt oft den der Anzahl der Studierenden ab. Mündliche Prüfungen sind vor allem bei wenigen Prüflingen ($\rightarrow$ höhere Semester im Lehramt, bzw. allgemein im Bachelor) vorherrschend.

3.2.2. Übungen (UE/PS)

> Übungen haben den praktischen Zielen der Studien zu entsprechen und dienen der Lösung konkreter Aufgaben.[40] S.5.

Es wird nun eine typische Abhaltungsform einer Übungslehrveranstaltung, *Höhere Mathematik I PS* aus dem WS 12/13 (siehe [45]) vorgestellt. Die Beschreibung ist einem Informationsblatt [46] zur Lehrveranstaltung entnommen:

> **i)** Die Übung ist eine Lehrveranstaltung mit permanentem Prüfungscharakter[a] und Anwesenheitspflicht.
>
> **ii)** Eine Woche vor der jeweiligen Übungseinheit werden Übungsblätter mit Beispielen auf die Webseite `http://math.uni-graz.at/keeling/teaching.html` gestellt.
>
> **iii)** Diese Beispiele sollen dann als Vorbereitung bis zur nächsten Einheit selbständig gelöst werden. In den Übungen werden diese Beispiele von den Studierenden an der Tafel vorge-

8 Lehrvernstaltungstypen sind in den Studienrechtlichen Bestimmungen der Satzung der Uni Graz fixiert [44] Seite 3-5. Darüberhinaus sind sie auch in den Studienplänen enthalten: [38], [40].

9 Aus internen Gründen an der Uni Graz war es üblich, Lehrveranstaltungen mit Übungscharakter unter dem Typ PS zu führen, ohne dass es jedoch Unterschiede zum Typ UE bzgl. der Abhaltungsform gibt.

rechnet.

iv) Zu Beginn jeder Übungseinheit wird eine Strichliste ausgegeben, auf der dann die Bereitschaft, die entsprechenden Beispiele an der Tafel vorzurechnen, durch Ankreuzen signalisiert werden kann.

v) Die Strichliste wird auch verwendet, um die Anwesenheit zu dokumentieren. Eine Abwesenheit wird entschuldigt, wenn sie mündlich oder per Email vorher gerechtfertigt wird.

vi) Meldungen zur Tafelpräsentation werden zum Großteil freiwillig sein, aber je nach Bedarf könnten Teilnehmer, die sich auf der Strichliste gemeldet haben, zur Tafelpräsentation aufgerufen werden.

vii) Die Teilnehmer müssen zwei Klausuren schreiben, die erste dauert 45 die zweite 90 Minuten. Bei der zweiten Klausur wird der gesamte Stoff des Semesters geprüft.

Für die Klausuren braucht man nur eigenes Schreibmaterial. Sonst darf man kein Skriptum, keine Literatur, keine Notizen, keinen Taschenrechner und kein Handy bei sich haben.

viii) Minimale Voraussetzungen, um ein positives Übungszeugnis zu erhalten, sind:

- **a)** mindestens 50% der Punkte der Abschlussklausur,
- **b)** mindestens 50% der Punkte beider Klausuren,
- **c)** mindestens 50% der Beispiele angekreuzt zu haben,
- **d)** mindestens zweimal an der Tafel angetreten zu sein mit mindestens einer positiven Tafelleistung und
- **e)** nicht mehr als 3 unentschuldigte Abwesenheiten.

a Anm. des Autors: Gemeint ist *immanenter* Prüfungscharakter. Die Satzung (Studienrechtlichen Bestimmungen) der Uni Graz [44] sagt Folgendes darüber: S.3: »Lehrveranstaltungen mit immanentem Prüfungscharakter sind Lehrveranstaltungen, bei denen die Beurteilung nicht nur auf Grund eines einzigen Prüfungsaktes am Ende der Lehrveranstaltung, sondern auch auf Grund einer begleitenden Erfolgskontrolle der Teilnehmenden erfolgt.« sowie S.15: »Lehrveranstaltungen mit immanentem Prüfungscharakter können nur solche sein, bei denen die Teilnehmendenzahl die individuelle Betreuung der Studierenden ermöglicht. Bei Lehrveranstaltungen mit immanentem Prüfungscharakter sind die Beurteilungskriterien und die Beurteilungsmaßstäbe so zu wählen, dass durch schriftliche oder regelmäßige mündliche oder praktische Beiträge der Teilnehmenden die positive Absolvierung möglich ist.«

Im Unterschied zu anderen Universitäten sind Abgaben der Aufgaben in Zettelform an der Uni Graz nicht üblich, was primär den Grund hat, dass Korrekturen einen großen Zeit- und Personalaufwand bedeuten, der zumindest in den letzten 7 Jahren kaum in Kauf genommen wurde.

3.2.3. Tutorien

Tutorien (in den Mathematikstudien) sind freiwillig zu besuchende Veranstaltungen, aber offiziell keine Lehrveranstaltungen.[10] Sie werden gewöhnlich von höhersemestrigen Studierenden geleitet und können daher meist als beispielorientierte Vorlesungen beschrieben werden, die ergänzend zu den Pflichtlehrveranstaltungen Themen wiederholen, typische Beispiele aufarbeiten oder Hilfestellungen zu aktuellen Übungsaufgaben aus den Übungen geben. Präsenzaufgaben oder Kleingruppenbetreuung ist kaum üblich.[11] Zum Teil werden im Vorfeld zusätzliche Übungsaufgaben ausgegeben, zum Teil wird danach die Mitschrift (Tafelbilder) per Lernplattformen zur Verfügung gestellt. Ganz selten werden/wurden die Tutoren und TutorInnen zur Korrektur ausgewählter, schriftlicher Beispiele herangezogen.

3.2.4. Gesamtkonzept pro Themenbereich

Somit ergibt sich folgendes Gesamtkonzept der LVen eines Themenbereichs an der Uni Graz:

10 Studierende erhalten also weder Noten noch ECTS für den Besuch.
11 Das hat auch den Grund, dass zu einem Lehrveranstaltungsblock (VO und UE) nur ein Tutor/ eine Tutorin bereitgestellt wird, was dann einem effektiven Betreuungsverhältnis von 1:30 bis 1:80 entspricht.

- Vorlesung (ohne Anwesenheitspflicht): Bringt Definitionen, Sätze (und evtl. Beweise) durch Frontalvortrag. Häufig nur wenige vorgezeigte Beispiele.
- Übung/Proseminar (mit Anwesenheitspflicht): Studierende bearbeiten im Vorfeld selbstständig ein Aufgabenblatt zum aktuellen Stoff der Vorlesung und präsentieren ihre Lösungen an der Tafel. Keine Abgabe von schriftlichen Lösungen (→ kein Korrekturaufwand).
- Tutorium (freiwilliges Unterstützungsangebot): Es werden ähnliche Beispiele aus Vorlesungen bzw. Übungen vorgezeigt, konkrete Fragen beantwortet sowie typischerweise schwierige Inhalte (z. B. Stetigkeit) erneut erklärt.

3.3. Themengebiete/Inhalte im ersten Studienjahr

Tab. 3.1 zeigt die wichtigsten Lehrveranstaltungen, die im ersten Studienjahr jeweils zu absolvieren sind.[12] Typ ist dabei der Lehrveranstaltungstyp (vgl. Abschitt 3.2), ECTS sind dabei die Leistungspunkte im European Credit Transfer System, SSt sind dabei die Semesterwochenstunden.[13] Die Lehrveranstaltungen der *Höheren Mathematik* können den Calculus-artigen Schiene zugeordnet werden. Die Lehrveranstaltungen der *Analysis*[14], der *Linearen Algebra* sowie die *Grundbegriffe der Mathematik* können der rigorosen Schiene zugeordnet werden. (vgl.Abschnitt 3.1).

Tab. 3.1.: Lehrveranstaltungen im ersten Studienjahr

Bachelorstudium (2006/07 - 2011/12)

1. Semester (WS)	Typ	ECTS	SSt	2. Semester (SoSe)	Typ	ECTS	SSt
Lehramtsstudium (2007/08 - 2012/13)							
Höhere Mathematik I	VO	4,5	3	Höhere Mathematik II	VO	4,5	3
Höhere Mathematik I	UE	3	2	Höhere Mathematik II	UE	3	2
Grundbegriffe d. Mathematik	VU	4,5	3				
Lineare Algebra 1	VO	6	4	Lineare Algebra 2	VO	6	4
Lineare Algebra 1	UE	3	2	Lineare Algebra 2	UE	3	2
				Analysis I	VO	7,5	5
				Analysis I	UE	3	2

Bachelorstudium (seit 2012/13)

1. Semester (WS)	Typ	ECTS	SSt	2. Semester (SoSe)	Typ	ECTS	SSt
Lehramtsstudium (ab 2013/14)							
Analysis 1	VO	7,5	5	Analysis 2	VO	7,5	5
Analysis 1	UE	3	2	Analysis 2	UE	3	2
Lineare Algebra 1	VO	6	4	Lineare Algebra 2	VO	6	4
Lineare Algebra 1	UE	3	2	Lineare Algebra 2	UE	3	2

12 Es sind nur jene Lehrveranstaltungen angeführt, die als relevant für diese Arbeit betrachtet werden. Lehrveranstaltungen mit Programmierinhalten oder auch kombinatorische Lehrveranstaltungen werden nicht angeführt.
13 1 SSt entspricht einer 45 Minuteneinheit in jeder Woche (ca. 15 Wochen) im Semester.
14 Die Lehrveranstaltungen *Analysis 1* und *Analysis I* sind nicht völlig ident, vergleiche Abschnitt 3.3.2.

Der Studieneinstieg im WS 12/13 betrifft daher folgende Lehrveranstaltungen: *Grundbegriffe der Mathematik* (Lehramt), *Höhere Mathematik* (Lehramt), *Analysis 1* (Bachelor), *Lineare Algebra 1* (Bachelor).

3.3.1. Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Grundlagen (im Sinne der Fachwissenschaft) wurden in der Lehrveranstaltung *Grundbegriffe der Mathematik* abgedeckt. Aus der LV-Beschreibung aus dem WS 12/13 [47]:

> Inhalt: Mathematische Grundbegriffe (Aussagen, Quantoren, Mengen, Funktionen, Relationen); Beweise und Beweistechniken; Unendliche Mengen; Zahlbegriffe.
>
> Ziel der Veranstaltung ist es, Ihnen den Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik zu erleichtern. Sie sollen grundlegende mathematische Begriffe kennenlernen und den Umgang mit ihnen üben, sowie das saubere und verständliche Darstellen mathematischer Argumentationen erlernen.

Exemplarisch sind nachfolgend einige Übungsaufgaben aus dieser Lehrveranstaltung dargestellt, die die Studierenden im Eigenstudium zu lösen hatten. Es zeigt sich, dass viele der Aufgaben sehr abstrakt sind und die Studierenden kaum an schulisches Vorwissen anknüpfen können. Veranschaulichungen sind nur in wenigen Fällen möglich.

Es sei $P(x,y)$ eine Aussageform mit zwei freien Variablen x,y. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen, bilden Sie ihre Negation und drücken Sie diese umgangssprachlich aus.

(a) Zu jedem x existiert ein y, so dass $P(x,y)$ nicht zutrifft.

(b) Es gibt ein x, so dass $P(x,y)$ für alle y gilt.

(c) Wenn zu jedem y ein x existiert, so dass $P(x,y)$ zutrifft, so gibt es auch zu jedem x ein y, so dass $P(x,y)$ zutrifft.

Seien X,Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Wenn

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

für alle $A,B \subset X$ gilt, so ist f injektiv.

(b) Wenn f injektiv ist, dann gilt

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

für alle $A,B \subset X$.

Seien A,B Mengen und $f : A \to B$ eine surjektive Funktion. Auf der Menge $F(B,R)$ aller Abbildung $h : B \to R$ wird durch $h_1 \preceq h_2 \Leftrightarrow \forall a \in A : (h_1 \circ f)(a) \leq (h_2 \circ f)(a)$ eine Relation definiert. Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf $F(B,R)$ ist. Ist $\preceq$ eine Totalordnung?

Ab dem WS 12/13 werden einige dieser Inhalte in *Analysis 1* abgedeckt, wenn auch nicht im selben Ausmaß explizit thematisiert. Kritisch muss angemerkt werden, dass der Erfolg dieser Lehrveranstaltung zumindest in Graz[15] nicht den Erwartungen entsprach. Es zeigten sich viele Schwierigkeiten, die nicht allesamt im Rahmen der Lehrveranstaltung gelöst werden konnten (vgl. Kapitel 5 sowie 6).

3.3.2. Analysis-Inhalte

Analysis-Inhalte wurden in zwei Lehrveranstaltungszyklen abgedeckt: Einerseits auf der Calculus-Schiene mit der *Höhere Mathematik I - III*, andererseits durch *Analysis I* im 2. Semester (und im 3. Semester auch *Analysis II*) auf der rigorosen Schiene. Ab dem WS 12/13 beginnt der Analysis-Zyklus im 1. Semester mit *Analysis 1*, bei gleichzeitiger (z. T. geringfügiger) inhaltlicher Anpassung[16] und Umbenennung in »Analysis 1«.[17]

Höhere Mathematik

Exemplarisch sei zunächst die Inhaltsübersicht der *Höheren Mathematik I VO* des Studienjahres 2012/13 dargestellt:

i) Mengen (inkl. Mengenoperationen), Reelle Zahlen als »Zahlengerade« eingeführt, Komplexe Zahlen (über $i^2 = -1$ eingeführt)

ii) Funktionen (Definition ohne Relationen): injektiv, surjektiv, bijektiv, Rechnen mit Funktionen (addieren, subtrahieren usw.), Verkettung von Funktionen inkl. Umkehrfunktion, Monotonie ...

iii) Grenzwert und Stetigkeit: Häufungspunkte, Rechenregeln für Grenzwerte, Sandwichsatz und Substitutionsprinzip, ... Stetige Funktion (inkl. Hintereinanderausführung), Zwischenwertsatz, Satz von Weierstraß, Folgen (Definition, Konvergenz)

iv) Elementare Funktionen (Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion, Winkelfunktionen, Trigonmetrische Funktionen, Hyperbelfunktion)

v) Differentialrechnung: Differenzenquotient, Differentialquotient, Elementare Ableitungen, Ableitungsregeln, Mittelwertsatz, Satz von Rolle, Monotonie und 1.Ableitung, Lokale Extrema und 1. Ableitung, D'Hospital, Newtonverfahren, Krümmung und 2. Ableitung, Lokale Extrema und 2. Ableitung, Implizites Differenzieren, Kurvendiskussion

vi) Integralrechnung: Endliche Summen, Bestimmtes Integral, Riemanintegrierbarkeit, Unbestimmtes Integral, Elementare Stammfunktionen, Hauptsatz Differential und Integralrechnung, Substitutionsregel, Partielle Integration, Partialbruchzerlegung

Um den wenig rigorosen Zugang zu verdeutlichen sind nachfolgend zwei als typisch zu charakterisierende Übungsausgaben der *Höheren Mathematik I UE* angegeben:

Bestimmen Sie Definitionsbereich und Bild der Funktion

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} - 2\,.$$

Ist f injektiv? Besitzt f eingeschränkt auf $(4, \infty)$ eine Umkehrfunktion? Geben Sie diese (falls zutreffend) an.

15 Auch andere Universitäten haben ähnliche Angebote. Vergleiche dazu etwa das Buch [48] von Schichl und Steinbauer zur Lehrveranstaltung »Einführung in das Mathematische Arbeiten« an der Universität Wien.

16 Die genauen Inhalte der Lehrveranstaltungen des Bachelor-Mathematik-Studienplans ab WS 12/13 wurden in ein inoffizielles Dokument ausgelagert. Neu aufgenommen wurden:
Aussagen- Prädikatenlogik (elementar), vollständige Induktion; Naive Mengenlehre: Abbildungen, Abzählbarkeit.
Daneben ist der Zyklus im Bachelor dreiteilig, im Lehramt allerdings auch am WS 13/14 nur zweiteilig.

17 Arabisch Eins statt römisch Eins.

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, gelte $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$ in einem Häufungspunkt x_0 von D. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1 - 2f(x) - 3f(x)^2}{1 + f(x)^4}$$

und begründen Sie Ihre Rechnung.

Sind folgende Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Sind ihre Ableitungen stetig?

a) $f(x) = x \sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $f(0) = 0$.

b) $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $g(0) = 0$.

c) $h(x) = x^3 \sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $h(0) = 0$.

Es zeigt sich, dass sich durchaus ein beträchtlicher Teil der Aufgaben durch Skizzen veranschaulichen lässt. Insbesondere die Notationen und Inhalte per se sind schulnah. Argumentationen werden allerdings eingefordert, auch wenn kaum abstrakte Beweisaufgaben vorkommen. Von ca. 70 Aufgaben waren 5 Aufgaben eingekleidete Textaufgaben mit Anwendungsbezug (z. B. $m(t) = m_0 \exp[\lambda t]$ passend zum Wachstum einer Bakterienkultur finden).

Analysis 1

Im Gegensatz zu den Lehrveranstaltungen der *Höheren Mathematik I* handelt es sich bei der *Analysis 1* um eine typische rigorose Lehrveranstaltung für Mathematikstudierende, wie sie im deutschsprachigen Raum üblich ist. Es folgt die Beschreibung aus dem inoffiziellen Dokument der Mathematik-Institute der Uni Graz und der TU Graz zitieren:

> Inhalte (und Aufbau):
>
> Aussagen- Prädikatenlogik (elementar), vollständige Induktion; Naive Mengenlehre: Abbildungen, Abzählbarkeit; Axiomatik der reellen Zahlen (ohne Konstruktion), Ungleichungen; Komplexe Zahlen; Folgen (Grenzwerte, Häufungswerte, Bolzano Weierstraß, Konvergenzkriterium von Cauchy); Reihen, Potenzreihen; Stetige Funktionen; elementare Funktionen; Einführung in die Differentialrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen.

Sogenannte Zahlenbeispiele sind bei der Übung äußerst selten, meist sind allgemeine, mehr oder weniger abstrakte Aussagen nachzuweisen, die oft nur schwer zu veranschaulichen sind. Vom formalen und auch inhaltlichen Schwierigkeitsgrad sind diese Lehrveranstaltungen deutlich über der *Höheren Mathematik* einzustufen. Häufig fehlen Anknüpfungspunkte an schulisches Vorwissen, da viele der Themen in dieser Tiefe in der Schule nicht behandelt werden – auch wenn sie zum Teil angeschnitten werden. Die nachfolgenden Übungsaufgaben aus dem WS 12/13 zur *Analysis 1 UE* sollen einen Eindruck davon vermitteln:

Zeigen Sie die Ungleichung zwischen den arithmetischen und quadratischen Mittel der positiven Zahlen a_k $(k = 1, \ldots, n)$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

(Hinweis: Vorwärts-Rückwärts-Induktion ist eine Möglichkeit)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

gegen den selben Grenzwert konvergiert. Geben Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die die zugehörige Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei f in einer Umgebung von x differenzierbar und um Punkt x zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$fx) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht zweimal differenzierbar ist, obwohl der obige Grenzwert existiert.

3.3.3. Lineare Algebra

Inhalte der Linearen Algebra kommen im Lehramtsstudium im ersten Semester nicht vor, im Bachelorstudium dagegen schon (*Lineare Algebra 1*, VO und UE). Diese Lehrveranstaltungen können als typische Lineare Algebra-Lehrveranstaltungen für Mathematik-Studierende bezeichnet werden. Niveau und Zugang entspricht häufig gängigen Lehrbüchern für StudienanfängerInnen (z B. »Lineare Algebra« von Fischer [42] oder Jänich [49]). Die folgende Beschreibung entstammt wieder dem inoffiziellen Dokument der Mathematik-Institute der Uni Graz und der TU Graz zitieren:

Inhalt:

Vektorräume (über beliebigen Körpern) und grundlegende Eigenschaften (Basis, Dimension, Unterräume,...), lineare Abbildungen, Innere Produkte (inkl. ON-Basen, Orthogonalprojektion), Linearformen und der Dualraum, lineare Gleichungssysteme und Gauß Elimination, affine Unterräume und affine Abbildungen, Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Für gewöhnlich werden Vektorräume axiomatisch eingeführt, der $\mathbb{R}^n$ dient als typisches Anschauungsbeispiel für endlich dimensionale Vektorräume, der Vektorraum der Folgen oder Polynome für unendlich dimensionale. Die analytische Geometrie spielt in Vorlesungen höchstens eine untergeordnete Rolle, wird aber zum Teil für Übungsaufgaben herangezogen. Für Bachelor-Studierende bis zum Studienjahr 2011/12 war diese Lehrveranstaltung für gewöhnlich *die* mathematische Herausforderung im ersten Semester. Dadurch, dass diese Lehrveranstaltungen von den Lehramtsstudierenden erst im 3. Semester besucht werden, verfügt der Großteil der Studierenden damit bereits über mathematisches Werkzeug (Beweisstrategien usw., vgl. *Grundbegriffe der Mathematik*, Abschnitt 3.3.1). Dagegen müssen Bachelor-Studierende dieses Werkzeug erst im Rahmen der Lehrveranstaltung entwickeln.

4. Unterschiede und konzeptbedingte Problemfelder

In den beiden Kapiteln zuvor (2 und 3) wurde sowohl die Mathematik im Oberstufenunterricht der AHS dargestellt, als auch die universitäre Mathematik an der Uni Graz thematisiert. Nun werden beide Bereiche miteinander verglichen, um relevante Unterschiede und damit zu erwartende Problemfelder zu charakterisieren. Letztendlich werden dadurch (allgemeine) Ziele für Unterstützungsmaßnahmen (primär in Form eines Brückenkurses) formuliert, um den Studierenden bei den Übergangsproblemen während des Studieneinstieg zu verringern.

4.1. Geänderter didactic contract

Um die Unterschiede zwischen schulischen Mathematik-Lernen und akademischen Mathematik-Lernen strukturell auf unterschiedlichen Ebenen behandeln zu können, wird ein Begriff für den Rahmen, in dem gelernt und gelehrt wird, eingeführt, nämlich der *didactic contract*. Im Folgenden wird ein kurzer Abriss skizziert (zitiert nach [8], S.2ff): Brousseau [50] hat diesen Begriff zunächst (für den schulischen Unterricht) eingeführt, um »a system of rules, mostly implicit, associating the students and the teacher, for a given piece of knowledge« zu beschreiben. Daneben geht es um Verantwortungsverteilung zwischen Lehrenden und Lernenden, was nicht immer inhaltsspezifisch passieren muss. Nach Chevallard [51] ist die Aneignung von mathematischem Wissen zunächst an eine Institution gebunden, die den (mathematischen) Rahmen festlegt und demnach mehrere Komponenten mitbringt (z. B. Aufgabentypen, Lösungsmethoden usw.). Dieser Blickwinkel führt nun dazu, dass sich beim *(didactic) contract* verschiedenen Ebenen feststellen lassen:

i) einen *general contract*, unabhängig vom jeweiligen Wissen (z. B. Anwesenheitspflicht in der Schule, keine Anwesenheitspflicht in Vorlesungen, selbstständiges Mitschreiben usw.)[1]

ii) einen *didactic contract* für Mathematik allgemein (z. B. Notwendigkeit für Beweise)[2]

iii) einen *didactic contract* für spezifische mathematische Inhalte und deren Bedeutungen und Begriffe (beispielsweise Stetigkeit als »Bleistiftstetigkeit« zu behandeln, die Mehrdeutigkeiten von Objekten in der Linearen Algebra: Elemente eines Dualraums als Vektoren bzw. als lineare Funktion).[3]

Es ist wird (spätestens auf den nächsten Seiten) deutlich, dass sich die Institution Schule von der Institution Universität auf allen Ebenen des *didactic contracts* unterscheidet. Die Diskrepanzen und Probleme beim Studieneinstieg lassen sich demnach (auch) an der Änderung des *didactic contracts* und der (zunächst) unzureichenden Anpassung durch die Studierenden festmachen.

4.2. Allgemeinheit, Abstraktion, Axiomatik, Exaktheit und Formalisierung

Die Abstraktion stellt einen nicht zu unterschätzenden Unterschied zwischen Schule und Mathematik-Studium dar. In der Hochschulmathematik hat praktisch jedes Zeichen und jedes Wort einen großen

1 Im Folgenden als *didactic contract Ebene i) (allgemein)* bezeichnet.
2 Im Folgenden als *didactic contract Ebene ii) (Mathematik-allgemein)* bezeichnet.
3 Im Folgenden als *didactic contract Ebene iii) (inhaltsspezifisch)* bezeichnet.

Einfluss auf die Aussage, die vermittelt wird.[4] Das trifft einerseits die formale Notation[5], die keinen Spielraum für Interpretationen lassen darf und daher unmissverständlich sein muss, was zunächst mühsam sein kann. Das betrifft andererseits den Umgang mit den Inhalten selbst, wie diese in Beziehung zueinander stehen und was mit ihnen gemacht werden darf und was nicht:

> »Während es in der akademischen Mathematik einen engen Spielraum für die präzise gefassten Begriffe gibt und sich Mathematikerinnen und Mathematiker darüber im Klaren sind, dass die spezifischen Begriffsinterpretation im außermathematischen Kontext in der Regel nicht mehr gelten oder verstanden werden, so sind im Mathematikunterricht immer verschiedene Bedeutungsebenen präsent, angefangen von umgangssprachlichen Bedeutungen über Bedeutungszusammenhänge in Anwendungsbereichen bis hin zur fachmathematischen Bedeutung. « [10] S.247

Um diese Unterschiede zu verdeutlichen, wird die Einführung der ganzen Zahlen in der Schule und in der Hochschule verglichen:

- In der Unterstufe erfolgt die Einführung von $\mathbb{Z}$ durch außermathematisch motivierte, anschauliche Zugänge wie Thermometer, Schulden, Zahlengerade (mit Pfeilen) usw.
- An der Universität wird $\mathbb{Z}$ Menge von Äquivalenzklassen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (konstruktiver Zugang) oder als Gruppe der ganzen Zahlen eingeführt, bei der die Existenz eines additiv inversen Elementes gefordert wird (axiomatischer Zugang).

Allgemein muss festgestellt werden: Der an den Schulen in den letzten 30 Jahren (siehe [24], S. 131) vielfach didaktisch begründete Anwendungsbezug setzt sich nicht im ersten Semester bzw. Studienjahr in den Mathematik-Studien der Uni Graz fort. Vielmehr werden Probleme als innermathematische Fragestellungen oder unverkleidete Aufgaben gestellt (vgl. Abschnitt 3.3). Es ist zu erwarten, dass durch diesen fehlenden Anwendungsbezug für einige SchülerInnen eine wesentliche Motivationsquelle für Mathematik wegfällt.[6] Es ist naheliegend, dass eine Anwendungsorientierung in einem Unterstützungsangebot oder einem Brückenkurs kontraproduktiv ist, weil dieser Anwendungsschwerpunkt nicht im Studium weitergeführt wird. Dadurch würden Unterschiede und falsche Erwartungen nur zusätzlich generiert.

Des Weiteren gibt es einen fast prinzipiellen Unterschied zwischen Schule und Hochschule bzgl. der Überlegungen, wann welche Inhalte wie gelehrt werden. Das Spiralprinzip (nach Bruner) besagt: »Es empfiehlt sich nicht, die Erlernung eines Gegenstandes aufzuschieben, bis in einem Zug eine endgültig-abschließende Klärung erfolgen kann. Vielmehr sollen die Behandlung gerade der wesentlichen Punkte bereits auf früheren Stufen in entsprechend einfacher Form eingeleitet werden.« ([54], S.9) (vgl. auch [24], S.85 und [10], S.248) Das Spiralprinzip ist die Grundlage für Entscheidungen, wann und wie Inhalte in der Schule gebracht werden.[7] Dagegen richten sich die Inhalte an der Hochschule de facto weitgehend nach rein fachlichen Zusammenhängen und Schlüssen, also der Fachsystematik aus. Demzufolge werden Inhalte eines Themas praktisch sofort in ihrer Gesamtheit[8] und endgültigen Exaktheit (und damit fachlichen Korrektheit) eingeführt, um sich ein späteres Nacharbeiten zu ersparen. Damit verfolgt man von vornherein den Anspruch, »sämtliche« Inhalte eines Fachgebietes (z. B. Stetigkeit und eindimensionale Differentialrechnung) innerhalb eines Semesters[9] zu lehren und lernen zu lassen.

---

4 »This makes for very few redundant words, which means that almost every word in a mathematical expression conveys meaning. Unlike other forms of expression, particularly oral language, the written language of mathematics is very precise.«[52], S.17

5 Alcock und Simpson haben dafür den Begriff *rigour prefix* eingeführt, siehe [53], S.107. Intuitives Verständnis eines Konzeptes ist nicht mehr ausreichend – formale Strenge und Exaktheit bei den Definitionen usw. dagegen notwendig.

6 Es muss jedoch angemerkt werden, dass Anwendungsbezug per se zu keiner Motivaitionssteigerung führt, vgl. [24] S.133.

7 Bis zum Ende der Oberstufe nähern sich die Inhalte und Schreibwesen bis zu einem gewissen Grad dadurch an die Hochschulmathematik an, etwa bei der Notation von Grenzwerten $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

8 Dass dabei aber immer wieder aus fachlicher Sicht Abstriche gemacht werden, lässt sich nicht leugnen. Mittlerweile ist es z. B. nicht mehr Üblich, den Vektorraumbegriff als Spezialfall von Moduln (Körper ein Ring) einzuführen oder Differenzierbarkeit über Banachräume (mit dem Spezialfall der reellen Zahlen) zu behandeln – zumindest, was AnfängerInnen-Lehrveranstaltungen momentan in Graz betrifft, vgl. 3.3

9 Große Themengebiete wie die Lineare Algebra werden üblicherweise auch auf einige wenige aufeinanderfolgende Semester aufgeteilt.

Ein prinzipieller Unterschied zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik ist die (fehlende) Axiomatik[10] (vgl. [10], S.248). Wissenschaftliche Mathematik ist dadurch gekennzeichnet, dass anfangs nur mit den festgelegten Axiomen gearbeitet werden darf[11], dass daraus alle weiteren Gesetzmäßigkeiten, Rechenregeln und Aussagen (»Sätze«) abgeleitet (deduziert) werden müssen – um dadurch ein mathematisches Teilgebiet als ein in sich (logisch) schlüssiges, zusammenhängendes, systematisches Konstrukt zu erhalten. »Während die fachwissenschaftliche Mathematik seit Hilberts Programm durch die Axiomatik und die Möglichkeit der Formalisierung geprägt wurde, spielen axiomatischer Aufbau und auch Formalisierung in der Schulmathematik nur eine geringe Rolle« ([10], S.248).[12] Damit sind die Positionen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik zunächst geklärt (zumindest für die Lehrveranstaltungen der Analysis und die Lineare Algebra an der Uni Graz).[13]

Aus inhaltlicher Sicht stellt man auch in der Schulmathematik einen gewissen Aufbau fest, der allerdings nicht axiomatisch geprägt ist, siehe [10], S.248. Beispielsweise wird zwar der Zahlbegriff von $\mathbb{N}$ bis zu $\mathbb{C}$ im Lauf der Unterstufe bis zur Oberstufe Schritt für Schritt erweitert, aber dieser Zahlbegriff wird weitgehend durch außermathematische Anwendungen oder intuitiv eingeführt und eben nicht mit einem deduktiven[14] Zugang. Üblicherweise wird daher die Notwendigkeit oder das Vorhandensein von Axiomen nicht explizit thematisiert, weil der intuitive Anwendungs- und Entwicklungscharakter der Schulmathematik diesen Zugang nicht erfordert bzw. dadurch nur erschwert würde.– immerhin nähert sich die mathematische Darstellung im Lauf der Oberstufe jener der Universität an (vgl, [10], S.248-249). Trotzdem kann nicht davon ausgegangen werden, dass SchülerInnen ein logisches Verständnis von deduktiver Mathematik an die Universität mitbringen, was demgegenüber bei einer üblichen *Analysis 1* Vorlesung im ersten Semester als selbstverständlich dargestellt wird. An der Uni Graz im Mathematik-Lehramt stellt sich im WS 12/13 im ersten Semester dieses Problematik nicht sehr drastisch dar (vgl. Abschnitt 3.3.2).[15]

Trotz dieser fehlenden Axiomatik in der Schule kann der inhaltliche Aufbau eines Themengebietes weitgehend konsistent gehalten werden. Man verfolgt hier die Idee des lokalen Ordnens (vgl. [10] S. 249), bei der man innerhalb eines Teilgebiets auf als »offensichtlich« richtig vorausgesetzte Aussagen aufbaut und wie üblich weitere Aussagen in einen Zusammenhang mit diesen bringt und aus ihnen weitere Aussagen ableitet. Damit betreibt man innerhalb eines kleineren Teilgebietes (daher »lokal«) durchaus schlüssige Mathematik. Diese unmittelbaren klaren Aussagen übernehmen dabei laut [10] (S.249) implizit die Rolle von Axiomen, die ansonsten die Ausgangsbasis beim globalen Ordnen[16] der Hochschulmathematik bilden. In Abschnitt 4.3 wird auf die Folge dieser Unterschiede bzgl. Axiome im Zusammenhang mit Beweisen und Argumentieren weiter eingegangen.

---

10 Ein Axiom ist eine postulierte Aussage bzw. Satz, die bzw. der als (logisch) wahr vorausgesetzt wird, siehe [24], S.151. Ein Axiomensystem ist daher eine Menge von Sätzen, aus denen man die weiteren Aussagen einer Theorie beweisen kann (S.152). Ein Axiomensystem muss dabei widerspruchsfrei und soll minimal sein, d. h. ein Satz und seine Negation können nicht gleichzeitig hergeleitet werden und keines der Axiome lässt sich aus den anderen herleiten (die Axiome heißen dann unabhängig). Beispiele sind etwa die Gruppenaxiome, die Vektorraumaxiome, die Axiome der reellen Zahlen oder die ZFC-Axiome (Zermelo-Fraenkel-Axiome mit dem »axiom of choice«, dem Auswahlaxiom) für die Mengenlehre.

11 Damit ist die Ausgangsbasis klar definiert – wenn auch Lernende nicht immer unmittelbar nachvollziehbar.

12 Vergleiche auch einen Zugang von Tall [55], der das mathematische Denken in 3 »Welten« unterteilt (zitiert nach [10], S.256): die eingebettete Welt (mathematische Objekte als Gegenstände, z. B. Elementargeometrie), die proceptual-symbolische Welt (Prozesse können auf symbolische Darstellungen wirken, z. B. Arithmetik) und die formal-axiomatische Welt (Aufbau auf postulierten Eigenschaften und deduktivem Vorgehen). Schulmathemtaik ist in den ersten beiden Welten angesiedelt – Hochschulmathematik arbeitet dagegen erstmals (auch) in der formal-axiomatischen Welt.

13 Die *Höhere Mathematik* geht an der Uni Graz einen etwas anderen Weg und kommt ohne die Axiome der reellen Zahlen aus. Nichtsdestotrotz kann der fachliche Aufbau als deduktiv im Sinne von konsistent-aufbauend bezeichnet werden. Vgl. Abschnitt 3.3.2.

14 Üblich sind die beiden Zugänge: Die Axiome von $\mathbb{N}$ führen durch geeignete Konstruktion von Relationen und Äquivalenzklassen zunächst zu $\mathbb{Z}$, dann zu $\mathbb{Q}$ und über z. B. Dedekindsche Schnitte zu $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ wird dann als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit passenden Verknüpfungen eingeführt (bottom-up-Weg). Der alternative top-down-Weg beginnt mit der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen, definiert $\mathbb{N}$ und leitet daraus die Eigenschaften der anderen Zahlenbereiche ab, wie es in einer Analysis-Lehrveranstaltung meist üblich ist.

15 Der Mathematik-Lehramtsstudienplan an der Uni Graz bis zum WS 12/13 sieht diesen strengen, axiomatischen Aufbau im Wesentlichen erst ab dem 3. Semester (Lineare Algebra) vor. Die (rigorose) *Analysis 1* ist erst im 5. Semester vorgesehen. Die *Höhere Mathematik* im ersten Studienjahr kann grob als eine intuitive *Analysis* ohne Axiomatik der reellen Zahlen aufgefasst werden – im Abschnitt 3.3 wurde sie als Calculus-artig beschrieben. Beweise spielen – wie erwähnt – nur eine untergeordnete Rolle. Die *Grundbegriffe der Mathematik VU* im ersten Semester beginnt zwar sehr grundlegend (Mengenlehre, Relationen, Funktionen), behandeln den axiomatischen Zugang an sich allerdings eher als Fußnoten (vgl. dazu das Skriptum zur Lehrveranstaltung [56]).

16 Als *globales Ordnen* kann der Prozess der Systematisierung eines gesamten Teilgebietes aufbauend auf den Axiomen verstanden werden.

Neben diesem fundamentalen Unterschied im Hinblick auf Axiomatik zeigt sich der Unterschied bzgl. der Abstraktion[17] zwischen Schul- und Hochschulmathematik eher als gradueller [57]. D. h. auch in der Schule wird Mathematik auf einem gewissen Niveau abstrakt beschrieben, allerdings niedriger und weniger häufig. Darüber hinaus zeigt sich in der Schule der Nutzen von Abstraktion weniger deutlich, weil das Hauptaugenmerk kaum auf die vorhandenen (algebraischen) Strukturen gerichtet ist. So ist ein Thematisieren der Vorteile der Abstraktion selten möglich. Allerdings bietet die Schulmathematik durchaus Bezug dazu: Insbesondere die Differentialrechnung zeigt sehr deutlich die Stärken vom »Platzhalter-Konzept«, beispielsweise bei Resultaten wie $(f+g)' = f' + g'$ oder bei der Kettenregel, wo durchaus stark auf den formalen Aspekt der Hintereinanderausführung eingegangen werden kann.[18]

Das klassische Beispiel dafür, dass in der Schule für das Universitätsniveau zu wenig auf die algebraischen Strukturen eingegangen wird, ist der Vektorraum-Begriff, dessen schulische Wert nur geometrisch im Sinne der analytischen Geometrie herausgearbeitet wird (vgl. Abschnitt 2.3.3). Dagegen zeigt sich der umfassende Wert dieses Konzeptes, wenn man die zu Grunde liegenden Strukturen (Addition von Vektoren, Multiplikation mit einem Skalar usw.) als abstrakte Platzhalter verwendet. Als Beispiel sei hier der Vektorraum der Polynome, Folgen oder Funktionen erwähnt. In Abschnitt 6.3.4 wird diesbezüglich näher darauf eingegangen.

Letztlich wird in der Schule häufig mit einigen wenigen Repräsentanten eines mathematischen Begriffs gearbeitet, ohne zu thematisieren, dass es sich dabei nur um einen Repräsentanten handelt und nicht um das (abstrakte) Objekt selbst. Es fehlen dafür einerseits Repräsentanten, andererseits der Fokus auf die Strukturen. So wird etwa der $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als *der* Vektorraum präsentiert, reelle Zahlen nicht als Menge, welche sich durch ihre Rechenregeln (Körper), ihre Anordnung (Totalordnung) und Vollständigkeit auszeichnet, oder die Hintereinanderausführung von Funktionen nicht als besondere Form der Verknüpfung von zwei Elementen (auf eine in der Schule nicht explizit vorhandenen Menge von Funktionen).[19]

Ausgehend von diesen Unterschieden bzw. Problematiken des *didactic contract* auf den Ebenen ii) (Mathematik-allgemein) und iii) (inhaltsspezifisch) (vgl. Abschnitt 4.1) werden folgende Ziele formuliert:

Ein Brückenkurs soll einen ersten Beitrag leisten, die Notwendigkeit und die Sinnhaftigkeit von exakten Aussagen zu thematisieren. Damit einher geht die Darstellung des Nutzens von (symbolischer) Fachsprache. Strenge Axiomatik zu vermitteln bleibt als Ziel den jeweiligen Lehrveranstaltungen überlassen, kann aber in einem Brückenkurs als Ausblick vorgestellt werden.[a]

Im Zusammenhang der Exaktizifierung können exakte Definitionen und Aussagen bei bereits weitgehend bekannten Inhalten (z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) und der Umgang damit kennen gelernt werden. Eingestreute, ungewohnt abstrakte Themen und Zugänge bieten sich als Lernchancen zur Weiterentwicklung an (»formale Bildung«) und können als innermathematische Motivation dargestellt werden.

a Es ist stark zu bezweifeln, dass innerhalb kurzer Zeit (2 Wochen) in einem Brückenkurs wirklich verstanden werden kann, was Axiomatik bedeutet und welche Auswirkungen sie für die Mathematik, etwa für die Analysis, hat.

17 Tall [55] S.11 unterscheidet dabei zwischen *generalization* (Generalisierung, Verallgemeinerung) und *abstraction* (Abstraktion): Eine *generalization* liegt vor, wenn Eigenschaften eines Objektes auf andere erweitert werden können, etwa Rechenregeln vom $\mathbb{R}^2$ über den $\mathbb{R}^3$ zum $\mathbb{R}^n$. Die *abstraction* dagegen definiert ein abstraktes Objekt ausgehend von Axiomen, etwa einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$.

18 Das setzt voraus, dass klar zwischen Funktionen und den Funktionsvorschriften bzw. den Funktionswerten unterschieden wird. Falls es im Unterricht als »im Prinzip ein und dasselbe« bei den SchülerInnen ankommt, fällt es schwer zu argumentieren, warum plötzlich mehr Wert auf die Ebene der Funktionen gelegt werden soll.

19 Gerade in diesem Punkt sehe ich im Studium eine große (innermathematische) Motivationschance für das Abstrakte, für das Neue in der Hochschulmathematik – und eine wichtige Ausgangsfrage, welchen Nutzen abstrakte Mathematik bringt.

4.3. Beweisen und Argumentieren

Der Beweis einer mathematischen Aussage ist dadurch charakterisiert, dass »man aus gegebenen Voraussetzungen mit Hilfe schon bewiesener Sätze oder Axiome nach bestimmten logischen Schlußregeln die Behauptung herleitet.« [24] S.151. Die Unterschiede bzgl. Beweisen und Argumentieren zwischen Schule und Hochschule sind auf mehreren Ebenen gegeben und äußern sich in den Antworten auf folgende Fragen:

i) Worauf darf/muss ein Beweis aufbauen?

ii) Wie soll/muss ein Beweis dargestellt sein?

iii) Welchen Nutzen kann/soll/muss ein Beweis bringen?

Die Antworten auf diese Fragen erwachsen aus dem zu Grunde liegenden Aufbau (globales vs. lokales Ordnen), dem angestrebten Abstraktions- und Formalisierungsgrad sowie dem Anspruch, ob Mathematik entwickelt werden soll oder als abgeschlossenes, konsistentes System dargestellt werden soll. Die folgenden Abschnitte versuchen die Antworten auf diese Fragen (in dieser Reihenfolge) zu geben.

Unterschiedliche Ausgangsbasis (Argumentationsbasis) an Schule- und Hochschule

Während in der Hochschule durch den systematischen Aufbau für Fortgeschrittene (meist)[20] klar ersichtlich ist, welche Argumente und Sätze für den Beweis einer neuen, noch unbewiesenen Aussage herangezogen werden dürfen, stellt sich die Lage in der Schule (für die SchülerInnen) weniger transparent dar. Aus diesem Grund wird ein mathematisches Fundament (zumindest für die Lehrkraft) festgelegt, das unter dem Begriff »Argumentationsbasis« zusammengefasst wird. Es dreht sich um folgende Fragen:

> »Welche Schlussregeln betrachtet man als zulässig? Was versteht man unter richtig, ausreichend abgesichert, einleuchtend oder evident, welche Begründungsform steht im Vordergrund? Auf welche als richtig angesehene Sätze greift man beim Begründen zurück? Was versteht man unter den in der Behauptung vorkommenden Begriffen?« [24] S.160

Insbesondere müssen diese Aspekte für die SchülerInnen transparent werden, damit sie von Beweisen bzw. Argumentationen in der Schule aus mathematischer Sicht profitieren können. Dabei ist die oft unklare Rolle von Definitionen und Sätzen (vgl. [24] S.163) nicht zu unterschätzen. Der Begriff der Argumentationsbasis lässt sich auf die Hochschulmathematik übertragen, er beinhaltet dann den axiomatischen Aufbau und die damit verbundenen Ansprüche. Daher unterscheidet sich die hochschulische Argumentationsbasis deutlich von der schulischen – eine Änderung des *didactic contract* auf Ebene iii) (inhaltsspezifisch) ist festzustellen. Dadurch ist es praktisch unvermeidbar, dass es für die Erstsemestrigen zu Anpassungsschwierigkeiten kommt, insbesondere dann, wenn die Unterschiede nicht bewusst wahrgenommen werden. Der neue *didactic contract* legt nämlich auch für jede Lehrveranstaltung das erlaubte mathematische Wissen fest.[21] In fachsystematischen Lehrveranstaltungen ist es meist üblich, dass nur jenes Wissen verwendet werden darf, dass in der Lehrveranstaltung erarbeitet wurde.[22]

Durch die weniger strenge Argumentationsbasis ergibt sich in der Schule ein größerer Spielraum, was als »Beweis« gilt. Tietze [24] (S.158) hält unter anderem folgende Formen von Begründungen und Argumentationstypen fürden schulischen Unterricht fest:

- Plausibilitätsargumente (kein Beweis im hochschulmathematischen Sinn) (Überprüfung an konkreten Einzelfällen, Verweisen auf ähnliche Sachverhalte usw.)
- Wahrscheinlichkeitsargumente (Verwendung von Computersoftware z. B. mit Schieberegler)

---

20 In Übungen gibt es trotzdem immer wieder Unklarheiten, welche Aussagen verwendet werden dürfen, insbesondere dann, wenn sich Studierende z. B. nicht nur auf die Inhalte der Vorlesung stützen, sondern andere Literatur verwenden.

21 Zum Bedauern der Studierenden leider nicht immer ausreichend transparent – was zu Unklarheiten darüber führt, was vorausgesetzt werden darf und was nicht.

22 Probleme diesbezüglich ergeben sich etwa in der *Linearen Algebra 1* beim Einführen des Körpers und darauf aufbauend beim Vektorraum-Begriff, wenn plötzlich (aus der Schule selbstverständliche) Aussagen wie $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ oder $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ definiert oder bewiesen werden müssen.

- Allgemeingültige Argumentation:
  - **i)** präformaler Beweis (enaktiv[23], inhaltlich-anschaulich[24]) oder eine übertragbare Einzelfallstrategie
  - **ii)** formal deduktiver Beweis (vor dem Hintergrund einer mathematischen Theorie).

Damit wird deutlich, dass der schulische Unterricht im Allgemeinen nicht die universitären Ansprüche im Hinblick auf inhaltliche Konsistenz erfüllt.

Unterschied in der äußeren Form bzw. Schreibweise des Beweises

Neben den Unterschieden in der Argumentationbasis zeigt sich ein für Erstsemestrige nach außen hin sofort sichtbarer Unterschied in der Darstellungsform von Beweisen an der Hochschule: Die formalen Kurzschreibweisen (Existenz- und All-Quantor, Implikationspfeil und Äquivalenzpfeil) in Kombination mit ihrem exakten Umgang, die Verwendung von Indizes, indizierten Indizes und Summenzeichen, die Notwendigkeit des Einführen von Namen von (abstrakten) Objekten (z. B. » Sei $x \in M$. Dann gilt...«). Allein die Optik stellt bereits – unabhängig vom fachlichen Inhalt – ein Anpassungsnotwendigkeit dar. Je schneller die Erstsemestrigen mit den neuen Notationen (und ihrem Regelwerk) zurecht kommen, desto eher können sie sich auf die inhaltliche Ebene konzentrieren. Insbesondere gilt das auch für die Logik, die im Lehrplan der AHS nicht vorgesehen ist (vgl. Abschnitt 2.3).

Unterschied im Nutzen des Beweises

Durch die Klärung, was ein Beweis ist, wird der Nutzen eines Beweises für die Fachwissenschaft, die Überprüfung der Richtigkeit einer Aussage, unmittelbar einsichtig. Daneben wird der Schwerpunkt auf den fachsystematischen Aufbau eines mathematischen Teilgebietes sowie auf die Zusammenhänge deutlich.[25]

In der Schulmathematik haben Beweise die Aufgabe, den SchülerInnen klarzumachen, dass etwas gilt und warum etwas gilt [24] S.166. Es geht also eher um die Klärung von Sachverhalten (der Prozess ist der Gewinn), nicht um den Nachweis der Richtigkeit (das Resultat ist der Gewinn), was oft der Schwerpunkt von Beweisen in Lehrveranstaltungen an der Hochschule scheint.[26] Insbesondere durch inhaltlich-konkrete Beweise sollen die Themen an Klarheit für die SchülerInnen gewinnen. Daneben ist selbstverständlich auch das Begründen als »allgemein verhaltensbezogene Qualifikation« zu nennen, wo Argumente aufgestellt, geprüft und überarbeitet werden sollen [24], S.167. Das Beweisen in der Schule ist dennoch ein Problem an sich:

> »Die vielfältigen Differenzen in der Argumentationsbasis zwischen Lehrer und Schülern und die übliche Beweispraxis im Unterricht führt dazu, daß sich Schüler im unklaren darüber sind, wann etwas ein Beweis ist, welcher Grad der Exaktheit (zugelassene Argumentationsbasis, Grad der Formalisierung) erwartet wird und wie detailliert die Beweisschritt sein sollen.« [24] S.164

23 Als Beispiel für einen enaktiven (= handlungsbezogenen Beweises) sei hier auf Kirsch, zitiert nach [24], S.156) verwiesen: Zu zeigen ist: Der Umfang eines konvexen Vierecks ist größer als die Summe der beiden Diagonallängen.
Dazu werden die Eckpunkte des Vierecks $ABCD$ durch vier eingeschlagene Nägel repräsentiert. Gegenüberliegende Eckpunkte werden je durch ein Gummiband verbunden. Nun zieht man jedes der Gummibänder über die von diesem noch unbedeckten Eckpunkten, wodurch wir jeweils erhalten: $U \geq 2e$ sowie $U \geq 2f$. Somit ergibt sich auch $U \geq e + f$. Das formale $\geq$ wird dabei durch das notwendige Dehnen der Gummibänder umgesetzt.

24 Unter einem inhaltlich-anschaulichen Beweis versteht man eine Kette von korrekten Schlüssen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen. Im wesentlichen muss dieser Beweis von seiner Idee her auf einen formal-deduktiven Beweis übertragbar sein, siehe [24] S.156ff.

25 Ein illustratives Beispiel findet sich bei den reellen Zahlen: Die Zugänge über Cauchy-Folgen, über Dedekindsche Schnitte, über Intervallschachtelung oder über die Supremumseigenschaft sind logisch gleichwertig.

26 Bei (notations)technisch mühsamen Beweise etwa geht die Kernidee mitunter sogar verloren. Beweise über mehrere Seiten erschweren es, die zentralen Ideen zu erkennen. Beweise werden geführt, um zu zeigen, dass man den Beweis führen kann – die Sinnfrage wird nicht gestellt. Es ist zu hinterfragen, ob Beweise als »Reflex« auf das Wort »Satz« das Verständnis der Studierenden und deren Haltung zum Thema Beweisen positiv beeinflussen.

Problematischerweise stellt man dabei fest, dass die umgangssprachliche Logik nicht immer mit den mathematischen Konventionen übereinstimmen [24] S.163 – und dadurch von vornherein Hürden vorprogrammiert sind. Die Hochschulmathematik beruht nichtsdestotrotz auf logischen Konventionen, die deshalb zwingend von den Erstsemestrigen (möglichst schnell) angenommen werden müssen, wenn diese in der universitären Mathematik handlungsfähig sein wollen.

Kommen nun beim Studieneinstieg die akademischen Ansprüche ins Spiel, so kommt es notwendigerweise zu Problemen: Haben SchülerInnen in der Schule Beweise geführt, so müssen sie sich (schnell) an die neuen Spielregeln anpassen (und dürfen die alten Argumentationsbasen nicht mehr nutzen). Haben die SchülerInnen dagegen in der Schule kaum Beweise[27] geführt, so werden sie mit einem völlig neuen Aspekt der Mathematik konfrontiert, den es umzusetzen gilt, was hohe Anforderungen an die mathematischen und kognitiven Anforderungen stellt.

Letztendlich zeigt sich auch beim Thema Beweisen deutlich, dass sich der *didactic contract* auf Ebene ii) (Mathematik-allgemein) sowie Ebene iii) (inhaltsspezifisch)[28] in der Schule und in der Hochschule voneinander unterscheiden. Als ein großes Ziel für den Brückenkurs wird daher formuliert:

> Es soll zunächst ein Bewusstsein für die Beweisbedürftigkeit und den Ausgangspunkt von a) bekannten und b) neuen mathematischen Inhalten geschaffen werden. Es sollen erste Erfahrungen mit Beweisen durch Vortrag (Lernen am Modell) und Selbsttätigkeit gemacht werden. Es soll die Argumentationsbasis möglichst transparent dargestellt werden, was insbesondere eine Klärung der logischen Konventionen bedarf.

4.4. Unterrichtsmethoden, Wissensvermittlung und Selbstständigkeit

Neben den Unterschieden im grundlegenden Konzept der Mathematik an sich zeigen sich Unterschiede auch sehr deutlich in der Form der Wissensvermittlung bzw. Wissensaneignung. In der Sprache des *didactic contract* aus Abschnitt 4.1 betrifft das primär die Ebene i) (allgemein), also den *general contract*: Statt der 50-Minuten-Einheiten mit Methodenmix aus der Schule treten der Vorlesungsbetrieb und der Übungsbetrieb an deren Stelle.

Während in der Schule mathematische Inhalte nur in Form von kleinen »Häppchen« – unterbrochen durch zahlreiche Verständnisrückfragen, LehrerInnen-SchülerInnen-Gespräche, weitere Erklärungsversuche sowie sofortige Übungsbeispiele – präsentiert werden, geht man an der Hochschule traditionell den Weg des maximalen Inhalts in minimaler Zeit. Das heißt: Vortrag an Tafel oder mit Beamer, kaum unterbrochen durch Fragen seitens der Lehrenden oder der Studierenden (= traditioneller Vorlesungsbetrieb). Insbesondere wird die Präsentation von Theorie (d. h. Definitionen, Sätze, Beweise) kaum durch unzählige, vollständig durchgerechnete Beispiele ergänzt. Das hat den Vorteil, mehr Theorie in kürzerer Zeit präsentieren zu können, wodurch die Inhalte nicht völlig zerstückelt werden. Durch diesen inhaltlichen Fluss ist die Chance zunächst höher, Zusammenhänge besser zu vermitteln, sofern es die Studierenden schaffen, die Inhalte weitgehend simultan zu verarbeiten. Allerdings erfordert diese Methode auch eine Anpassung seitens der Studierenden:

- Ein verstärktes Interesse (bzw. zumindest Akzeptanz) an mathematischer Theorie, da im Allgemeinen in der Vorlesung rund 3 Stunden Theorie gebracht werden wohingegen in Übungen nur 1,5 Stunden Übungsaufgaben besprochen werden.
- Die Fähigkeit, einem mathematischen Fachvortrag über die Dauer von 45 bis 90 Minuten sowohl von der Konzentration, als auch von den Inhalten und dem Vortragstempo folgen zu können – also insbesondere aktiv mitzudenken, vorhandenes Wissen zu aktivieren und neues Wissen ausreichend schnell einzuordnen.

27 Auf Beweise in der Schule zumindest in den 80ern in den Grundkursen (in Deutschland) wurde weitgehend verzichtet [24] S.165. Die aktuelle Lage in Österreich dürfte sich (auch jetzt noch) nicht wesentlich unterscheiden: Bei Präsenzumfragen bei Infoveranstaltungen (vgl. 7.1) gibt meist etwa nur die Hälfte an, in der Schule Beweise behandelt zu haben.
28 Mehr dazu im Abschnitten 6.3.)

- Die Fähigkeit, die präsentierten Inhalte sinnvoll und dauerhaft zu verarbeiten können, also insbesondere mitschreiben zu können (vor allem, wenn es kein Skript zur Lehrveranstaltung gibt). Diese Problematik ist am Studienbeginn nicht zu unterschätzen, wenn das Vortragstempo (sehr) hoch ist. SchülerInnen sind es kaum gewohnt, zügig und strukturiert mitzuschreiben, weil das Tempo in der Schule im Allgemeinen (sehr) niedrig ist.[29] Auch eine passende Form und Gliederung der Mitschrift erleichtert das Lernen in Vorlesungen.
- Die Fähigkeit, aktiv und vor allem eigenverantwortlich reagieren zu können, falls man in der VO nicht ausreichend profitiert. Damit eingeschlossen sind eine passende Nachbereitung, falls nötig, sowie eine etwaige Vorbereitung auf die VO. Es scheint so, dass die Notwendigkeit für eine Nachbereitung der Inhalte in der Schule bei (den in der Schule leistungsstärkeren) SchülerInnen kaum gegeben ist, aber im Lauf des ersten Semester doch häufig entsteht. Erstsemestrige scheinen damit überfordert zu sein, was sich z. B. in Frustration über die als zu hoch empfundenen fachlichen Anforderungen oder in Beschwerden über die fehlende Relevanz für den späteren Lehrberuf zeigt. Geeignete Strategien, damit umzugehen, müssen z. T. entwickelt werden.

Die Studierenden sollen sich an die Wissensvermittlung per Vortrag durch den typischen Ablauf einer Vorlesung gewöhnen, um schon vor dem Studium zu überprüfen, ob sie mit dieser Lernform zurecht kommen. Dadurch erhalten sie Gelegenheit, für sich geeignete Strategien zu entwickeln, die sie im Rahmen ihrer Eigenverantwortung anwenden können/müssen.

Das zweite Standbein der universitären Lehre sind die Übungen, in denen die Studierenden aktiv arbeiten müssen (= Übungsbetrieb). Im Gegensatz zur Schule ist der Übungsteil oft organisatorisch weitgehend vom Theorie-Teil getrennt, was wieder eine Reihe von (evtl. ungewohnten) Anforderungen an die Studierenden stellt:

- Studierende müssen es großteils selbstständig schaffen, die in der VO vermittelte mathematische Theorie (Definitionen, Sätze, Beweisstrategien) auf Übungsbeispiele anzuwenden, ohne dass zuvor unzählige Analogiebeispiele vorgezeigt werden.[30] Insbesondere müssen Studierende auch völlig neuartige Inhalte übertragen können (Transferleistung), wenn zuvor kaum konkrete Aufgaben und ihre Lösungen zu dieser Theorie bekannt sind. In der Schule kommt das selten vor. Daneben wird in der Schule auch Üben in Form von »einschleifen« praktiziert, was einem ungeschriebenen Gesetz an der Universität widerspricht: »So wenige Aufgaben vom selben Typ wie möglich.« Die Tutorien (vgl. Abschnitt 3.2.3) versuchen diese Philosophie etwas zu entschärfen.
- Studierende müssen selbstständig Beweise zu mathematischen Aussagen liefern können, die auf bisher vermittelter Theorie aufbauen. Insbesondere müssen also Beweisideen, Beweistechniken sowie die konkrete Umsetzung in formal korrekte Beweise beherrscht werden. In der Schule wird das de facto nicht bis kaum verlangt.[31]
- Studierende sind gefordert, Verantwortung in der Übungsgruppe zu übernehmen und ihre Ergebnisse per Tafelpräsentation darzustellen. Dabei dürfen folgende Aspekte nicht unterschätzt werden: Das Vorrechnen an der Tafel ist eine Prüfungssituation und setzt eine ausreichende didaktische und fachliche Qualifikation voraus, falls die Mitstudierenden davon profitieren sollen. Diese Situationen treten im schulischen Alltag nicht immer auf.
- Lernen an der Universität ist im Rahmen des *didactic contract* ein weitgehend eigenverantwortlicher Prozess, in dem primär die (volljährigen) Lernenden für ihren Lernerfolg zuständig sind. Im Vergleich zur Schule kann man daher von einer Verschiebung der Verantwortung von den Lehrenden auf die Lernenden feststellen. Diese Selbstständigkeit ist eine große personelle, organisatorische Herausforderung – vor allem dann, wenn es zu Lernschwierigkeiten kommt. Der Umgang mit Problemen und Fehlern erfordert passende Strategien sowie Wissen über Unterstützungsangebote (z. B. Bibliothek) und die Bereitschaft, sich mit den Problemen zu befassen.

29 Das Tempo orientiert sich in der Schule meist an den (langsameren) SchülerInnen, während sich das Tempo in Lehrveranstaltungen oft an der (maximalen) Schreib- und Sprechgeschwindigkeit der Lehrenden orientiert.
30 Vgl. [10], S.254: Mathematische Prozesse und Tätigkeiten seitens der Lehrenden bleiben oft implizit, wodurch die Studierenden diesbezüglich nicht angeleitet werden und beim Aufgabenlösen damit alleine bleiben.
31 Das ist zumindest die Erfahrung des als Studienvertreter, erhalten durch zahlreiche Gespräche, Umfragen und Tutorien.

- Trotz dieser Eigenverantwortlichkeit ist besonders in der Mathematik der Team-Aspekt im Allgemeinen ein wesentlicher Faktor im Studienalltag. Es ist unklar, in wie weit schulische Vorerfahrungen dazu vorausgesetzt werden können. im schulischen Alltag eine Rolle spielen. Gruppenarbeit im Studium setzt Bekanntschaften bzw. Freundschaften voraus, sowie eine ausreichende Sozialkompetenz (Rücksicht auf andere zu nehmen usw.) und eine passende Organisation.

Letztendlich führt die Einführung des Übungsbetriebes mit der Lernleistung der Studierenden vor der Lehrveranstaltungen zu einer drastischen Änderung des *didactic contract*. Folgende Verschiebungen lassen sich feststellen: einer Verantwortungsverschiebung (Lehrende → Lernende), eine Zeitverschiebung (Leistungen *während* der Lehrveranstaltung → *außerhalb* der Lehrveranstaltung), Schwerpunktsverschiebung (Beispiele → Theorie). Ein Brückenkurs kann hier unterstützend ansetzen.

Die Studierenden sollen sowohl organisatorisch, als auch inhaltlich und methodisch auf die universitären Lernformen und den neuartigen Übungsbetrieb hinführen. Damit verbunden ist die Erhöhung von (mathematischer) Selbstständigkeit anzustreben. Daneben soll den Studierenden der Nutzen von Teamarbeit klar werden (z. B. als Kontrollfunktion). Darüber hinaus sollen prinzipielle Hilfestellungen gegeben werden, wie mit fehlendem Wissen oder Verständnisproblemen konstruktiv umgegangen werden kann.

4.5. Vorwissen und obstacles

Untersuchungen zeigen, dass zumindest Grundkompetenzen[32] der Sekundarstufe I längerfristig erhalten bleiben (auch nach einem Studium ohne Mathematik-Anteile) (siehe [10] S.242): »Die Klagen mancher Hochschullehrer und das subjektive Gefühl vieler Studierender ›in Mathe gar nichts mehr zu können‹ müssen folglich zumindest relativiert werden.« Daneben relativieren die Autoren die Generalisierung dieser Ergebnisse (ebendort). Es wird weiters festgestellt, dass diese Grundkompetenzen zwar notwendige, aber keine hinreichenden Fähigkeiten für ein Studium mit gehobenen Anforderungen in Mathematik sind.[33] Neben den verstärkt notwendigen (technischen) Rechenfertigkeiten seien auch Inhalte aus der Oberstufe nötig, um zu bestehen. Insgesamt wird erheblich relativiert, wie Mathematikstudien-tauglich der Großteil der Schüler und Schülerinnen wirklich ist.

Nichtsdestotrotz hängt der Lernerfolg wesentlich davon ab, dass die Vorkenntnisse in klarer, stabiler und zusammenhängender Form vorhanden sind [54] S.15. Darüber hinaus sei, wenn Neues gelernt werden soll, ein ein Weg angemessen, der die Vorerfahrung akzeptiert und diese bei der Beschreibung mathematischer Inhalte mit einbezieht [24] S.83 – also auf Vorwissen anknüpft bzw. in einen Zusammenhang bringt. Zusätzlich sei das Ausgehen von Ankerideen (leicht zugängliche Vorstellungen von Allgemeinbegriffen, etwa die Winkel- und Längenmessung als inhaltsbezogene Vorläuferin vom Skalarprodukt) zu empfehlen [24] S.83-84.

Der universitäre Einstieg kann diese Empfehlungen oft nicht bieten, besonders der Anspruch eines axiomatischen Aufbaus lässt das schwer umsetzen. Trotzdem sind den Lehrenden Möglichkeiten der Exaktifizierung, der Abstraktion sowie Verallgemeinerung ausgehend vom Vorwissen gegeben.

Aus Sicht der Lernenden stellt sich die Anschlussfähigkeit z. T. schwierig dar: Der Begriff *(epistemoligical* bzw. *didactic) obstacle*[34] wurde eingeführt, um Schwierigkeiten im Zusammenhang mit Vorwissen erklären zu können ([58] S.240-241 bzw. [59], S.9):

i) Bei einem *obstacle* handelt es sich um *vorhandenes* Wissen, das in bisherigen Anwendungen erfolgreich beim Problemlösen war, allerdings einen begrenzten Kontext hat. Durch Ersteres ist es mental fest verankert.

32 Diese beziehen sich auf die Bildungsstandards in Deutschland! Hier wird klar zwischen Grundkompetenzen (der Sekundarstufe I und mathematischen Inhalten der Oberstufe unterschieden, [10] S.235-242

33 Vgl. dazu [10] S.259: Die meisten der Probanden zeigten sich überfordert, auf einer endlichen Menge ausgehend von $\mathbb{Z}$ eine Addition auf $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (Restklassenring von $\mathbb{Z}$ bzgl. der Kongruenz modulo 5) zu erklären, obwohl dieses Thema nicht über Inhalte der Grundschule hinausgehe. Anzumerken ist dabei, dass diese Aufgabe (für Schulverhältnisse) strukturell anspruchsvoll ist und ein anderes Denken als das beim Rechnen mit konkreten Zahlen verlangt.

34 Übersetzung des Autors: Lernhindernis, Hürde beim Lernprozess.

ii) Sollen nun neue Aspekte eines bereits bekannten Themas gelernt werden, so kann es durchaus passieren, dass das Neue dem bereits Gelernten in mancher Hinsicht widerspricht. Das alte Wissen reicht dann allerdings nicht mehr aus, um die neuen Probleme lösen zu können. Nichtsdestotrotz ist das alte Wissen durch seinen vormaligen Nutzen vergleichsweise stabil verankert, es wird nur unter großem Aufwand aufgegeben und stellt sich dadurch als Hürde beim Erlernen der neuen Inhalte dar.

Das Problem sind also nicht Lücken im Wissen, sondern vorhandenes Wissen. *Obstacles* können durch didaktische Zugänge oder Veranschaulichungen durch den Unterricht selbst gemacht sein (*didactic obstacles* bzw. *didactical obstacles*)[35], oder epistemologisch durch den Inhalt an sich und seiner historischen Entwicklung unvermeidbar sein (*epistemoligical obstacle*)[36] [60], S.158. Es ist daher davon auszugehen, dass viele Erstsemestrige mit *obstacles* an die Universität kommen. Themen wie Funktionen, Folgen oder Stetigkeit scheinen besonders betroffen.[37]

Letztendlich bleibt festzuhalten: Vorwissen ist damit im besten Fall eine wesentliche Erleichterung beim Einstieg ins Studium, aber auf keinen Fall ein Garant für Studienerfolg. Bestimmte Hürden (*epistemological obstacles*) lassen sich prinzipiell kaum vermeiden. Daneben erschwert nicht vorhandenes Vorwissen das Lernen ebenso. Somit ergibt sich als ein wesentliches Ziel:

Den Studierenden soll ausreichend (tragfähiges) Vorwissen für das 1. Semester mitgegeben werden, an das im 1. Semester angeknüpft werden kann bzw. auf das im 1. Semester zurückgegriffen werden kann. *Obstacles* soll nach Möglichkeit entgegengewirkt werden.

4.6. Übersicht der inhaltlichen Problemfelder

Abschließend werden die schulischen Inhalte der Oberstufe (siehe Abschnitt 2.3) mit den Inhalten des ersten Semesters (siehe Abschnitt 3.3) verglichen. Gleichzeitig wird eine subjektive Einschätzung gegeben, in wie weit davon ausgegangen werden darf, dass bei SchülerInnen Vorwissen vorhanden ist. Die Einschätzungen beruhen auch auf der Arbeit mit Erstsemestrigen (vgl. Kapitel 6) und mit NachhilfeschülerInnen. In Tab. 4.1 (Teil 1) und 4.2 (Teil 2) sind die Einschätzungen dargestellt.

Zunächst noch die Legende für die Farbcodes.

Kaum tragfähiges Vorwissen für Hochschulmathematik vorhanden

teilweise tragfähiges Vorwissen für Hochschulmathematik vorhanden

(laut Papier) mit gutem Vorwissen für Hochschulmathematik zu rechen

35 Werden beispielsweise im Unterricht nur (streng) monotone und zugleich beschränkte (und damit konvergente) Folgen behandelt, so kann es bei den SchülerInnen zur Annahme kommen, dass alle konvergenten Folgen monoton und beschränkt sein müssen und daneben der Grenzwert nie wirklich von einem Folgenglied erreicht werden können. Das erschwert dann z. B. zu erkennen, dass konstante Folgen konvergent sind.

36 Ein Beispiel ist etwa die Entwicklung vom Funktionsbegriff weg von der expliziten, algebraischen Rechenvorschrift hin zum modernen Funktionsbegriff. Daneben sind auch Inhalte mit dem unendlich Kleinen oder Großen zu nennen, [60], S.162

37 Die Schuldefinition von Stetigkeit, mit der Erstsemestrige im Allgemeinen an die Universität kommen, ist folgende: Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen (»Bleistiftstetigkeit«). Diese Definition scheint eine kaum tragfähige Ausgangsbasis für die ϵ-δ-Definition zu sein: Es zeigen sich große Unterschiede in vielen Bereichen: Stetigkeit als globale Eigenschaft vs. lokale Eigenschaft, logischer Aufbau der Definition, anschaulich-sprachlich vs. logisch-formal, impliziter Abstandsbegriff vs. expliziter Abstandsbegriff, Prozesscharakter (Bleistift bewegt sich) vs. stationärer Charakter (fixierte Stelle x_0). Beispielsweise lassen sich Funktionen bzgl. Bleistiftstetigkeit nicht auf Stetigkeit an einer Stelle x_0 untersuchen, sonder immer nur eine Umgebung (in der die Funktion ebenfalls stetig ist, da der Stift auf keiner unendlich kleinen Länge eine durchgezogene Linie machen kann. Funktionen, die nur an einer einzigen Stelle stetig sind, lassen sich demnach nicht untersuchen, vgl Abschnitt 6.3.2.

Tab. 4.1.: Inhalte in Schule und Uni im Vergleich (Teil 1)

Inhalt	Schule	Hochschule
Logik	nicht explizit Thema, umgangssprachlicher Zugang	formaler Zugang, Aussagen- und Prädikatenlogik
Mengenlehre	intuitiver Zugang fast ohne Formalismen, kaum abstrakte Mengen	abstrakte Mengen, formale Operationen auf Mengen, kartesisches Produkt
Zahlenmengen	Anschauliche Interpretation	axiomatischer Zugang oder Konstruktion
Rechenregeln für Variablen und Zahlen	kaum Reflexion über Gültigkeit der Regeln, kaum abstrakte Strukturen	schrittweise Herleitung der Rechenregeln, Schwerpunkt auf algebraischen Strukturen
Relationen	keine strukturellen Betrachtungen, Rechenregel intuitiv klar	Schwerpunkt auf Eigenschaft und Verallgemeinerungen
Ungleichungen	Standardaufgaben laut Lehrplan	wesentliches Hilfsmittel in der Analysis im Zusammenhang mit dem Abstandsbegriff
Funktionsbegriff	beschränkt auf reelle Funktionen, Schwerpunkt auf Funktionsvorschrift oder Graph	Spezialfall von Relationen, Exaktheit bei Definitionsbereich, Wertevorrat usw., angewandt auf beliebige Mengen
Elementare Funktionen	Eigenschaften und Graphen als evident dargestellt	Nachweis der Eigenschaft, zum Teil andere Definitionen (z. B. Exponentialreihen)
Grenzwerte	intuitiver Zugang, (fast) nur im Zusammenhang mit Differentialrechnung, unklare Situation über Rechenregeln	ϵ-δ-Definition und einseitige Grenzwerte, zentral für die Analysis, nur begründete Verwendung der Rechenregeln
Stetigkeit	bei elementaren Funtkionen anschaulich klar, kaum Präzisierung des Begriffs, kaum unstetige Funktionen	Nachweis im Detail nötig, auf Grenzwert aufbauend, Folgenkriterium
Differenzierbarkeit	Differentialquotient als Ausgangsbasis, vielfältige außermathematische Interpretationen, kaum nicht differenzierbare Funktionen, unreflektierte Anwendung von Differentiationsregeln	Differentialquotient als Ausgangsbasis, Mittelwertsatz als wesentliches Resultat, Überprüfung der Differenzierbarkeit im Detail, Beweise der Differentiationsregeln, Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$
Folgen	intuitiver Zugang, auch zur Konvergenz, Schwerpunkt auf arithmetischer u. geometrischer Folge	ϵ-N_0-Definition der Konvergenz, Cauchy-Folgen, Teilfolgen usw. Herleitung der Rechenregeln für konvergente Folgen
Reihen	geometrische Reihe, keine weiteren Konvergenzbetrachtungen	formaler Zugang über Folgen, zahlreiche Konvergenzkritieren und Rechenregeln, Potenzreihen und Differenzierbarkeit
Integral	Riemann-Integral durch Rechteckflächen approximiert, nur grundlegende Integrationstechniken	Riemann-, Cauchy und letztlich Lebesgue-Integral (auch mehrdimeinsional), strenger Aufbau und Konvergenzbetrachtungen, Hauptsatz der Differential- und Integralrechung mit Beweis, vielfältige Integrationstechniken mit Beweisen

Tab. 4.2.: Inhalte in Schule und Uni im Vergleich (Teil 2)

Inhalt	Schule	Hochschule
Vektorräume	nur $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ohne Axiomatik, analytische Geometrie	axiomatischer (abstrakter) Vektorraum, auch unendlich dimensional, Schwerpunkt auf Strukturen und Linearer Unabhängigkeit
lineare Abbildungen	nur als affine Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	abstrakte Definition von $V \to W$ mit strukturerhaltenden Eigenschaften, auf endl. dimensionalen Vektorräumen Zusammenhang mit Matrizen
(affine) Unterräume	nur Geraden und Ebenen, kein Unterraumaxiome	axiomatischer Zugang, Zusammenhang mit linearen Abbildungen
Gleichungen, Gleichungssysteme	fast immer mit Kontext, wenig über oder unterbestimmte Gleichungssysteme, Dimension ≤ 4	Zusammenhang mit linearen Abbildungen und Matrizen, Theorie über Lösbarkeit, Gauß-Algorithmus

Es zeigt sich, dass viele Themenbereiche wesentliche Unterschiede zeigen. Inwieweit sich diese Unterschiede als Schwierigkeiten im ersten Semester herauskristallisieren, ist einerseits vom Vorwissen der SchülerInnen und dem Niveau des Unterrichts abhängig, andererseits von der Lerngeschwindigkeit der Erstsemestrigen. Es ist damit zu rechnen, dass es kaum Erstsemestrige gibt, die mit allen Themengebieten problemlos zu Recht kommen. Auf die Lehrveranstaltungen bezogene Inhalte, die als Hauptprobleme gesehen werden können, zählen

- *Höhere Mathematik I:* Funktionsbegriff, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- *Grundbegriffe der Mathematik:* Logik, Funktionsbegriff und Relationen
- *Analysis 1:* Zahlenmengen, Grenzwerte, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Folgen, Reihen
- *Lineare Algebra 1:* Vektorraum und Lineare Abbildungen

Weiters ist davon ausgehen, dass Inhalte, die in der Schule bereits (inhaltlich) verstanden wurden, wieder vergessen werden [24] S.26. Daneben zeigt sich, dass vorhandenes Wissen nur über eine geringe Transferbreite besitzt, d. h. schon geringe Abweichungen von stereotypen Schulaufgaben wirken sich drastisch auf die Lösbarkeit aus [24] S.26f. Interpretiert bedeutet das: Es ist bei vielen SchülerInnen zwar zunächst ein sehr enges Anwendungswissen vorhanden, aber kein flexibles Verständnis, das eine konstruktive Ausgangsbasis für aufbauende Inhalte darstellt.

Dieses Problemfeld lässt sich so zusammenfassen: Mann kann nicht davon ausgehen, dass angehende Studierende auch bei grundlegenden Inhalten über ein tragfähiges Verständnis verfügen. Das motiviert dazu, in einem Brückenkurs auch sehr Grundlegendes zumindest kurz zu wiederholen, wie es andere Brückenkurse auch machen (vgl. [17]).

4.7. Empirische Befunde zu Übergangsschwierigkeiten in der Literatur

Viele Aspekte der Übergangsproblematik an anderen deutschsprachigen Universitäten treffen in ähnlicher Weise auf die Uni Graz zu. Allerdings gibt es kaum (umfassende) empirische Untersuchen zu Übergangsschwierigkeiten im deutschsprachigen Raum, was Studien mit einem mathematischen Schwerpunkt betrifft – auch wenn sowohl Lehrende als auch Studierende über Probleme klagen: unzureichende Vorbereitung/Vorwissen versus zu hohe Anforderungen, siehe [10] S.258. Diverse internationalen Untersuchungen können diesbezüglich nicht direkt auf Deutschland[38] übertragen werden können [10], S.258. Unterschiedliche Schulsystem und Schwerpunkte seien Gründe dafür.

Differenzen zwischen Kenntnissen der Studierenden und Erwartungen der Lehrenden werden an einzelnen Inhalten, Begriffsvorstellungen und Fertigkeiten, »die großenteils Thema des Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen sind«[39], festgemacht [10] S.258. Untersuchungen liegen z. B. zu Gleichungen (zu einseitige Sichtweise, die die Anschlussfähigkeit der Arithmetik in Richtung Algebra in Diskussion stellt) vor [10] S.258. Zumindest an Fachhochschulen (in Nordrhein-Westfalen) wurden seit 2002 »sehr stabile, aber alarmierend schwache Grundlagenkenntnisse«[40] festgestellt [61] [62]. Allerdings wird auch konstatiert, dass stoffdidaktische Probleme (z. B. falsche oder fehlende Grundvorstellungen zu Inhalten der Schulmathematik) zwar zu Schwierigkeiten beim Übergang beitragen, aber nicht alleinige Ursachen sein können (vgl. Abschnitt 4.5).

Daneben werden als weitere wesentliche Aspekte für die Übergangsschwierigkeiten folgende Probleme gesehen, die allgemeine intellektuelle Denkhaltungen betreffen [10] S. 259-260:

- Präzision im Ausdruck und logisch stimmige Argumentationen

  Wissenschaftliche Mathematik baut auf diesen beiden Aspekten auf, etwa bei Definitionen und Beweisen, aber auch bei der Rolle von Voraussetzung und Behauptung. Es wurden diesbezüglich mangelnde Fähigkeiten bei SchülerInnen festgestellt. (vgl. Abschnitt 6.3)

- aktive Auseinandersetzung mit Lerninhalten und Umgang mit vorhandenen Vorstellungen

  Aktive Auseinandersetzung – mit dem Bemühen, neue Inhalte kognitiv zu verarbeiten, wird als Notwendigkeit gesehen. Dabei reicht ein simples Kopieren von Handlungsabläufen nicht dafür aus.[41] Diese kognitive Verarbeitung stellt insbesondere eine Herausforderung (z. B. bzgl. Selbstregulation, Anstrengung) dar, weil versucht wird, von vorhandenen Vorstellungen auszugehen. Das gelingt nicht immer unmittelbar, wenn die Inhalte etwa einer Vorlesung zu weit entfernt sind. Zudem ist die Bereitschaft zur Genauigkeit nicht selbstverständlich. Die Wahrnehmung und Auflösung von Widersprüchen als intellektuelle Denkhaltung kann nicht vorausgesetzt werden (vgl. auch Teil II dieser Arbeit).

- Transferleistungen und Zusammenhänge erkennen

  Eng mit der aktiven Auseinandersetzung mit Inhalten verbunden sind die notwendigen Transferleistungen, die es ermöglichen, neues Wissen einzuordnen und Zusammenhänge zu erkennen. Daneben spielt die Fähigkeit, »Erkanntes in andere Sachzusammenhänge zu übertragen und in anderen Darstellungen zu repräsentieren« unter anderem in der Linearen Algebra (siehe [63]) eine wichtige Rolle. In Lehrversuchen[42] in Lille (Frankreich) zur Linearen Algebra zeigte sich, dass es trotz ganzheitlicher Konzepte nicht durchgehend gelang, diese Fähigkeiten zu vermitteln sowie die üblichen Probleme vollständig zu beseitigen.

---

38 Anmerkung des Autors: und damit auch weitgehend nicht direkt auf Österreich

39 Bei der Tagung des khdm (Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik) zum Thema »Mathematik im Übergang Schule/ Hochschule und im ersten Studienjahr« von 20. bis 23. Februar 2013 in Paderborn stellte sich bei einer Podiumsdiskussion heraus, dass großer Teil der Lehrenden an Universitäten nicht ausreichend über die Curricula der Schulen in der Sekundarstufe Bescheid weiß.

40 Der Test besteht aus 10 Aufgaben (Bewertung richtig/falsch): Lösen einer quadratischen Gleichung, Lösung einer Bruchgleichung, Rechnen mit dem Logarithmus, Rechnen mit Exponenten, Potenzregeln, Umrechnung von Einheiten, Polynomdivision, Graph einer quadratischen Funktion, Lösung eines einfachen linearen Gleichungssystems, Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte, Anwendung des Strahlensatzes.
Gesamtmittelwert aller Tests ($N = 23286$) ist 3,66 (von maximal erreichbaren 10 Punkten).

41 Anmerkung des Autors: Paradebeispiel dafür ist die in dieser Arbeit bereits oft (als Negativbeispiel) herangezogene schulische Kurvendiskussion, bei der die SchülerInnen ein Schema verfolgen, ohne häufig wissen zu müssen, was sie dabei tun und warum sie es tun.

42 Zum Beispiel: Entwicklung der Theorie anhand von genetischen Beispiele, vgl. [10] S.261 bzw. [63].

- metakognitive Lernstrategien

  Empirische Studien haben gezeigt, dass die Fähigkeiten, das eigene Denken zu reflektieren und bewusst zu steuern im Sinne von Planungs-, Überwachungs und Prüfaktivitäten ein entscheidendes Merkmal für Erfolg in Mathematik sind.

Es wird sich in Teil II dieser Arbeit zeigen, dass diese vielfältigen (empirischen) Befunde für Probleme und Diskrepanzen auch auf viele Mathematik-Studierenden der Uni Graz zutreffen. Es ist davon auszugehen, dass sich dadurch die Einstiegsproblematik nicht auf einen oder zwei Faktoren oder AkteurInnen reduzieren lässt (z. B. didaktisch schlechte Lehrende, faule Studierende, fachlich unzureichender Schulunterricht).[43] Das legt nahe, die Übergangsproblematik auf sämtlichen Ebenen zu behandeln, um in allen Bereichen kleine Verbesserungen zu ermöglichen. Teil III dieser Arbeit wird sich dieser Herausforderung in Form eines Vorschlages für einen darauf zugeschnittenen Brückenkurs stellen, der an die Problematiken ganzheitlich, auf allen Ebenen herantritt.

43 Vgl. dazu: [64], zitiert nach [32] S.288-289: Die Unterschiede beim Konzept der Ableitung zwischen Universität und Hochschule sind besser durch zahlreiche kleine »discontinuities« zu sehen als ein oder zwei große »breakdowns«. Vgl. auch [65], S.133: Durch vielfache quantitative Unterschiede ergibt sich letztlich ein qualitativer Unterschied beim *advanced mathematical thinking*.

Teil II.

Empirische Analyse der Studieneinstiegsproblematik

»Der Mensch hat dreierlei Wege klug zu handeln: durch Nachdenken ist der edelste, durch Nachahmen der einfachste, durch Erfahrung der bitterste.«
Konfuzius

In diesem Teil II der Arbeit wird dargestellt, in welchem Ausmaß sich Problemfelder beim Studieneinstieg in ein Mathematik-Studium an der Uni Graz in der Realität zeigen, nachdem im im vorigen Teil I diese Problemfelder ausgehend von einer Curricula-Analyse aufgeworfen wurde.

Dabei wird die Studieneinstiegsproblematik aus drei erfahrungsgeleiteten Perspektiven betrachtet, um dadurch aus verschiedenen Blickwinkeln die aufzugreifenden Problemfelder näher zu charakterisieren und parallel dazu anzustrebende Ziele für Gegenmaßen im Rahmen eines Brückenkurses zu formulieren.

Die drei Perspektiven sind:

i) die (institutionelle) Sichtweise der Universität bzw. des Instituts für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen, die bzw. das mit steigenden Studierendenzahlen und – subjektiv – zunehmender Heterogenität und steigender mangelnder Leistungsbereitschaft konfrontiert ist (Kapitel 5),

ii) die (fachliche) Sichtweise aus der mehrjährigen Tätigkeit des Autors als Tutor für fachmathematische Lehrveranstaltungen am Studienbeginn, bei der sich typische inhaltsbezogene Problemfelder zeigen, die sich in einem Brückenkurs z. T. behandeln lassen (Kapitel 6)

iii) und die (studentische, motivationale, sinnsuchende) Sichtweise des Autors als Studienvertreter, in der Aspekte von Motivation, Eigenverantwortung, Sinnstiftung und Einstellungen zum Mathematik-Studium von Erstsemestrigen bzw. Studierenden dargestellt werden (Kapitel 7).

5. Perspektive der Universität

Dieses Kapitel beschreibt die institutionelle Perspektive der Universität bzw. des Instituts für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen im Hinblick auf den Studienbeginn in den Mathematikstudien an der Uni Graz ausgehend von den Statistiken des Online-Systems UGO der Uni Graz.[1] Die Darstellung der Daten beschränkt sich auf Lehrveranstaltungen des ersten Studienjahres beim Lehramt.[2] Zunächst wird auf die steigenden Studierendenzahlen eingegangen, danach werden die Durchfallquoten sowie die Notenleistungen in den einzelnen Lehrveranstaltungen dargestellt.

5.1. Steigende Studierendenzahlen im 1. Semester

In den letzten Jahren sind die Studierendenzahlen in den Mathematik-Studien deutlich gestiegen. Grund dafür ist der enorme Zuwachs bei den Lehramtsstudierenden, allerdings nicht durch Werbemaßnahmen der Uni Graz.[3]

Im WS 07/08 haben nur 76 Lehramtsstudierende begonnen, im WS 9/10 waren es schon 125. Das Maximum wurde im WS 11/12 mit 220 erreicht, im WS 12/13 waren es nur mehr 191. Damit haben sich die Studierendenzahlen in den letzten 6 Jahren mehr als verdoppelt.

Die effektiven Anmeldezahlen bei Lehrveranstaltungen des ersten Semesters sind im Allgemeinen noch höher, weil Studierende der Vorjahre, die die jeweilige Lehrveranstaltung nicht geschafft haben und das Studium weiter betreiben, ebenfalls Publikum sind. Im zweiten Semester (Sommersemester) liegen die Anmeldezahlen niedriger als im ersten Semester, da ein Teil der Studierenden bereits das Studium abgebrochen hat. Für die Universität bedeutet die Erhöhung der Studierendenzahlen um 100 Studierende den Bedarf von zwei bis drei weiteren Übungsgruppen. Vorlesungen können meist in größeren Hörsälen abgehalten werden. Im WS 10/11 waren bei den *Grundbegriffen der Mathematik* 252 Studierende angemeldet (bei 168 Erstsemestrigen), im WS 11/12 287 (bei 220 Erstsemestrigen). Noch höher waren die Anmeldezahlen bei der *Höheren Mathematik I VO* im WS 11/12: 299 Studierende bei 220 Erstsemestrigen. Auch bei Übungen liegen die Anmeldezahlen deutlich über den Erstsemestrigenzahlen, etwa bei der *Höheren Mathematik I UE* im WS 11/12 (241 Studierende bei 220 Erstsemestrigen).

Die Anmeldezahlen allein sagen noch nicht aus, wie viele Studierende in einer Lehrveranstaltung (positiv oder negativ) beurteilt werden.[4] Es zeigt sich, dass bei sämtlichen Lehrveranstaltungen zwischen 20 und 70 Studierende weniger beurteilt werden als angemeldet sind. Geht man davon aus, dass die jeweiligen Erstsemestrigen laut Musterstudienplan studieren und bildet man den Quotienten von »beurteilten Studierenden« zu »Erstsemestrigen im jeweiligen Studienjahr«, so ergeben sich Beurteilungsquoten von 30% aufwärts. Es zeigt sich allerdings, dass nur wenige Erstsemestrige bei den Lehrveranstaltungen des zweiten Semesters beurteilt werden: So wurden im SoSe 09 nur etwas über 40% der Studierenden in der *Höheren Mathematik II VO* beurteilt, im SoSe 2011 waren es noch weniger. Bei der *Höheren*

1 Über Uni Graz Online (UGO) läuft sowohl die Anmeldung zu Lehrveranstaltungen als auch die Verwaltung von Prüfungsergebnissen und Zeugnissen.

2 Bei allen Lehrveranstaltungen sind bis inkl. zum WS 11/12 auch die Bachelor-Studierenden einbezogen – vlg. die Studienpläne in Abschnitt 3.3. Daneben besuchte eine geringe Anzahl (≈ 20) von Studierenden des Studiums Computational Sciene die Lehrveranstaltungen der *Höheren Mathematik* I VO, I UE, II VO, II UE ebenfalls, allerdings nur bis inkl. zum Sommersemester 2010.
Die Lehrveranstaltungen der *Linearen Algebra* sowie der *Analysis I* haben (erfahrungsgemäß) ein sehr heterogenes Publikum bzgl. Semester, weswegen diese Lehrveranstaltungen von den Statistiken nur schwer zur Analyse der ersten Semester herangezogen werden können.

3 Dagegen wurde seitens der Medien immer wieder eine drohender Mangel an Lehrkräften (vor allem in den Naturwissenschaften) hingewiesen und auf den Bedarf an zukünftigen Lehrkräften hingewiesen.

4 Bei den Lehrveranstaltungstypen VU und UE/PS gibt es Fristen (etwa 3 Wochen nach LV-Beginn), innerhalb derer man sich abmelden kann, ohne beurteilt zu werden. Bei Vorlesungen müssen Studierende nicht zur Prüfung antreten, bekommen selbstverständlich nur dann eine (positive oder negative) Note, wenn sie an einer Prüfung teilnehmen.

Mathematik I UE im WS liegen die Beurteilungsquoten seit dem WS 09/10 unter 80%. Diese Quote kann als eine erste Drop-Out-Rate angesehen werden. Das Verhältnis von inskribierten Studierenden im ersten Semester zu Studierenden im Folgesemester liefert erfahrungsgemäß keine realistische Einschätzung, da Studierende ihr Studium z. T. erst später schließen, während sie es schon länger nicht mehr aktiv betreiben. Je nach Jahrgang und Lehrveranstaltungen haben zwischen 10% und 60% Prozent der Erstsemestrigen die jeweiligen Prüfungen nicht mehr abgelegt.

Eine Beurteilung darf nicht mit Prüfungserfolg verwechselt werden, da bei den Beurteilungen auch negative Beurteilungen enthalten sind. Beurteilungen geben aber darüber Auskunft, wie viele Studierende überhaupt ein Zeugnis für eine Lehrveranstaltung über die Dauer eines Semesters anstreben. Es ist davon auszugehen, dass mit Ende des ersten Semesters bereits 20% der Erstsemestrigen das Studium abbrechen, im Lauf des Sommersemesters weitere 20%. Das führt in etwa zu einer Droptout-Rate von etwa 40 bis 50% bis zum Beginn des dritten Semesters, was sich erfahrungsgemäß mit den Anmeldezahlen der Lehrveranstaltungen größenordnungsmäßig deckt.

5.2. Anhaltend schlechte Leistungen

Die Studierendenzahlen auf der einen Seite und die Anzahl der Beurteilungen auf der anderen Seite geben zwar Auskunft über die Studierwilligkeit der Studierenden, allerdings noch nicht über deren Leistungen. Daher werden nun die Noten zu den Lehrveranstaltungen dargestellt. Die von Lehrenden (vielerorts) subjektiv empfundenen, immer schlechter werdenden Leistungen der Studierenden lassen sich in dieser Allgemeinheit an der Uni Graz nicht bestätigen. Dagegen scheint es allerdings beträchtliche Unterschiede zwischen Jahrgängen und/oder Lehrenden geben, wie die Abb. 5.1 und 5.2 zeigt.

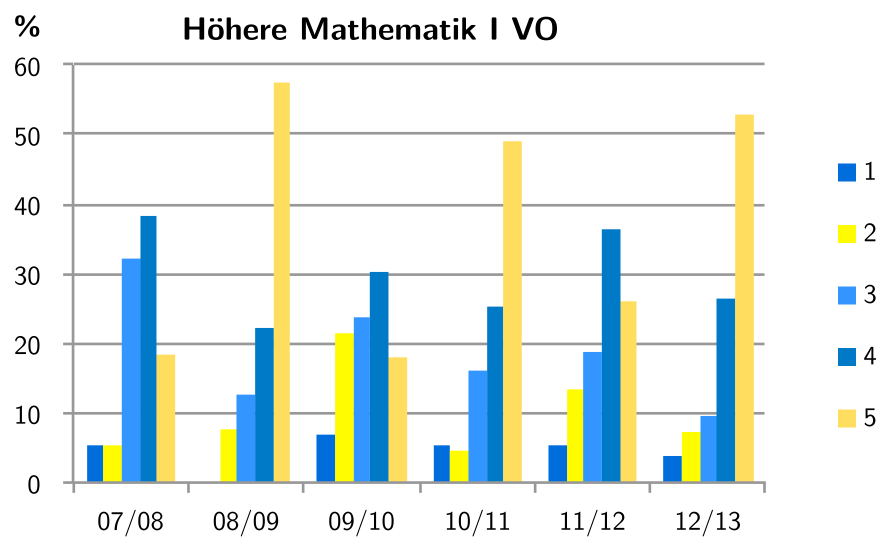
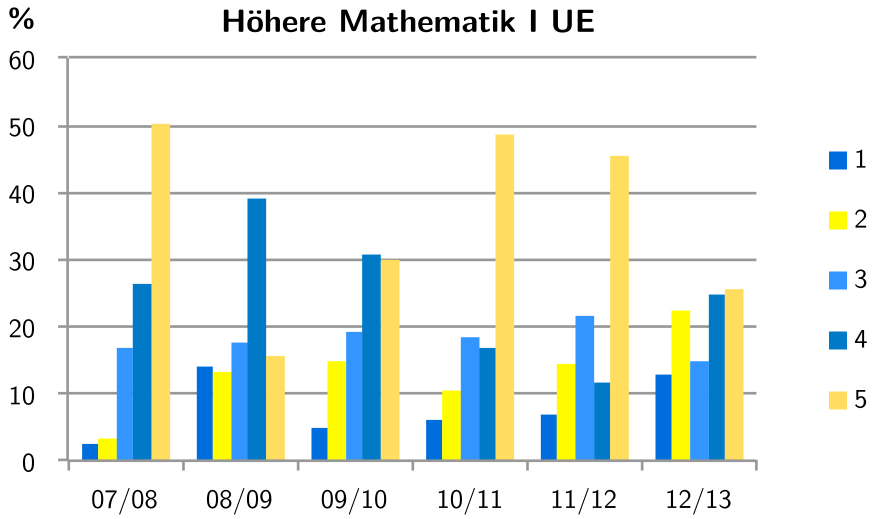


Abb. 5.1.: Notenverteilungen (%) der Lehrveranstaltungen *Höhere Mathematik* I VO im zeitlichen Vergleich



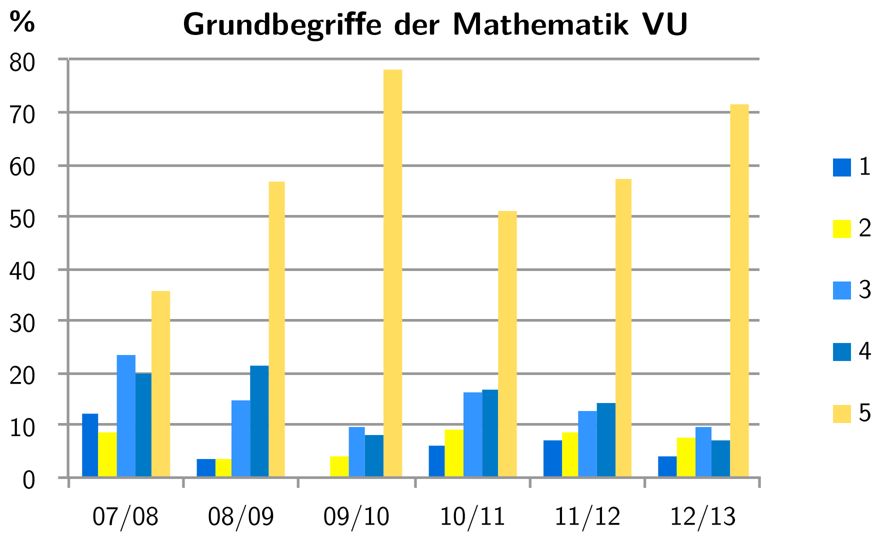
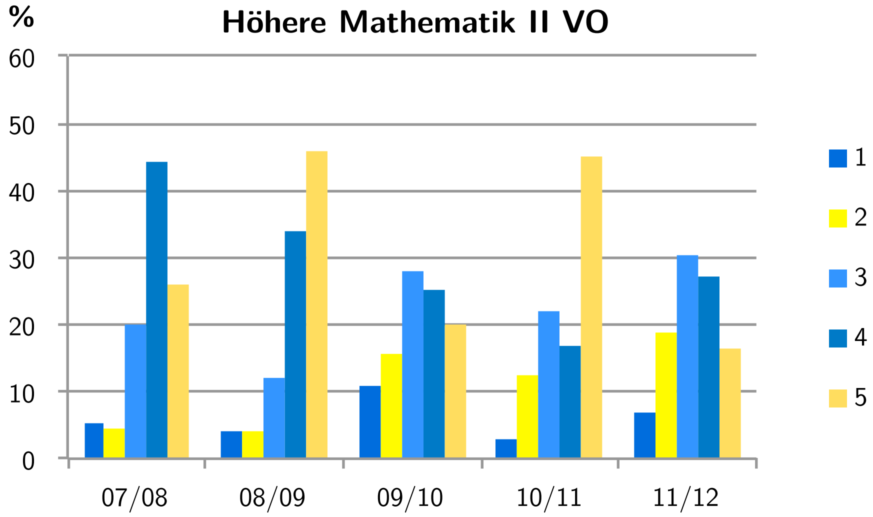


Abb. 5.2.: Notenverteilungen (%) der Lehrveranstaltungen *Höhere Mathematik* I UE sowie *Grundbegriffe er Mathematik* im zeitlichen Vergleich

Die Lehrveranstaltungen *Höhere Mahtematik I* VO und II VO in den Studienjahren 08/09 sowie 10/11 wurden jeweils von einem Lehrenden A gehalten, in den Studienjahren 07/08 sowie 11/12 jeweils vom Lehrenden B. Es ist kaum abzuschätzen, ob die Unterschiede in den Verteilungen durch tatsächlich unterschiedliche Leistungsverteilungen der Studierenden zustande kommen, durch das Niveau der Lehrveranstaltungen und Prüfungen oder durch unterschiedliche Beurteilungskriterien und Notenschlüssel. Es bedarf standardisierter Tests, um unterschiedliche Jahrgänge bzgl. ihrer Leistungen vergleichen zu können.



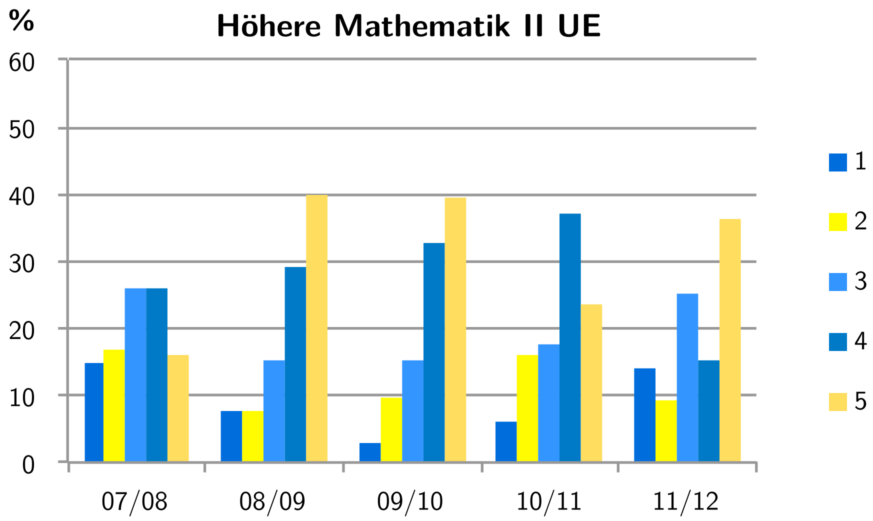


Abb. 5.3.: Notenverteilungen (%) der Lehrveranstaltungen *Höhere Mahtematik* II VO und UE im zeitlichen Vergleich

Es fällt auf, dass der Anteil der negativ beurteilten Studierenden zwischen knapp 20 Prozent bis hin zu knapp 80 Prozent streut. Es ist keine Seltenheit, dass 40 % der beurteilten Studierenden eine negative Note erhalten haben. Wie bereits zuvor erwähnt kann die Anzahl der beurteilten Studierenden nicht mit der Anzahl der angemeldeten Studierenden gleichgesetzt werden. Abschließend zeigt Abbildung 5.4, wie viele der angemeldeten Studierenden tatsächlich positiv beurteilt wurden oder nicht positiv beurteilt[5] wurden. Es zeigt sich, dass Übungen zur *Höheren Mathematik* I und II kaum eine Tendenz erkennen lassen. Bei der Vorlesung zur *Höheren Mathematik* I und II lässt sich dagegen ein Abwärtstrend festhalten, und zwar unabhängig von den Lehrenden. Ebenfalls tendenziell schlechter wurden die Leistungen bei den *Grundbegriffe der Mathematik*. Fast überraschend zeigt sich bei den Lehrveranstaltungen des zweiten Semesters (*Höhere Mathematik* II VO und UE) im Vergleich zu den Vorgängerinnen im ersten Semester (*Höhere Mathematik I* VO und UE) nicht durchgehend eine Verbesserung der Leistungen, was überrascht, da auszugehen ist, dass ein Teil der (zu) leistungsschwachen Studierenden das Studium schon abgebrochen hat.

5 »Nicht positiv beurteilt« heißt in diesem Zusammenhang entweder negativ beurteilt oder gar nicht beurteilt, da z. B. nicht zur Vorlesungsprüfung angemeldet.

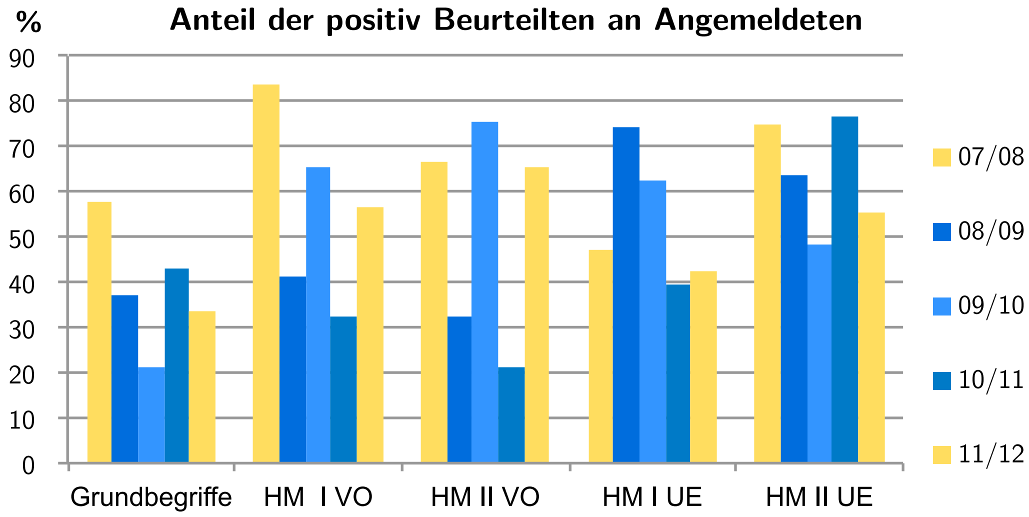


Abb. 5.4.: Prozentsatz der angemeldeten Studierenden, die eine positiven Beurteilung erhalten haben

Letztlich stellt die Calculus-artige *Höhere Mathematik I* (vgl. Abschnitt 3.3.2) trotz ihrer Schulnähe (Inhalt, Abstraktionsniveau, Zugänge) für viele Studierende ein großes Problem im ersten Semester dar. Noch schlechter sind die Beurteilungen in den *Grundbegriffen der Mathematik*.[6] Es ist klar, dass negativ beurteilte Studierende eine Ressourcen-Belastung für die Universität darstellen und niedrige Abschlussquoten ein schlechtes Licht auf die Universität werfen. Daher macht es Sinn, neben Maßnahmen, die den Studierenden bei der Studienwahl helfen sollen (Informationsangebote und Orientierungslehrveranstaltungen) auch in Maßnahmen zu investieren, die die Leistungen der Studierenden erhöhen sollen, die sich bereits für ein Studium entschieden haben. Da es bereits ab dem ersten Semester semesterbegleitende Unterstützungsmaßen für Studierende gibt (vgl. Abschnitt 3.2.3), ist es naheliegend, die Studierenden bereits vor Studienbeginn zu einem höheren Leistungsstand zu bringen, was die Einführung eines Brückenkurses als Maßnahme motiviert.

6 Das Konzept der Lehrveranstaltung hat sich über die Jahre etwas verändert, mehr in Richtung formaleres Beweisen. Im WS 09/10 wurde beim Benotungssystem mehr Wert auf Kurztests (etwa alle drei Wochen) gelegt – ohne ein Mindestmaß an Kurztestpunkten konnte keine positive Note erreicht werden.

6. Perspektive als Tutor

Dieses Kapitel beleuchtet die (fachlichen) Problemfelder am Studienbeginn aufgrund der Erfahrungen des Autors als studentischer Mitarbeiter im Lehrbetrieb (»Tutor«) im Rahmen von Tutorien (vgl. Abschnitt 3.2.3).[1] Im Zusammenhang mit diesen Tätigkeiten konnten über die letzten drei Jahre hinweg Probleme festgestellt, die als typisch für den Studienbeginn (von Lehramts- und Bachelorstudierenden) bezeichnet werden können. Die Analyse der fachlichen Problemfelder im Detail kann wichtige Anhaltspunkte für die Inhalte und das Konzept eines Brückenkurses liefern. Die Problemfelder lassen sich dahingehend in drei Bereiche gliedern:

i) Hinreichender und investierter Zeitaufwand (Abschnitt 6.1)

ii) Probleme mit Lehrformen, Lerntechniken und Lernstrategien (Abschnitt 6.2)

iii) Probleme mit konkreten, mathematischen Inhalten und Methoden (Abschnitt 6.3)

Nachfolgend werden diese Bereiche näher ausgeführt.

6.1. Hinreichender und investierter Zeitaufwand[2]

Es zeigt sich bei vielen Studierenden – insbesondere TutorienbesucherInnen –, dass der investierte Zeitaufwand deutlich unter dem Zeitaufwand liegt, der tatsächlich für eine Übungsaufgaben investiert werden muss, um eine vollständig korrekte Lösung zu erhalten. Darin zeigt sich auch eine typische Motivation für den Tutorienbesuch: Möglichst viele Hilfestellungen zu bekommen, um die Beispiele des aktuellen Übungsblattes möglichst flott und problemlos lösen zu können.

Kann ein Beispiel nicht fast auf Anhieb gelöst werden, wird es nicht weiter bearbeitet – zum Teil vielleicht auch in der Hoffnung, dass es andere Studierende bzw. die Lehrenden in der Übung ausreichend verständlich präsentieren, zum Teil aber auf jeden Fall in der Hoffnung, dass die Lösung von andere Studierende im Vorfeld erhalten werden kann.[3] Offenbar scheint das schulische »Hausaufgabendenken« (15 Minuten Bearbeitungszeit pro Analogiebeispiel zum Stoff aus der Schule) bei zu vielen Studierenden vorzuherrschen. Dass diese Vorstellung für ein universitäres Mathematikstudium wenig tragfähig ist, wird besonders am Beginn offenbar zu wenig hinterfragt. Diesbezüglich stellen sich Diskrepanzen zwischen den Ansichten der Lehrenden in den Übungen und den Studierenden dar. Der Umgang damit ist ein Drahtseilakt:

> »Übungsaufgaben, zu denen die Studierenden keinen Lösungsansatz gefunden haben, (weil die Aufgaben zu schwer waren) werden oft nicht besprochen, da laut Vortragendem kein Interesse seitens der Studierenden besteht...« (Rückmeldung eines/einer Studierenden bei einer Evaluierung zur Übung der *Höheren Mathematik I* vom WS 11/12 durchgeführt von der Studienvertretung)[4]

---

1 Betreute Lehrveranstaltungen: *Höhere Mathematik I* (WS 10/11, 11/12), *Höhere Mathematik II* (SoSe 12), *Lineare Algebra I* (WS 09/10), *Lineare Algebra II* (SoSe 11, 2013). Zusätzlich freiwillige, unbezahlte Lerngruppenbetreuung zu den *Grundbegriffen der Mathematik* (SoSe 12, SoSe 13). Zu den Lehrveranstaltungen und den Inhalten vgl. Abschnitt 3.3.

2 Unter »hinreichendem Zeitaufwand« wird im Folgenden jener Zeitaufwand von Studierenden verstanden, der für das vollständige Lösen einer Übungsaufgabe ausreichend ist. Der »investierte Zeitaufwand« dagegen ist jene Zeit, die Studierende effektiv bereit sind zu investieren.

3 Das Kopieren/Abschreiben von Beispielen scheint sich in den letzten Jahren verstärkt zu haben: Social-Media-Plattformen wie Facebook oder Online-Ordner wie Dropbox verringern diesbezüglich den Aufwand von Studierenden. Oft organisieren sich die Studierenden in Facebook-Gruppen und kommunizieren darin – Lösungen zu Übungsblättern werden dann in Dropbox-Ordner hochgeladen. Selbiges gilt für Prüfungen, die oft per Handy abfotographiert und archiviert werden.

4 Die vollständige Feedbackauswertung ist beim Autor zu erhalten.

Zwar schwanken die Bearbeitungszeiten großteils zwischen zwei und zehn Stunden etwa in der *Höheren Mathematik I UE*[5], die Mehrheit scheint aber weniger als eine Stunde pro Übungsaufgabe zu investieren – bei gleichzeitig geringer Vor- und Nachbereitung der zugehörigen Vorlesung *Höhere Mathematik I VO*. Daneben sind gar nicht alle Studierende daran interessiert, für alle Aufgaben eine Lösung zu haben.[6] Die Problematik dahinter ist, dass kaum zwei vergleichbare Aufgaben behandelt werden. Damit besteht notwendigerweise die Gefahr von Wissenslücken, was sich bei aufbauenden Inhalten besonders gravierend auswirkt.

Neben dem Investieren von zu wenig Zeit insgesamt scheint auch das Problem der Zeiteinteilung gegeben zu sein: Nicht selten versuchen Studierende, Beispiele erst einen oder zwei Tage vor der Übung zu bearbeiten – anstatt die Beispiele über einen längeren Zeitraum zu bearbeiten. Das macht das Lesen und Verstehen der Angaben sofort bei Erscheinen des Aufgabenblatts nötig. Daneben weisen allgemeine Studien bzgl. Zeitaufwand im Studium darauf hin, dass die Studierenden im Durchschnitt kaum die veranschlagte Zeit ausschöpfen, bei gleichzeitigen großen Unterschieden (vgl. etwa das ZEITLast-Forschungsprojekt in [66] ab S.68ff). Daneben gibt es erstaunlicherweise nur wenig Zusammenhänge zwischen investierter Zeit und Studienerfolg (S.75, ebendort).

Ein Teil der Studierenden im Tutorium macht sich nicht einmal im Vorfeld mit den Themengebieten bzw. den konkreten Aufgabenstellungen vertraut, kann daher weder konkrete Fragen formulieren noch Auskunft über Unklarheiten geben. Dieses Passiv-Publikum erwartet sich auch zum Teil nur fertige Lösungen (»Ich brauche das Beispiel! Ich will die Lehrveranstaltung nur schaffen – die Inhalte interessieren mich nicht!«), der Lösungsweg und die Gedanken interessieren dabei weniger. Zum Teil sind die Studierenden noch sehr ergebnisorientiert (Was muss am Ende als Ergebnis bei der Rechnung herauskommen) ausgerichtet, und weniger prozessorientiert (Wie geht man ein Beispiel an und arbeitet man sich weiter durch?).

Die zuvor dargestellten Probleme mit der (fehlenden) Zeitinvestition sind umso kritischer in dem Zusammenhang zu sehen, dass Mathematik eine stark aufbauende Wissenschaft ist und sowohl vorhergehende Inhalte, als auch bereits erlernte Kompetenzen das weitere Lernen erleichtern. Dieser Investitionsgedanke (Ich investiere am Beginn des Semesters und des Studiums viel Zeit und Engagement in die Lehrveranstaltungen, damit ich im restlichen Semester und Studium davon profitieren kann) scheint wenig bewusst zu sein und wird vom Großteil auch nicht in dieser strengen Form umgesetzt. Das kann dahingehend interpretiert werden, dass entweder der Vorteil des Investitionsgedankens im schulischen Mathematik-Unterricht (trotz Spiralprinzip im Lehrplan) nicht gemacht wurde oder dass es die Studierenden nicht durchhalten, von Beginn an intensiv Zeit zu investieren. In diesem Zusammenhang darf einem Teil der Studierenden unterstellt werden, dass sie über zu wenig Frustrationstoleranz verfügen, die aber für (nur) durchschnittlich begabte Studierende für einen erfolgreichen Studieneinstieg nötig ist. Es ist davon auszugehen, dass die Schule mit ihren Lernformen und ihrer Verantwortungsverteilung für Lernerfolge wenig dazu beiträgt, dass die obere Leistungsgruppe[7] in der Schule diese Personalkompetenzen ausreichend entwickelt kann.

Letztendlich kann an dieser Stelle keine zufriedenstellende, objektive Antwort gegeben werden, warum viele Erstsemestrige nicht ausreichend Zeit investieren, bis alle Inhalte und mathematischen Fertigkeiten erarbeitet werden. Naheliegend ist dass, 1) entweder die bewusste Einsicht dafür noch nicht präsent ist (und die Studierenden keinen Zeitmangel, sondern ein zu hohes Anforderungsniveau feststellen) oder 2) die Studierenden erkannt haben, dass mehr Zeit notwendig wäre, aber diese nicht zur Verfügung steht oder 3) die Studierenden zwar verstanden haben, dass mehr Zeit notwendig wäre, sie diese aber z. B. aus Mangel an Motivation (vgl. 7) nicht investieren wollen.

> Studierende sollen erkennen, dass Mathematik im Allgemeinen zeitintensiv ist und nicht immer alles auf Anhieb gelingen kann. Damit einhergehend ist eine gewisse Frustrationstoleranz nötig. Die Studierenden sollen verstehen, dass diese Erkenntnis als Ausgangspunkt genützt werden kann, passende Strategien im Umgang damit zu finden.

5 Umfrage zur *Höheren Mathematik I* Übung im WS 11/12.
6 Rückmeldungen von 79 Studierenden zu einer Feedbackumfrage im Rahmen des Tutorium zur *Höheren Mathematik I* im WS 10/11. 20 Prozent gaben an, dass es nur teilweise auf sie zutrifft, dass sie für alle Beispiele eine Lösung haben wollten.
7 Es wird somit unterstellt, dass die Mathematik-Studierenden zur oberen Leistungsgruppe im Hinblick auf Mathematik in der Schule gehören.

Die Studierenden sollen wissen, wie man sich die Zeit für das Bearbeiten eines Übungsblattes sinnvoll einteilen kann.

Studierende sollen erkennen, dass Mathematik ein aufbauendes Studium ist und der Investitionsgedanke wesentlich zum Lernerfolg beitragen kann.

6.2. Probleme mit Lehrformen, Lerntechniken und Lernstrategien

Neben Umstellungen mit der Zeiteinteilung und der Zeitinvestition werden Studierende mit den für sie ungewohnten universitären Lehr- und Lernformen konfrontiert. Nicht alle Studierende kommen damit besonders zu Beginn ausreichend zurecht, was sich insbesondere bei der Durchsicht ihrer Mitschriften zeigt: Die Inhalte der Vorlesungen werden oft nur unzureichend verstanden, vor allem dann, wenn nur wenige bzw. keine konkreten Beispiele in der Form typischer Übungsaufgaben vorgetragen werden. So werden zwar die Tafelbilder der Vortragenden nach Möglichkeit vollständig, oft aber unverstanden und zum Teil sogar falsch abgeschrieben. Das kommt meist davon, dass Studierende zu langsam *mit*schreiben, dann nur mehr *ab*schreiben, was zum Problem wird, wenn die Tafelschrift nicht gut lesbar[8] ist. So ergeben sich Fehler (beispielsweise Indexfehler durch $i = j$ oder $m = n$), die bei der Nachbereitung der Lehrveranstaltung bzw. bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben zunächst nicht entdeckt werden und verständnishinderlich sind. Allgemein scheint die Verantwortung bzgl. dem Mitschreibens sehr einseitig bei den Studierenden zu liegen,siehe dazu [49] (S. 16 – 17):

> »Und außerdem sagen Sie zu sich selber: Mitschreiben? Und wenn ich nun von meinem Platz aus die Tafelanschrift gar nicht richtig entziffern kann? Oder wenn der Dozent so schnell schreibt,$^{1)}$ dass ich gar nicht nachkomme?«

Als Fußnote $^{1)}$ ist angeführt:

> »›Der Jänich schreibt so schnell, so schnell kann ich nicht einmal sprechen‹ ist mir als Ausspruch einer Studentin überliefert worden.«

Als Lösungsvorschläge bringt Jänich (ebendort):

> »Wenn Sie nicht schnell genug schreiben können, dann müssen Sie es eben trainieren, wenn Sie die Tafelanschrift von weit hinten nicht erkennen können, müssen Sie sich weiter vorn einen Platz suchen, ...«

Auch an der Uni Graz kann nicht erwartet werden, dass (alle) Lehrende(n) ausreichend Rücksicht nehmen. Daher sind die Studierenden gefordert, Lösungen (für sich) zu finden.

Schlechte Mitschriften können in weiterer Folge nicht ausreichend als tragfähige Ausgangsbasis zum Lösen konkreter Aufgabenstellungen genutzt werden. Aussagen wie »Das habe ich nicht verstanden« zeigen zudem, wie unspezifisch Studierende ihre Problemstellen ausdrücken. Insbesondere scheint es an Strategien zu fehlen, wie mit nicht Verstandenem konstruktiv umgegangen werden kann. Die Fähigkeit, Theorie auf Anwendungsbeispiele selbstständig zu übertragen (»Problemlösekompetenz«), wird aus der Schule nicht von der Mehrheit in ausreichender Form mitgebracht. Wer diese Fähigkeit schneller entwickelt, kommt von Anfang an besser mit dem universitären System zurecht. Wer diese Fähigkeit nur unzureichend entwickelt, hat im Lauf des Semesters große Probleme mit den Übungen (und den Klausuren).

Die Strategie, Lehrbücher, Aufgabensammlungen oder passende Zusatzliteratur zu kennen und zu verwenden, wird vom Großteil der Studierenden in den niedrigeren Semestern nicht umgesetzt. Im Allgemeinen nutzen die Erstsemestrigen nur die eigene Mitschrift (und gegebenenfalls das vom Lehrenden verfasste Skriptum zur Lehrveranstaltung als pdf-Dokument oder in gedruckter Form , falls es eines gibt). Das ist umso problematischer im Hinblick darauf, dass die Uni Graz durchaus über eine gut ausgestattete Institutsbibliothek und Lehrbuchsammlung verfügt – für alle Niveaus und Schwerpunkte, z. B. Ingenieursmathematik ebenso wie rigorose Zugänge. Bei etlichen Standardwerken für Erstsemestrigen

8 Bedauerlicherweise verfügen nicht alle Vortragenden über eine gut lesbare Tafelbild. Einem Teil muss unterstellt werden, dass das Ausmaß der vorgetragenen Stoffmengen wichtiger ist als die Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit für die Studierenden.

(z. B. [42] für die Lineare Algebra) bietet die Bibliothek zudem ebooks zum kostenlosen (und unbegrenzten) Download an, was den Zugang zu Informationen für Studierende sehr erleichtert.

Die Ziele für einen Brückenkurs sind naheliegend:

> Senkung der Hemmschwelle für Bibliothek und Bücher.
>
> Kennenlernen der universitären Lehrveranstaltungstypen in geschütztem Rahmen, damit die angehenden Studierenden Erfahrungen diesbezüglich sammeln können. Ausgehend davon können sie für sich geeignete Strategien finden.

6.3. Inhaltsbezogene Probleme

Die zuvor festgestellten zeitbezogenen und lerntechnischen Probleme werden besonders bei Inhalten und Themenbereichen sichtbar, die kaum in der Schule behandelt wurden oder deren Zugänge grundlegend anders sind. Es lassen sich somit einige Themen bzw. Zugänge formulieren, die vielen inhaltlich sehr häufig bzw. sehr hartnäckig Probleme machen.

Das betrifft auf der einen Seite das logische Argumentieren und mathematische Beweisen, das je nach Lehrveranstaltung im Vordergrund (*Grundbegriffe der Mathematik*, vgl. Abschnitt 3.3.1) oder im Hintergrund (*Höhere Mathematik*, vgl. Abschnitt 3.3.2) steht. Der überwiegende Teil der Studierenden scheint wenig oder keine Erfahrung aus dem Schulunterricht mit Beweisen zu haben. Insbesondere die Beweisbedürftigkeit und der damit erhaltene Gewinn scheint nicht bewusst zu sein, was es für die Studierenden umso schwieriger macht, einen Sinn darin zu finden.[9] Insbesondere das Begründen-Müssen jeder Umformung oder jeden logischen Schlusses ist nicht auf Anhieb zu erlernen. Die Probleme mit dem Führen von Beweisen erstrecken sich vom Problem, die Aufgaben zu erfassen, danach einen sinnvollen Ansatz bzw. eine Idee zu finden, über das Überprüfen der logischen Richtigkeit der Argumentation bis hin zur Schwierigkeit, den Beweis sauber und formal korrekt aufzuschreiben. Aussagen wie »Ich habe es verstanden, aber ich weiß nicht, wie ich es hinschreiben soll!«[10] verdeutlichen diese Probleme.

Daneben gibt es einige Inhalte, die aufgrund ihrer Struktur bzw. ihrer mathematischen Darstellung (z. B. in welcher Form die Definition aufgeschrieben wird) für Erstsemestrige besonders schwer zugänglich sind. Auch wenn es z. T. Veranschaulichungen davon gibt, fällt es den Studierenden schwer, Erkenntnisse und Ideen aus der Anschauung auf formale Ebene umzulegen bzw. überhaupt erst auf die Idee einer Veranschaulichung zu kommen.

Folgende allgemeine Ziele für einen Brückenkurs lassen sich diesbezüglich formulieren:

> Grundlegende Zugänge zur universitären Mathematik (Logik, Beweise) sollen thematisiert werden, um den Studierenden diesbezüglich schon im Vorfeld eine grobe Orientierung zu geben, auf der im ersten Semester aufgebaut werden kann.
>
> Besonders typische problembehaftete Inhalte werden in einer Form thematisiert, um bei den Studierenden Wissen in anschlussfähiger Form für die Hochschulmathematik aufzubauen bzw. umzubauen.

Im Folgenden werden einige dieser oft schwer zugänglichen oder problembehafteten Themengebiete näher ausgeführt.

9 Das »Necessity Principle« besagt dagegen, dass sich Wissen als Lösung eines Problems entwickelt – und Lernende deswegen eine (intellektuellen) Notwendigkeit erkennen können müssen.[67], S.265.

10 Zum Teil muss hier kritisch angemerkt werden, dass es die Studierenden nur vermeintlich verstanden haben, aber über keine Kompetenzen verfügen, dass Verständnis selbstständig zu verifizieren oder zu falsifizieren.

6.3.1. Hochschulmathematisches Basiswissen

Mengen, Logik, Quantoren, Relationen usw. stellen für wissenschaftliche Mathematik ein Fundament dar, das – einmal verstanden – vielfältige Anwendungsbereiche hat. Allerdings haben StudienanfängerInnen anfangs mit diesen Konstrukten große Probleme, wie die Erfolgsquoten bei der Lehrveranstaltung *Grundbegriffe der Mathematik VU* (Abschnitt 3.3.1) zeigen ((siehe Abbildung 5.4).

Von großer Bedeutung für viele Aussagen (z. B. Stetigkeit) und ihren Beweisen ist die Implikation $p \Rightarrow q$, deren Inhalt für die Studierenden sogar noch im zweiten Semester problematisch ist. Hauptproblem ist, dass diese Wenn-Dann-Aussage grundsätzlich nichts über die Richtigkeit von p aussagt. Die Studierenden übersetzen $p \Rightarrow q$ nicht durch »Wenn p gilt, dann gilt auch q« oder »Falls p erfüllt ist, dann ist auch q erfüllt«, sondern durch »p gilt, und daher auch q«. Die Studierenden setzen bei einer Implikation also häufig den Wahrheitswert von p absolut fest. Das führt insbesondere zu Unklarheiten, wann was angenommen werden darf oder nicht darf – etwa im Zusammenhang mit Quantoren.

Als Beispiel dazu sei hier die Definition vom »minimalen Element« und »Minimum« im Zusammenhang mit Ordnungsrelationen genannt:

$x \in M$ heißt Minimum: $\forall y \in M : x \leq y$. D.h. unter allen Elementen von M ist x das kleinste.

$x \in M$ heißt minimales Element: $\forall y \in M : y \leq x \Rightarrow y = x$ D.h. unter allen mit x vergleichbaren Elementen gibt es kein kleineres.

Diesen Unterschied zu verstehen und bei der Überprüfung beim Nachweis der Eigenschaften zu berücksichtigen ist keine einfache Aufgabe im ersten Semester. In den Grundbegriffen der Mathematik war daran anschließend folgende Aufgabe zu lösen:

a) Sei M eine Menge und $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf M. Beweisen Sie: Wenn M zwei verschiedene minimale Elemente besitzt, dann hat M kein Minimum.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -n\}$ und $B_n = \{1, \ldots, n\}$. Wir setzen $M = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Betrachten Sie die durch $\subset$ definierte Ordnung auf M. Zeigen Sie, dass B_1 zwar das einzige minimale Element von M aber kein Minimum von M ist.

Wer sich die Mengen A_n, B_n auf der Zahlengeraden skizziert und die Elemente der Menge M als Aufzählung anschreibt, sieht schnell, was der Inhalt (und die Lösung) dieser Aufgabe ist. Genau diese Übersetzungen von der formalen Darstellung auf eine inhaltliche oder anschauliche, sprachliche Ebene, die das Arbeiten mit den Definitionen erleichtern, werden im schulischen Unterricht auf diesem Niveau kaum[11] thematisiert und sind auch deswegen ein großes Problem beim Einstieg in universitäre Mathematik. Dass das Lernen von akademischer Mathematik oder konkret die Bearbeitung dieser Aufgabentypen als ein Prozess mit mehreren Schritten erklärt werden kann, beschreibt die *APOS*-Theorie.[12] Zwar müssen diese Schritte nicht immer zeitlich und hierarchisch geordnet ablaufen, doch hat sich der schrittweise Aufbau als hilfreiches Konstrukt zur Erklärung von Problemen erwiesen. Die Schritte werden kurz skizziert:

- Eine *action* ist dabei eine Aktion, die von den Lernenden durchgeführt werden kann, falls sie einen äußeren Anstoß erhalten. Damit ist noch Verständnis gegeben für aufbauende oder abweichende Schritte.

  Beispielsweise kann das durch den Lehrenden angeleitete Übersetzen der formalen Definition des Maximums in eine umgangssprachliche Inhaltliche Definition als *action* bezeichnet werden.

11 Möglicherweise bieten die schulischen Inhalte vergleichsweise wenig Material, um das Wechseln zwischen formaler und inhaltlicher Ebene explizit auf diesem Niveau zu thematisieren. Viele Themengebiete werden dafür nicht ausreichend exakt und formal behandelt. Das Übersetzen kann möglicherweise zudem kaum thematisiert werden, weil es außerhalb der mathematischen, intellektuellen und sprachlichen Fähigkeiten der Mehrheit der SchülerInnen liegt.

12 Action-Process-Operation-Schema (vgl. [68] S.210 und [12] S.275 ff, oder auch [69] S.23-26)

- Ein *process* ist das mentale Durchführen einer internen mentalen Konstruktion, die durch Wiederholen und Reflektieren aus einer *action* entsteht. Bei einem *process* muss die *action* nicht mehr am Papier durchgeführt werden, es ist kein äußerer Anstoß mehr nötig. Zudem kann der Lernende den Prozess beschreiben.

  Als *process* kann daher daher der umittelbare Wechsel zwischen formalen Definitionen und deren umgangssprachlichen Aussagen und inhaltlichen Bedeutungen bezeichnet werden.

- Ein *object* entsteht, wenn der Lernende den *process* als Gesamtheit begreift und Transformationen oder weiterführende Handlungen darauf anwenden kann.

  Hat der Lernende das Konzept des Minimums als Objekt verstanden, so kann er beispielsweise angeben, was notwendig ist, um die Nichtexistenz eines Minimums nachzuweisen.

- Ein *schema* für ein mathematisches Konzept ist nun die Sammlung aller individuell vorhandenen *actions*, *processes* und *objects* bezogen auf das mathematische Konzept.

  Bei dem oben angeführten Beispiel sind das etwa die Objekte Logik, Beweisstrategien, Quantoren, Mengenlehre, Ordnungsrelation usw. Es wird deutlich, wie viele Elemente notwendig sind, um die oben dargestellte Übungsaufgabe lösen zu können.

Aber auch schon für Fortgeschrittene als einfach einzuschätzende Beweisführungen – etwa zur Injektivität oder Surjektivität einer Funktion – machen anfangs Probleme, vor allem dann, wenn es sich um Funktionen handelt, die nicht mehr mit Schulwissen gezeichnet werden können (also z. B. keine Funktion mehr von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind):

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ wird die Menge $U_{ab} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + ax + b = 0\}$ definiert. Wir betrachten die Zuordnung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto (\min(U_{ab}), \max(U_{ab})) \,. \end{cases}$$

i) Zeige, dass f keine Funktion ist.

ii) Bestimme $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ möglichst groß und so, dass $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Funktion ist.

iii) Ist $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv?

iv) Ist $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ surjektiv?

Hauptproblem ist oft, dass die Aufgaben zunächst nicht (im schulischen Sinn) anschaulich sind und diese schulische Anschauung daher nicht genutzt werden kann, um zu argumentieren.[13] Stattdessen muss auf rein formaler und abstrakter Ebene hantiert werden. Dies scheint fast paradox dazu zu sein, dass auch die Verknüpfung von Anschauung mit der formalen Ebene (z. B. Stetigkeit) kein trivialer Schritt ist.[14]

Allgemein muss festgehalten werden, dass von Studierenden im ersten Semester im Gegensatz zum unterstellten Alltag in der Schule eine hohe, geistige Flexibilität erwartet wird, inhaltlich auf verschiedenen Ebenen zu arbeiten – und diese Ebenen sogar noch in einen Zusammenhang zu bringen. Es scheint so, dass sich viele diese Fähigkeiten erst im Studium entwickeln (müssen), weil sie vorher nicht benötigt wurden bzw. nicht aus kognitiver Sicht entwickelt werden konnten.[15] Für Neulinge werden damit für fortgeschrittene MathematikerInnen anschaulich unmittelbar einsichtige und einfache Aufgaben zu große Hürden. Ein weiteres Beispiel (aus der Klausur von *Grundbegriffe der Mathematik VU* aus dem WS 11/12) soll das verdeutlichen:

---

13 Bei diesem Beispiel kann die Anschauung genützt werden, um die Menge U_{ab} darzustellen und mit Hilfe der Diskriminante Ungleichungen zu erhalten, die für das Skizzieren des Definitionsbereichs als Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (also der Ebene) genützt werden können. Was dagegen schwer möglich ist, ist das Zeichnen des Graphen von f.

14 Sind keine Anschauungsmöglichkeiten vorhanden, so ist das schwierig – sind Anschauungsmöglichkeiten vorhanden, so macht das ebenfalls Schwierigkeiten, diese sinnvoll zu nützen.

15 In diesem Zusammenhang muss die sogenannte allgemeine »Studierfähigkeit« der AbgängerInnen von Höheren Schulen in Frage gestellt werden. Ähnliche gedankliche Leistungen sind auch in der Physik oder der Chemie nötig – daneben auch bei den Sprachen (Sprachtheorie, Grammatik) oder in der Philosophie (Formale Logik).

Sei $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$. Zeige, dass dann durch $f \sim g :\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \geq a : f(x) = g(x)$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist.

Während man als fortgeschrittene Person sieht, was diese Äquivalenzrelation anschaulich für die Graphen von f und g bedeutet[16] und wie man demnach jeweils ein passendes a findet[17], waren viele Erstsemestrige mit der Art der Aufgabenstellung völlig überfordert.[18]

Ein Brückenkurs kann nicht sämtliche für den Studieneinstieg notwendigen *actions*, *processes*, *objects* und *schemas* liefern – und soll auch nicht sämtliche Lernerfahrungen des ersten Semesters vorwegnehmen. Allerdings kann er versuchen, Hilfestellungen bei den einzelnen Schritten vor allem durch Bewusstmachen der jeweiligen Notwendigkeiten zu geben.

Ein Brückenkurs kann sich an abstraktere, formalere Beispiele herantasten, damit die Studierenden erste Erfahrungen beim Bearbeiten solcher Aufgaben sammeln können.

6.3.2. Grenzwerte und Stetigkeit

Ein typischer Themenbereich, der sehr vielen Erstsemestrigen große Schwierigkeiten bereitet, ist das Arbeiten mit Grenzwerten und Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle mit der ε-δ-Definition:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt stetig in $x_0 \in I$ per Definition genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Die Schwierigkeiten dieser Aussage und ihres Beweises ist durch vielfältige Aspekte und ihre (logische) Komplexität erklärbar:

- Die quantorenlogische Schreibweise ist aus der Schule kaum bekannt. Insbesondere die Reihenfolge und Abhängigkeiten müssen verstanden werden.
- Die Implikation $\Rightarrow$ muss vollständig verstanden sein.
- Nur die Strategie niederzuschreiben, wie man ein passendes δ in Abhängigkeit von ϵ findet (»Suchphase«), ist im Allgemeinen noch kein formal korrekter Beweis.
- Das Rechnen mit und Abschätzen von Beträgen und Ungleichungen[19] muss beherrscht werden, spielt aber im schulischen Unterricht kaum eine Rolle.
- Letztendlich müssen alle Überlegungen zu einem formal schlüssigen Gesamten ($=$ Beweis) verbunden werden, in dem jeder Schritt (logisch) begründet werden können muss.

16 Nämlich dass die beiden Graphen rechts von einer bestimmten Zahl a übereinanderliegen.
17 Z. B. bei der Transitivität durch das jeweils größere a von f und g bzw. g und h
18 Aussagen von Studierenden wie »Äquivalenzrelationen bei Funktionen haben wir nie gemacht! Wie soll man das können?« unterstrichen das. In der Tat wurden zwar in der Lehrveranstaltungen Funktionen verschiedenster Art behandelt und davon unabhängig auch Äquivalenzrelationen anhand vieler Beispiele, allerdings nicht in einem gemeinsamen Aufgabe. Trotzdem muss man aus fachlicher Sicht erwarten dürfen, dass man dieses Beispiel lösen kann, wenn man die beiden einzelnen Themengebiete verstanden hat.
19 Artigue stellt in [68] S.215 ebenfalls fest, dass sich u. a. dadurch »a completely new technical world« in der Analysis ergibt, deren Identifizierung und Beherrschen notwendigerweise ein Langzeitprozess ist.

Daneben unterscheidet sich die Definition in der Schule (»Bleistiftstetigkeit«: Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Bleistift absetzen zu müssen.) zunächst gänzlich von der hochschulmathematischen Definition. Ein Modell von Tall und Vinner versucht die dadurch entstehenden Probleme zu erklären (vlg. beispielsweise [58] S.240, sowie [68] S.208 und [10] S. 255). Das Modell unterscheidet (streng) zwischen dem Konzept, wie es durch die Definition z. B. in einer Vorlesung charakterisiert ist, und dem Konzept, wie es im Lernenden als Vorstellung verankert ist:

- Der Begriff *concept definition* ist die formale Definition eines mathematischen Konzept, so wie es die Studierenden in den Lehrveranstaltungen präsentiert bekommen, im obigen Beispiel etwa die ϵ-δ-Definition von Stetigkeit (und die damit eingeschlossenen Folgerungen und Beispiele).
- Der Begriff *concept image* ist dagegen die mentale Vorstellung, die eine Person zu einem Konzept hat. Es umfasst typische Beispiele, Gegenbeispiele, grafische Veranschaulichungen usw. Auf die Stetigkeit bezogen kann das heißen, dass Studierende sich nach wie vor Stetigkeit als »durchgezogene Linie« vorstellen, typische Graphen dazu sind etwa die von Polynomfunktionen.

Das *concept image* muss also nicht notwendigerweise mit der *concept definition* übereinstimmen, was vor Lehrveranstaltungen mit Vorwissen aus der Schule zustande kommen kann, wenn die *concept image* nicht ausreichend schnell an die neue *concept definition* angepasst werden kann. Verständnis auf hochschulmathematischem Niveau ist nur dann möglich, wenn sowohl die *concept definition* als auch das *concept image* an die hochschulmathematische Definition angepasst wird. Dieser Zustand bzw. Vorgang wird als *concept formation* bezeichnet. Passt sich allerdings das *concept image* nicht an die formale Definition an, so ergibt sich Handlungsunfähigkeit bei Aufgabentypen, die nicht in die Kategorien des Vorwissens passen. Daneben gehen Fischer, Heinze und Wagner ([10], S. 255) davon aus, dass *concept definitions* in der Schule fast nie gebraucht wurden und man auch nur mit einem *concept image* und einigen Prozeduren die schulischen Anforderungen erfüllen könnte. Zur Illustration folgt ein Beispiel, dass sich nicht mit der Bleistiftstetigkeit in Einklang bringen lässt (vgl. Fußnote 37 auf Seite 39):

Untersuchen Sie folgende Funktion $f : D := (-1, 1) \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an $x_0 \in D$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in D \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{wenn } x \in D \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Damit Lernende Verständnis erlangen können, ist demnach ein erstes Thematisieren der Sinnhaftigkeit einer formalen Definition von Stetigkeit sinnvoll, wenn gleichzeitig auch auf die damit einhergehenden zu ändernden Vorstellungen eingegangen wird, um die Studierenden beim Anpassen ihres *concept images* an die geänderte *concept definition* zu unterstützen.

Insgesamt lohnt es sich wegen dieser vielfältigen Aspekte der Schwierigkeiten, Grenzwerte und Stetigkeit in einer über den Schulstoff hinausgehenden Form in einen Brückenkurs aufzunehmen.[20] Auch wenn nicht erwartet werden darf, dass die Teilnehmenden in so kurzer Zeit alles verstehen, so ist davon auszugehen, dass zumindest einige Schwierigkeiten entschärft werden und dadurch Vorwissen für das erste Semester aufgebaut werden kann.

Das Thema Grenzwerte und Stetigkeit soll im Brückenkurs auf zunehmend formaler Ebene behandelt werden, um den Studierenden ein Vorverständnis für das erste Semesters zu geben und dadurch zu erwartende Probleme zu entschärfen.

20 Zu weiteren Problemen mit dem Konzept des Grenzwertes vgl. z. B. [60], S.153ff.

6.3.3. Exaktheit und Argumentation bei aus der Schule Bekanntem

Viele Erstsemestrige kommen mit einer sehr unreflektierten Einstellung zur Allgemeingültigkeit von Rechenregeln bzw. Rechenverfahren an die Universität. Es fällt den Erstsemestrigen schwer, diese vermeintliche Allgemeingültigkeit kritisch zu hinterfragen bzw. je nach Themengebiet auch aufzugeben. Neben den abstrakten Inhalten der Algebra[21] zeigt sich, das auch bei anschaulicheren Gebieten wie der Differentialrechnung unerlaubte Verallgemeinerungen von Rechenregeln verwendet werden, die auf einem zu wenig exakten Verständnis der Theorie dahinter beruhen und zu Problemen führen, sobald man die schulischen Standardbeispiele (d. h. unendlich oft stetig differenzierbare Funktionen) verlässt. Das sei an einem Beispiel illustriert:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Ein typischer Fehler liegt im Ableiten alle Rechenvorschriften (und zwar unabhängig davon, ob sie auf offenen Umgebungen definiert sind oder nicht. Bei $\leq$ statt $<$ und $=$ wird analog falsch vorgegangen.):

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2)' \\ (0)' \\ (2x)' \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es wird dabei nicht hinterfragt, ob das Vorgehen überhaupt erlaubt, d. h. gerechtfertigt ist – und unter welchen Voraussetzungen es erlaubt ist. Auch $(0)' = 0$ an einem einzigen (!) Punkt wird nach den üblichen Rechenregeln abgeleitet – was gänzlich dem Umgebungs-Aspekt der Ableitung widerspricht.[22] Weiters wird das Ergebnis nicht auf Plausibilität (z. B. durch eine geeignete Skizze) überprüft. Auch noch am Ende des ersten Semester werden Fehler dieser Art gemacht, obwohl die Theorie der Differenzierbarkeit auf einem exakten Weg eingeführt wurde und insbesondere die gängigen Rechenregeln (nur) auf offenen Intervallen hergeleitet wurden.

Eine Erklärung dafür ist, dass das *concept image* noch nicht mit der geforderten *concept definition* (d. h. Differentialquotienten-Definition der Differenzierbarkeit) übereinstimmt. Als *concept image* herrscht offenbar das formale Rechnen vor, wobei fraglich ist, ob die geforderte *concept definition* tatsächlich angenommen wurde. Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass je nach Art der Aufgabenstellung trotzdem verschiedene Aspekte des *concept image* herangezogen werden – man spricht vom *evoked concept image* (siehe [58] S.240). Wird etwa explizit die Berechnung einer Ableitung über die Definition des Differentialquotienten gefordert, so wird dem durchaus von den Studierenden entsprochen. Es scheint, dass Signalwörter bestimmte Bereiche relativ leicht aktivieren können, was vermutlich auf das Training mit »Signalwort-Aufgaben«[23] aus der Schule zurückzuführen ist.

Allgemein fällt es den Studierenden schwer, bei »Rechenaufgaben« zu erkennen, dass auch bei diesen grundsätzlich argumentiert werden muss – etwa wenn es darum geht, die kritischen Punkte, Extremwerte und Wendepunkte einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu bestimmen. Die Gefahr, dass die Studierenden in ein schulisches, unreflektiertes Schema zurückfallen, ist groß.[24] Es scheint, dass sich diese Studierenden

21 Gruppentheorie und Ringtheorie in ihrer »Gesamtheit« wird an der Uni Graz sowohl im Bachelor als auch im Lehramt erst im vierten Semester behandelt. Die für die LVen *Lineare Algebra 1 und 2* notwendige Gruppentheorie wird selbstverständlich schon in diesen LVen behandelt, auch wenn man nicht davon ausgehen kann, dass sie von allen Studierenden zu diesem Zeitpunkt wirklich verstanden wird.

22 Auch im schulischen Unterricht sollte klar thematisiert werden, dass Differenzierbarkeit und Stetigkeit Eigenschaft sind, bei denen man immer Umgebungen der interessierenden Stelle betrachten muss. Dieser Approximationsgedanke bzw. dynamische Annäherungsprozess sollte eigentlich in der Schule behandelt werden, da der Differentialquotient anschaulich über die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekandensteigung eingeführt wird.

23 »Führe eine Kurvendiskussion durch . . . « bewirkt bei den SchülerInnen sofort, das f', f'' berechnet, $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ gelöst werden, ohne auch nur inhaltlich darüber nachzudenken.

24 In der Schule werden üblicherweise nur Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Extremwerte untersucht. SchülerInnen legen sich dabei für gewöhnlich ein Rechenschema $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ usw. zurecht.

anfangs nur sehr schwer vom (beschränkten) schulischen Vorwissen verabschieden wollen. Hauptproblem dabei ist, dass das schulische Vorwissen (wenn überhaupt) oft nur im beschränkten schulischen Rahmen seine Gültigkeit hatte, aber bei Nicht-Standard-Schulaufgaben seine Gültigkeit verliert. Damit ist es kaum anschlussfähig, was auch der didaktischen Reduktion oder der unzureichenden fachlichen Qualifikation der Lehrkraft geschuldet sein kann. Aus mathematischer Sicht muss den Lehrkräften in der Schule (und evtl. den SchülerInnen selbst) vorgeworfen werden, dass in der Schule zu wenig auf die Voraussetzungen von Sätzen eingegangen wird, obwohl viele Schulbücher in dieser Hinsicht fachlich sehr genau sind. Es muss davon ausgegangen werden, dass im schulischen Regelunterricht[25] zu selten Argumentationen und Begründungen eingefordert werden. Es scheint, dass sich Lehrkräfte zufrieden geben, sobald die SchülerInnen fähig sind, Aufgaben zu rechnen.

> Ein Brückenkurs muss diese Problematik der Exaktheit und der begrenzten Gültigkeit von Aussagen und Rechenregeln für die SchülerInnen sichtbar machen, um ihnen ein Verständnis für die Argumentationsbedürftigkeit bei Rechenverfahren zu ermöglichen. Die hier genannten Inhalte bieten sich dazu an, weil sie anschlussfähig an die Schulmathematik sind, aber trotzdem im ersten Semester eine wesentliche Rolle spielen.

Weitere Beispiele für diese Probleme sind:

- Die Anwendung von Produkt-, Quotientenregel, Kettenregel, ohne die Differenzierbarkeit der Funktionen sicherzustellen
- Die Bestimmung von Grenzwerten, ohne die Umformungsschritte durch die Rechenregeln für Limiten zu begründen. Es wird einfach gerechnet, ohne rechtzufertigen, dass die einzelnen Umformungsschritte wirklich erlaubt waren. Aufgabentypen wie die folgende fallen Studierenden auch noch am Ende des ersten Semesters sehr sehr:

  > Es sei $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ gegeben. Untersuche den folgenden Limes auf Existenz und berechne gegebenenfalls seinen Wert:
  > $$\lim_{x\to x_0} \frac{2e^{g(x)}}{(g(x)+2)^2}$$

- Rechenregeln für Potenzen: Ein weiterer Fehler, den Studierenden auch noch in höheren Semestern häufig begehen, ist die (im Allgemeinen für $x \in \mathbb{R}$ falsche) Gleichung
  $$\sqrt{x^2} = x\,.$$
  Richtig ist für $x \in \mathbb{R}$ bekanntlich die Gleichung
  $$\sqrt{x^2} = |x|\,.$$
  Es scheint so, dass in der schulischen Laufbahn nie ausreichend auf diese Problematik und der Bedeutung des Wurzelzeichens eingegangen wurde und Wurzelziehen immer der inverse Vorgang zum Potenzieren ist. Diese Übergeneralisierungen zeigen sich oft auch nach Ende des ersten Semesters, etwa in Prüfungssituationen, etwa durch $\sqrt{1-\cos^2(x)} = \sin(x)$.
- Zu wenig Unterscheidung von »hinreichend« und »notwendig«, Beispielsweise im Zusammenhang mit Wendepunkten: $f''(x) = 0$.
- Ähnliche Probleme stellt Artigue auch beim Rechnen mit Matrizen fest (vgl. [68], S.217).

25 Das kann sich in den nächsten Jahren durch die Kompetenzorientierung unter Umständen verbessern, vgl. Abschnitt 2.1.4.

6.3.4. Abstrakte Inhalte der Linearen Algebra

Es gibt etliche (auch internationale) Arbeiten, die die Probleme mit diesem Fachgebiet thematisieren (vgl. etwa [67] S. 255–273). Neben den abstrakten Zugängen zum Thema, den vielfältigen Notationen, den verschiedenartigen algebraischen Strukturen und Ebenen und dem zügigen Entwickeln eines großen Theoriefeldes ist auch der übliche Schwerpunkt auf Argumentieren und Beweisen (anstatt dem Berechnen von Zahlenaufgaben) eine Herausforderung für Studierende.

Die Problematik mit den abstrakten Inhalten der linearen Algebra trifft an der Uni Graz (momentan) Bachelor-Studierende eher als Lehramtsstudierende (vgl. Abschnitt 3.3): Erstere besuchen diese LVen im ersten Semester, die Lehramtsstudierende erst im dritten Semester. Trotzdem haben beide Gruppen mit ähnlichen Problemen zu kämpfen, die sich mit internationalen Erfahrungen decken. Im Folgenden werden einige Bereiche näher vorstellt.

Besonders die algebraischen Anfangsinhalte (Gruppe, Körper, abstrakter Vektorraum, Verknüpfungen) sind für Studierende auf einer abstrakten Ebene schwer zugänglich. In diesem Zusammenhang fällt es Studierenden schwer, einzuschätzen, was als bekannt vorausgesetzt werden darf und was nicht.[26] Insbesondere beim Erarbeiten von neuer, grundlegender Theorie fällt das Ausblenden (»Dumm-Stellen«) von aus der Schule bekannten bzw. aus der Unterstufe selbstverständlichen Inhalten schwer, etwa am Beispiel des (abstrakten) Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$:

> Es sei $(V, \oplus)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $\vec{0}$ und es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper mit 0 und 1.
>
> Ein Tripel $(V, \oplus, \odot)$ mit einer Verknüpfung $\odot : \mathbb{K} \times V \to V)$ mit $(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$ heißt Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-Vektorraum), wenn folgende Axiome gelten:
>
> **i)** $\lambda \odot (\mu \odot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.
>
> **ii)** $1 \odot \vec{v} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$.
>
> **iii)** $\lambda \odot (\vec{v} \oplus \vec{w}) = \lambda \odot \vec{v} \oplus \lambda \odot \vec{w}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$.
>
> **iv)** $(\lambda + \mu) \odot \vec{v} = \lambda \odot \vec{v} \oplus \mu \odot \vec{w}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.

Für gewöhnlich wird dann meist $\oplus$ aus Ergonomiegründen doch als $+$ und $\odot$ als $\cdot$ geschrieben. Aus der Schule ist es selbstverständlich, dass $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ ist. Es ist auch selbstverständlich, dass $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ ist, wobei in der Schule kaum der Begriff »Additives Inverses« thematisiert wird und der Nullvektor kaum als neutrales Element bzgl. der Vektoraddition eingeführt wird. Durch diese Unterschiede, was als selbstverständlich und was als beweisbedürftig dargestellt wird, fällt es Studierenden am Beginn sehr schwer, Aussagen als beweisbedürftig (ausgehend von den Axiomen) zu erkennen. Andererseits bedeutet der Abstraktionsvorgang bzw. Generalisierungsvorgang ein Arbeiten an Beispielen und Vorwissen (vgl. S. 257, [67]). Auch im Zusammenhang mit anderen Vektorräumen, die nicht der $\mathbb{R}^n$ sind[27], zeigen sich diese Probleme noch deutlicher, wenn nicht klar wird, wie welche Aussage bewiesen werden muss und was wann ein korrekter Beweis ist. Der Unterschied zwischen dem Aufschreiben von Definitionen bzw. Axiomen und dem Niederschreiben von Beweisen ist für Erstsemestrige nicht immer klar erkennbar. Das soll an einem Beispiel demonstriert werden, das für viele AnfängerInnen strukturell und beweistechnisch sehr schwer zu verstehen ist: Der Vektorraum der Funktionen[28]:

---

26 Hier bleibt festzuhalten, dass es auch seitens der LVen nicht immer eindeutig kommuniziert wird, was noch beweisbedürftig ist und was nicht. Es ist diesbezüglich zu überlegen, ob der *didactic contract* Ebene ii) bzw. iii) zu diesen Aspekten nicht doch transparenter gemacht werden sollte. Zum Teil ist das in Lehrveranstaltungen geschehen, wo nur Resultate für die Übungsaufgaben verwendet werden durften, die in der Vorlesung schon erarbeitet wurden.

27 Es scheint zu weiteren Problemen zu führen, wenn Vektorräume (nur) über den $\mathbb{R}^n$ (und isomorphe Strukturen) eingeführt werden, weil dadurch das Koordinatendenken einen (zu) wesentlichen Aspekt einnimmt. Vlg. etwa [68], S. 215)

28 Eine weitere Schwierigkeit von Aufgaben wie dieser ist, dass in der Schule die zu Grunde liegenden Strukturen kaum thematisiert werden. So wird mit der Summe von Funktionen gerechnet, ohne sie wirklich zu definieren. So wird auch $(f+g)' = f' + g'$ nur als Kurzschreibweise von $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ aufgefasst, aber nicht als Gleichung in Funktionen verstanden.

Es sei V der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Funktionen von einer Menge M in einen Körper $\mathbb{K}$, also

$$V := \{f : M \to \mathbb{K}|\ f \text{ ist eine wohldefinierte Funktion}\}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f \in V$ wird $\lambda \cdot f : M \to \mathbb{K}$ definiert durch $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \forall x \in M$ und für $f, g \in V$ wird $f + g : M \to \mathbb{K}$ definiert durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \forall x \in M$.

Zeige, dass durch diese Verknüpfungen V zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$ wird.

Was implizit vorausgesetzt wird, ist der Sachverhalt, dass zwei Funktionen f_1 und f_2 bei gleichem Definitionsbereich und Wertevorrat genau dann gleich sind, wenn die Funktionswerte für alle x aus dem Definitionsbereich übereinstimmen. Dadurch hat man über die Gleichheit der Funktionswerte zu argumentieren , um die Gleichheit von Funktionen nachzuweisen. Dieser strukturelle Unterschied ist für Erstsemestrige schwer greifbar. Daneben müssen auch noch die Eigenschaften eines Körpers ausgenützt werden. Es sei z. B. nachgerechnet, dass $1 \cdot f = f$ ist für alle $f \in V$:

Es ist daher zu zeigen, dass $(1 \cdot f)(x) = f(x)$ für alle $x \in M$ ist. Man rechnet nach:

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

Beim ersten $=$ verwendet man die Definition der Multiplikation mit einem Skalar, beim zweiten $=$ die Eigenschaft, dass $1 \in \mathbb{K}$ das multiplikativ neutrale Element in $\mathbb{K}$ ist.

Durch die Schwierigkeit dieses Konzepts sind darauf aufbauende Konzepte ebenfalls problembehaftet. Das trifft vor allem auf den Dualraum zu, wie etliche Untersuchen und Lösungsvorschläge zeigen (vgl. z. B. [8]):

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt der Dualraum von V (geschrieben als V') definiert als die Menge der (stetigen) linearen Abbildungen von V in $\mathbb{K}$, also

$$V' := \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist eine stetige, lineare Funktion}\} = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$$

Dabei wird ausgenützt, dass $\mathbb{K}$ als eindimensionaler Vektorraum über sich selbst ist. Aufgrund seiner strukturellen Komplexität (verschiedene Ebenen[29]) zählt der Dualraum erfahrungsgemäß zu den schwierigeren Inhalten der Linearen Algebra. Ein Lösungsvorschlag dazu sowie sein (nicht gänzlicher) Erfolg ist in [8] dargestellt.[30]

Daneben kann hier noch die Schwierigkeit von Erstsemestrigen mit der Definition der Linearen Unabhängigkeit erwähnt werden, die laut Lehrplan kein Schulinhalt ist:

Für $n \in \mathbb{N}$ heißen die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n \in V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \in V \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \in \mathbb{K}$$

Die Implikation (vgl. Abschnitt 6.3.1) trägt wesentlich zur Schwierigkeit bei, wodurch es grundlegende Probleme bei Beweisen und Rechnungen gibt.

29 Die Vektoren des Raumes sind selbst wieder Objekte, die eine Wirkung haben, nämlich als lineare Funktionen zwischen zwei Vektorräumen. Man kann also untersuchen, was mit Vektoren in V' gemacht werden kann, aber auch, was diese Vektoren selbst machen können. Anschließende Definitionen (Duale Basis, Bidualraum) bauen darauf auf.

30 Vereinfacht gesagt ist die Idee, eine Lupe mit Zoom zu verwenden, um zu verdeutlichen, wann man in welcher Ebene ist, also ob man in der Makro-Ebene (macro level) ist (also in V' mit Vektoren rechnet), oder ob man in der Mikro-Ebene (micro-level) ist (also ein $f : V \to \mathbb{K}$ untersucht).

Abschließend muss festgehalten werden: Es ist unrealistisch, dass diese Inhalte auf diesem Abstraktionsniveau und mit dieser Komplexität (Vektorraum der Funktionen, Dualraum) für Erstsemestrige in einem zweiwöchigen Kurs sinnvoll verarbeitet werden können bzw. überhaupt die Problematiken dafür überhaupt bewusst werden. Aus diesem Grund werden Inhalte der Linearen Algebra im Brückenkurs kaum[31] aufgenommen – auch deswegen, weil die Lehramtsstudierenden Mathematik an der Uni Graz die *Lineare Algebra* erst im dritten Semester besuchen. Nichtsdestotrotz sind Teile dieser Inhalte für interessierte Studierende im Skriptum [70] zu finden, um ihnen einen unmittelbaren, niederschwelligen[32] Zugang zu Wissen bzgl. dieser Bereiche zu ermöglichen. Im Hinblick auf die Bachelor-Studierenden und im Hinblick auf eine realistische Erwartung an das Studium wird als Ziel allgemein formuliert:

Ein erstes Bewusstsein für abstrakte Strukturen (etwa Vektorräume und Verknüpfungen) vermitteln und die Abstraktionsfähigkeit anregen. Das Konzept bzgl. Addieren und Produkt von Funktionen sowie die Hintereinanderausführung in einer für das Studium anschlussfähigen Form bieten sich beispielsweise dafür an.

6.3.5. Nutzung der Anschauung

In den Tutorien und in den Lernbetreuungen mit Studierenden stellte sich heraus, dass es vielen Studierenden kaum gelingt, die Anschauung selbstständig zur Bearbeitung mathematischer Inhalte nutzbar zu machen.[33] Es scheint so, dass aus der Schule kaum die Strategie beherrscht wird, Skizzen und andere Veranschaulichungen zum Finden von Ideen und Sachverhalten zu verwenden. Besonders das Auffinden von Beweisideen oder grundsätzlichen Strategien durch geeignete Skizzen wird kaum selbstständig versucht. Es scheint so, dass der Übersetzungsvorgang vom Abstrakten bzw. Formalen zur anschaulichen Ebene kaum explizit thematisiert wurde und als ein mögliches Vorgehen beim Problemlösen (bzw. zur Ergebniskontrolle) verwendet werden kann.

Besonders drastisch aus schulischer Sicht scheinen die Schwierigkeiten im Zusammenhang mit Funktionen zu sein. Zusätzlich ist die inhaltliche Trennung zwischen Funktion und ihrem Graphen nicht immer ausreichend klar. Das Skizzieren von affinen[34] Funktionen wird vom Großteil noch geschafft. Dagegen lassen sich grundlegende Wissenslücken bzgl. der Verläufe von e-Funktion, Logarithmus, Sinus und Kosinus. Besonders drastisch sind die Probleme bei zusammengesetzten Funktionen wie $f+g$ oder $f \cdot g$, noch problematischer bei Hintereinanderausführungen $f \circ g$, was Gespräche mit Studierenden zeigen. Ein Brückenkurs kann hier ansetzen:

Nutzung der Anschauung für (zunächst) abstrakte bzw. formalisierte Aussagen. Übersetzen von formalisierten Aussagen in anschauliche Skizzen.

31 Der Unterschied zwischen Verknüpfungen zwischen Funktionen und Funktionswerten wird/wurde dennoch thematisiert, da er auch für die Differential- und Integralrechnung relevant ist. Ebenso wurden die Rechenregeln des $\mathbb{R}^n$ eingeführt und durch den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.
32 Niederschwellig im Sinne von »kein Bibliotheksbesuch bzw. Literatursuche nötig«.
33 Auch andere kommen (etwa im Hinblick auf die Analysis) zu diesem Resultat, vgl. [53], S.109.
34 Schulbegriff: lineare Funktionen

7. Perspektive als Studienvertreter

Als Studienvertreter[1] für die Studienrichtung Mathematik stand und steht der Autor in engem Kontakt[2] mit den Studierenden des Bachelor- und Lehramtsstudiums. Dadurch erhält man Einblick in die Probleme der Studierenden mit ihrer Studienorganisation, Motivation oder auch ihrer Sinnsuche bzgl. Inhalte im Studium (vorwiegend im Lehramt). Folgende Problemfelder werden thematisiert:

i) Informiertheit der Erstsemestrigen vor dem Studium sowie Erwartungen an das Studium (Abschnitt 7.2)

ii) Probleme mit der Verknüpfung zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik im Studium (Abschnitt 7.3)[3]

7.1. Quellen der Einschätzungen

Die Einschätzungen zu diesen Problemzonen entstammen neben subjektiven Einschätzungen, etwa durch Gespräche mit Mitstudierenden, vor allem aus folgenden Tätigkeiten:

i) Beratungstätigkeiten, z. B. im Rahmen von Erstsemestrigenberatung (Info-Tage der Österreichischen HochschülerInnenschaft an der Uni Graz)

ii) Info-Veranstaltungen für Studieninteressierte (Warum Mathe?)[4] bzw. Erstsemestrige (Orientierungslehrveranstaltungen der jeweiligen Studien)[5]

iii) Umfrage unter rund 100 Lehramtsstudierenden zum Lehramtsstudium aus dem SoSe 2011 [71].[6]

7.2. Informiertheit vor dem Studium und Erwartungen an das Studium

Ein wesentliches Problemfeld, das sich sowohl in der Umfrage als auch bei den Beratungen feststellen lässt, ist die zum Teil schlechte Informiertheit der Studierenden vor dem Studium, sei es allgemein über die Universität, das Studium an sich sowie die LVen samt Ablauf, Anforderungen, Inhalte oder Methoden. Studierende führen in ihren Aussagen bei der Umfrage immer wieder ihre anfängliche, falsche Vorstellung vom Studium und universitärer Mathematik an.

---

1 Ein Studienvertreter ist eine von drei oder fünf Person pro Studiengebiet, die im Rahmen der Wahlen der Österreichischen HochschülerInnenschaft (ÖH) gewählt wurde. Die Studienvertretung bestehend aus den StudienvertreterInnen hat die Aufgabe, die Interessen der Studierenden gegenüber der Universität zu vertreten. Nähere Informationen unter http://oehunigraz.at bzw. http://mathematik.oehunigraz.at. In Deutschland ist statt dem Begriff »Studienvertretung« auch »Fachschaft« eine gängige Bezeichnung.

2 E-Mail-Verkehr, persönliche Gespräche, Social-Media-Gruppenbetreuung/Forum, Online-Umfragen, Erstsemstrigenberatungen usw.

3 Dieses Problem besteht historisch offenbar schon lange. Schon Felix Klein stellte 1908 fest, dass der Eintritt in eine Mathematik-Lehramtsstudium sowie der Wiedereintritt in die Schule zwei wesentliche Sprünge im Hinblick auf die behandelte Mathematik darstellt. (Zitiert nach [2], S. 1-2).

4 Inhalte, Ziele usw. sind auf der Homepage der Studienvertretung ersichtlich: http://mathematik.oehunigraz.at/studieninteressiert/info-veranstaltungenberatungen/

5 Orientierungslehrveranstaltungen sind an der Uni Graz für jedes Studium ohne Zugangsbeschränkung vorgeschrieben. Sie finden in der ersten Woche des Wintersemesters statt und sollen die Studierenden über über ihr Studium (Curriculum, Ziele, Arbeitsweisen) sowie die Universität informieren. Vgl. [38] oder [40]

6 Diese Online-Umfrage wurde damals vom Autor dieser Arbeit und der damaligen Studienvertretung durchgeführt zwecks Entwicklung eines neuen Studienplanes. Themengebiete waren Studieneinstieg (inkl. Wunscheinstieg), (erreichte und gewünschte) Ziele eines Lehramtsstudiums Mathematik, Lehrveranstaltungen und Inhalte (wovon mehr, was streichen?) sowie allgemeine Zufriedenheit (was ist positiv, was negativ, Verbesserungsvorschläge). Die vollständige Auswertung ist verfügbar unter http://mathematik.oehunigraz.at/studieninteressiert/info-material/

7.2.1. Niveau und Voraussetzungen

Besonders schwierig fällt es den angehenden Studierenden, eine Vorstellung vom Niveau des Studiums und der LVen zu erhalten. Das betrifft nicht nur die Komplexität der Inhalte oder die Abstraktion an sich, sondern auch den Anspruch an das Lerntempo, die Selbstständigkeit, den Umgang mit Verständnisschwierigkeiten. Daneben ist kaum klar, welche mathematischen Fähigkeiten im Studium vorausgesetzt werden. Zwar beginnen viele Lehrveranstaltungen sehr grundlegend, aber ohne Vorwissen scheint es für durchschnittlich begabte Studierende sehr schwer, den Lehrveranstaltungen von den Inhalten her, von den Ideen her und auch der Stoffmenge her zu folgen.

Es zeigt sich, dass viele der Studierenden vom hohen Niveau überrascht sind. Der Umgang damit scheint sehr unterschiedlich zu sein: Motivation zu Höchstleistungen oder Motivationsverlust durch Frustration (vgl. [71], S.4-8). Daneben gibt es aber auch einige wenige, die sich das Studium im Vorhinein schwerer vorgestellt haben, als es dann tatsächlich für sie war.

Ein großes Problem ist, dass die Anforderungen momentan im Vorfeld kaum transparent gemacht werden, insbesondere von Seiten der Universität.

Selfassessment[7] oder einen Aufnahmetest[8] gibt es nicht, Informationsangebote[9] sind nur spärlich vorhanden. Es ist eine Überlegung wert, auf den Webseiten der Uni Graz vor der Inskription verpflichtende Info-Materialien anzubieten, die vor Inskription des Studium durchgesehen werden müssen, da auch der Studienplan und der Großteil der einzelnen LVen offen lassen, was implizit von den Studierenden an Vorwissen vorausgesetzt wird. Das Bereitstellen von Schlagwörtern (z. B. »Differential- und Integralrechnung auf Schulniveau«) liefert keine ausreichende Aussagekraft an die inhaltlichen bzw. kompetenzbezogenen Voraussetzungen. Vielmehr müssten konkrete Aufgaben oder Textbeispiele bereitgestellt werden – inkl. zugehöriger Kompetenzkataloge.[10] Eine Erweiterung der Angebote bzw. Möglichkeiten zur Erwartungsabklärung und zum Anforderungsprofil scheint daher sinnvoll, im besten Fall sind diese Angebote bereits in die Schule einzubinden – und zwar mehr als bisher.[11]

Daneben zielt die Schule (vgl. Kapitel 2) nicht auf fachbezogene Studierfähigkeit[12], sondern auf allgemeine Studierfähigkeit ab, was im Hinblick auf die universitäre Mathematik im Vergleich zu anderen Fachgebieten ein sehr großer Unterschied ist. Allgemein darf davon ausgegangen werden, dass nicht alle Studierenden über die notwendigen Fähigkeiten und das notwendige, grundlegende Wissen verfügen.[13]

Ein Brückenkurs kann beide Problematiken aufgreifen, nämlich darzustellen, was vor dem Studium als bekannt vorausgesetzt wird, und auszublicken, was während des Studiums verlangt wird.

---

7 Die Uni Graz verfügt in anderen Studien bereits über eine mit »Unigate« `http://www.unigate.at` betitelte Plattform, bei der man abklären kann, in wie weit die eigene Vorstellung vom Studium den Einschätzungen der momentan Studierenden entspricht. Man beantwortet Aussagen mit einer Skala von »trifft völlig zu« bis »trifft nicht zu« und bekommt bei der Auflösung die durchschnittlichen Antworten der momentan Studierenden zum Vergleich geliefert. Das Unigate ist in den entsprechenden Studien ein verpflichtender Schritt vor der eigentlichen Inskription. In den Naturwissenschaften zeigt sich, dass etwa die Hälfte der Studierenden, die das Unigate in Anspruch genommen haben, *nicht* mehr zur Inskription weitergehen, was aus Sicht der Universität durchaus positiv bewertet werden kann, da man davon ausgeht, dass Studierende mit falschen Vorstellungen das Studium nicht mehr inskribiert haben. Aufgrund des großen Aufwands bei der Erstellung dieses Angebotes (Entwicklung der Aussagen, Erhebung der Antworten der Studierenden usw.), wurde das Unigate für Mathematik bis jetzt noch nicht implementiert, ist aber geplant.

8 Durch das im Juni 2013 fixierte neue Gesetz zur LehrerInnenausbildung werden die momentanen Lehramts-Diplomstudien in den nächsten Jahren auf ein Bachelor-Master-System umgestellt. Damit einhergehend werden auch Aufnahmeprüfungen für die Unterrichtsfächer entwickelt.

9 Außer dem Studienleitfaden Mathematik der ÖH Uni Graz gibt es keine Informationsangebote, die über die Inhalte und Konzepte der Hochschulmathematik auch anhand von konkreten Beispielen informieren. Der Studienplan ist diesbezüglich so allgemein geschrieben, dass ein Studienanfänger keine passende Vorstellung entwickeln kann

10 Vgl. dazu die schwierige Situation zum Festlegen von mathematischem Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule in [72].

11 Momentan gibt es bereits eine Beratung für Maturanten und Maturantinnen direkt an Schulen, diese wird nur von jeweils zwei Studierenden der ÖH für sämtliche Studienangebote einer Universität betreut und kann daher nicht die oben genannten Ziele in der notwendigen Vollständigkeit erreichen.

12 Vgl. z. B. [73] zur Schulmathematik und Studierfähigkeit in MINT-Studien.

13 In Kapitel 13 wird versucht, mittels eines Orientierungstests am Beginn des Brückenkurses Antworten darauf zu geben, auch im Hinblick auf Schulnoten

Die Studierenden sollen einen Überblick über die vorausgesetzten mathematischen Inhalte (notwendiges schulisches Basiswissen) erhalten, um ihren eigenen Wissensstand überprüfen zu können.

Darüberhinaus sollen die Studierenden einen fachlichen und methodischen Einblick in das Studium erhalten, da durch eine ausreichend gute Informiertheit der Studieneinstieg erleichtert wird, weil sowohl der Zeitaufwand als auch der Zugang zu den gelehrten Inhalten transparenter wird und die Studierenden daher bewusster damit umgehen können.

7.2.2. Lerntechniken/Methoden

Auch der Umgang mit den Lernformen und Lerntechniken ist im Vorfeld des Studiums wenig klar. Das zeigen z. B. Antworten bzgl. Probleme mit dem schnellen Vorgehen in Vorlesungen oder die häufige Unkenntnis, wie man prinzipiell Mathematik ohne unzählige Übungsaufgaben (im Sinne von »Einschleifen«) erlernen kann:

> »Die Tatsache, dass die VO so sehr theoretisch und abstrakt ist und daher das PS meist kaum als Vertiefung und Übung gesehen werden kann, sondern als selbstständiger Kurs bei dem man mehr Selbststudium betreibt als sonst was, macht das Verstehen und Bestehen so schwierig.«[14][71](Rückmeldung eines/einer Studierenden im Rahmen einer Umfrage)

Insbesondere die Lehrveranstaltung *Grundbegriffe der Mathematik* wurde von vielen Studierenden als beinahe »unschaffbar« schwer erlebt (vgl. Abbildung 5.4). Die Gründe dafür sind nach Einschätzung des Autors einerseits die Thematik rund um Beweisen, andererseits nach Einschätzung der Studierenden in manchen Jahrgängen die als unfair und zu hart empfundene Benotung. Insgesamt bietet diese LV laut Studierenden nicht ausreichend Übungsmöglichkeit, was daher eine erhöhte Eigeninitiative seitens der Studierenden erfordern würde (z. B. eigenständige Literatursuche, Übungsbeispiele finden, bereitgestellte Übungsbeispiele lösen) – die allerdings zu oft unterbleibt.

Allgemein müssen sich Studierende erst an die Prüfungsmodalitäten gewöhnen, versäumen aber zum Teil das rechtzeitige Mitlernen und erschweren sich durch schwache Leistungen bei den Zwischenklausuren die Chance auf positive Noten. Es scheint zum Teil, dass der Anstieg der geforderten Leistungskurve von den Studierenden unterschätzt wird, da am Beginn einfachere Inhalte gebracht werden (niederschwellige naive Mengenlehre), dann aber durch den Funktionsbegriff schnell in kompliziertere Themen vorgestoßen wird. Das kurzfristige Nachholen von viel Stoff am Ende des Semesters ist die meisten Studierenden unschaffbar. Auch über die Semesterferien (meist drei oder vier Wochen im Februar) können kaum fundamentale Defizite aufgeholt werden, was sich in Beschwerden von Studierenden bzgl. zu schwerer Nachklausuren äußert.[15]

Letztendlich lassen sich vieler dieser Aspekte in einem Brückenkurs thematisieren und auch exemplarisch der Erfahrungswelt der Erstsemestrigen zugänglich machen:

Studierende sollen Lerntechniken kennenlernen, mit denen man universitäre Mathematik behandeln kann. Sie sollen über eigene Lernerfahrungen (auch aus der Schulzeit) reflektieren, studientaugliche Methoden anwenden und ausreichend Engagement einbringen. Daneben soll sinnvolles Zeitmanagement (auch auf die Dauer eines Semesters bezogen) kennen gelernt werden und vor üblicherweise destruktiven Varianten (z. B. »Bulimie-Lernen«) gewarnt werden.

14 Von einem höheren fachlichen Standpunkt aus besteht natürlich immer ein enger Zusammenhang zwischen Vorlesung und Übung. Dieser wird von den Studierenden allerdings nicht immer als solcher erlebt. Allerdings scheint dieses Problem nicht auf den deutschsprachigen Raum begrenzt zu sein, vgl. [53], S.105.

15 »Sie haben die Nachklausur so schwer gemacht, dass dadurch fast keiner positiv wurde.« Dass bei der Nachklausur sowieso nur die schwächeren Studierenden antreten und damit sowieso mit schlechteren Leistungen zu rechnen ist, wird dabei kaum bedacht.

7.2.3. Der Studienbeginn als Krisenerfahrung

Insgesamt zeigt sich demnach, dass das erste Semester in einem Mathematik-Studium durchaus als Krisenerfahrung bezeichnet werden kann. Die Studierenden ziehen zum Teil erstmals in eine eigene Wohnung/Studierendenheim, sind unter der Woche vom elterlichen Umfeld getrennt – und damit in vielen Bereichen des täglichen Lebens auf ihre eigene Selbstständigkeit angewiesen, die sich oft erst parallel dazu entwickelt.[16]

Dazu kommen die fachlichen Herausforderungen, über die sich die Erstsemstrige im Vorfeld kaum im Klaren sind – wie zuvor dargestellt –, da viele in der Schule in Mathematik kaum nennenswerte Anstrengungen aufbringen mussten. Obwohl der Großteil der Studierenden angibt, (schul-)mathematisch begabt und interessiert zu sein[17], gibt es trotzdem deutliche Leistungsunterschiede, die bereits innerhalb weniger Wochen zu Tage kommen. Plötzlich nicht mehr zur Leistungsspitze zu gehören, sondern nur mehr Durchschnitt zu sein, nicht mehr alles auf Anhieb zu verstehen oder auch nach längerem Nachdenken nicht zu verstehen und daher das Gefühl zu haben, trotz Erfolgen in der Schule kaum etwas zu können oder zu verstehen, ist eine Situation, mit der viele Erstsemestrige vor dem Studium kaum Erfahrung gemacht haben. Es ist kein Leichtes für Studierende, damit konstruktiv umzugehen und eine positive Einstellung zum Lernen (und der Hochschulmathematik) an den den Tag zu legen.

Als dritten Aspekt sei noch der Wechsel des sozialen Umfelds angegeben. Der Großteil der Studierenden verlässt für das Studium den angestammten Freundschaftskreis. Die Erstsemestrigen müssen sich daher wieder ein neues soziales Umfeld suchen, neue Bekanntschaften knüpfen, neue Freundschaften entwickeln. Damit verbunden ist eine Neueinordnung der eigenen sozialen Position, was natürlich auch die Chance eine Verbesserung ermöglicht. Es ist naheliegend, dass ein gutes, produktives soziales Umfeld hilft, fachliche Herausforderungen (in der Gruppe) besser zu meistern. In der Tat arbeitet der Großteil der Lehramtsstudierenden[18] intensiv im Studium zusammen, wenn es um die Erarbeitung von Lösungen zu Übungsbeispielen geht.

Ein Brückenkurs (besonders mit jungen, studierendennahen Lehrenden) kann und soll natürlich in vielen dieser Bereiche die Probleme verringern – ein einer angstfreien Atmosphäre.

> Die Studierenden sollen durch geeignete Aufgabenstellungen und Methoden dazu motiviert werden, Mitstudierende für Lerngruppen zu finden, die als Ausgangspunkt für das neue soziale Umfeld bzw. Freundschaftskreis genützt werden können.
>
> Daneben soll auf etwaige Rückschläge während des Semesters vorbereitet werden, indem anfängliche Lernschwierigkeiten und Verständnisprobleme als normal dargestellt werden. Die Wichtigkeit des konstruktiven Umgangs mit ihnen soll betont werden.

---

16 Um einen erlebten Extremfall darzustellen: Ein Mathematik-Lehramts-Studierender kam am Ende des ersten Semesters in die Sprechstunde der Studienvertretung Lehramt – begleitet von seinen Eltern. Die Mutter erzählte im Beisein des Sohnes, dass er in den ersten Wochen überfordert war, Lehrveranstaltungen und Räume zu finden, weswegen er im Wintersemester keine Lehrveranstaltung besucht und keine Prüfungen absolviert hat. Eltern und Sohn wollten dann eine Empfehlung hören, welche mathematischen Lehrveranstaltungen im Sommersemester wo abgehalten werden und welche der Sohn besuchen solle.
Auch wenn das sicher ein Extremfall ist, so sind für viele Studierende die ersten Wochen eine echte Härteprüfung. Durch die Orientierungslehrveranstaltungen hat sich die Situation etwas gebessert, was allerdings den Besuch dieser LV voraussetzt.

17 Zumindest, wenn man Präsenzbefragungen per Handzeichen im Rahmen der Orientierungslehrveranstaltungen Glauben schenken darf. Im Orientierungstest (Kapitel 13) sowie beim Fragebogen über den Studienbeginn (Kapitel 16) wurde deswegen die durchschnittliche Schulnote in der Oberstufe abgefragt, um darüber Auskunft zu bekommen.

18 Bei einem Großteil der Bachelor-Studierenden hat die Zusammenarbeit meiner Erfahrung nach eher die Aufgabe, zuvor selbstständig erarbeitete Lösungen zu diskutieren und zu vergleichen. Bachelor-Studierende, die fachlich nicht fähig sind, eigenständig auf Lösungen zu kommen, beenden das Studium meist innerhalb des ersten Studienjahres, wohingegen Lehramtsstudierende mit Blick auf den späteren Beruf versuchen durchzubeißen (»Ich werde die gelernten Sachen eh nie wieder brauchen.«).

7.3. Sinnstiftung im Lehramtsstudium

Die Sinnstiftung während des Studiums und insbesondere im Verlauf des ersten Semesters ist im Mathematik-Lehramtsstudium auch[19] an der Uni Graz ein problematischer Aspekt, der sich stark auf die Motivation der Studierenden und die Akzeptanz der mathematischen Inhalte auswirkt.[20]

7.3.1. Beliefs und belief overhang

Einige Ursachen dieser Problematik scheinen sich bereits vor dem ersten Semester im Studium anzubahnen bzw. zu bestehen und manifestieren wohl in den Entscheidungsgründen für ein Mathematik-Lehramtsstudium. Eine Problemquelle ist diesbezüglich der Charakter der Mathematik, wie er in der Schule präsentiert bzw. erlebt wurde.[21] Nach wie vor scheint oft noch ein rechenorientierter Schwerpunkt vorzuherrschen (»Bei so einer Aufgabe braucht man die Formel, setzt das da ein und rechnet es aus«), vgl. auch [75], S.78. Auf Argumentationen und Verständnis wird nicht immer bestanden. Dadurch haben Erstsemestrige ein (durchaus subjektiv unterschiedliches) Bild von Mathematik, ihrem mathematischen Selbstbewusstsein und den damit verbundenen Strategien.

Lester [76] (zitiert nach [9] S.98) führt dafür den Begriff der *beliefs* ein als »the individual's subjective knowledge about self, mathematics, problem solving, and the topics dealt with in problem statements.« Diese *beliefs* sind durch viele intrinsische oder extrinsische Einflüsse im Laufe der Schulzeit geprägt (z. B. mathematische Fähigkeiten, Interesse, Motivation; Unterrichtspraktiken, Prüfungsmodalitäten). Es ist naheliegend, dass durch das neue universitäre Umfeld neue Einflussfaktoren auf die (alten) *beliefs* einwirken, wodurch es zu erwarten ist, dass sich die *beliefs* an die neuen Gegebenheiten anpassen und sich die Studierenden in ihrem Verhalten, in ihren Erwartungen, ober auch in ihren affektiven Reaktionen verändern, siehe [9] S.98-99.

Es stellt sich jedoch heraus, dass diese *beliefs* vergleichsweise robust gegenüber Änderungen sind und demnach auch noch (weitgehend) unverändert im Lauf des ersten Semesters (zumindest drei Wochen lang) im Studium bestehen bleiben (können). Daskalogianni [9] führt dafür den Begriff »belief overhang« ein: »The majority of these beliefs are often inappropriate for for student's adjustment to advanced mathematics, and result in a problematic move from school to university.«[9] S.99. Damit ist ein *belief overhang* kontraproduktiv für neue Lernerfahrungen und für eine positive Einstellung zur Mathematik im Studium – auch im Hinblick auf die evtl. erst zu erarbeitenden passenden Strategien.

Interesse an Mathematik in der Schule liegt zwar vor, sich aber nicht direkt auf Aspekte der Hochschulmathematik übertragen, was sich in der Motivation der Studierenden zeigt[22]: Dieses schulische Interesse dürfte stark am oftmals systematischen, rechenorientierten Charakter der Schulmathematik hängen, etwa am Beispiel der Kurvendiskussion, bei der nach »Schema F« vorgegangen werden kann.[23]

Ausgehend von diesen Einschätzungen bzgl. beliefs können folgende Problemfelder gesehen werden, die sich evtl. auch erst im Verlauf des Studiums bzw. ersten Semesters offenbaren:

- Probleme bei der Anknüpfung an Vorwissen ($\rightarrow$ fehlender Zusammenhang von Hochschulmathematik mit Schulmathematik)

19 Andere Universitäten versuchen durch weitere Zusatzangebote, besondere Aufgabenformate, besondere Schnittstellenangebote diesbezüglich eine Verbesserung zu erreichen, vgl. etwa [13] und Abschnitt 19.3.

20 Wie auch an vielen anderen deutschsprachigen Universitäten besuchen die Lehramtsstudierenden Fachlehrveranstaltungen zum Teil gemeinsam mit Bachelor-Studierenden der Fachwissenschaft. Trotz deutlicher anzahlmäßiger Mehrheit der ersten wird der inhaltliche Schwerpunkt meist auf die zweite Gruppe gelegt.

21 Vgl. dazu [74]: Die Frage, was Mathematik ist und welchen Beitrag dazu der schulische Mathematikunterricht liefert, liefern kann und liefern soll, ist schwierig zu beantworten.

22 Bei Lehrveranstaltungen mit Inhalten auf Schulniveau steigt im Allgemeinen die Motivation und das Interesse der Studierenden.

23 Auch andere kommen zu ähnlichen Ergebnissen: So charakterisiert etwa Schuster (zitiert nach [2] S.3) drei Problemtypen bei Lehramtsstudierenden im Hinblick auf Studium und Beruf fest:
der »engagierte Hilflose« (sieht wenig Sinn in den Inhalten des Fachstudiums, schätzt primär die fachdidaktischen Komponenten im Studium, oft nicht in der Lage, den Ideengehalt mathematischer Phänomene eigenständig zu erfassen); der »Fachgelehrte« (mathematisch hoch interessiert, Probleme beim altersgerechten und methodisch vielseitigen Vermitteln von Inhalten); der »Pragmatiker« (sieht kaum Funktion im Studium, da die benötigte Mathematik schon aus der Schule bekannt ist, Schwerpunkt auf dem Kalkülaspekt).
An der Uni Graz dürften die Gruppen 1 und 3 anteilsmäßig überwiegen, besonders in den ersten Semesters.

- (negative) Ansicht über die Rolle der Fachwissenschaft in der Lehramtsausbildung
- (mangelhafte) Reflexionsbereitschaft und Eigenverantwortung

Diese drei Felder werden im Folgenden näher ausgeführt.

7.3.2. Probleme bei der Anknüpfung an Vorwissen

Dass zielführend an vorhandenes, verstandenes Wissen angeknüpft werden kann, stellt an drei Interessensgruppen hohe Anforderungen: Am SchülerInnen, LehrerInnen und an die Lehrenden an der Universität.[24]

Einerseits muss das schulische Vorwissen auf einer ausreichend soliden Basis stehen, d. h. Schulwissen muss verstanden sein. Damit sind Ansprüche an den verstehensorientierten Unterricht in der Schule gestellt, bei dem sichergestellt werden muss, dass ein echtes Verständnis angestrebt und auch abgeprüft wird.[25] Die SchülerInnen sind diesbezüglich gefordert, sich nicht nur mit dem rezepthaften Anwenden von Mathematik zufrieden zu geben, was der Bereitschaft zur Reflexion der eigenen Vorstellung von Mathematik bedarf. Andererseits muss die universitäre Fachausbildung auf dieses Vorwissen zurückgreifen, um damit von Anfang an die Inhalte in einen Kontext für die Studierenden bringen zu können. Falsches bzw. problematisches Vorwissen wird nur ungern und unter großer Anstrengung abgebaut (vgl. Abschnitt 4.5 und 6.3) und mündet unter Umständen in Lernkrisen. Dass die universitären Inhalte auf den schulischen aufbauen können, erfordert seitens der Lehrenden an der Universität sowohl eine Kenntnis des Lehrplans, der Schulrealität und des Publikums, als auch die Bereitschaft, die mathematischen Inhalte und Zugänge in den Lehrveranstaltungen daran zu orientieren – und damit gegebenenfalls (zunächst)[26] auf mathematische Strenge und Vollständigkeit in notwendigem Ausmaß zumindest am Beginn des Studiums bzw. des ersten Semesters zu verzichten.[27] Da die Umgestaltung von Studienplänen keine einfache Aufgabe ist, kann hier ein Brückenkurs deutlich unkomplizierter ansetzen, die Studierenden dort abzuholen, wo sie sind.

> Es soll für das erste Semester ein tragfähiges Grundwissen aufgebaut werden, das an Schulwissen aufbaut, dieses ergänzt oder in Teilen auch ersetzt, damit im ersten Semester an dieses Grundwissen angeschlossen werden kann. Den Studierenden soll gleichzeitig deutlich gemacht werden, dass bestimmte Inhalte (etwa Stetigkeit) notwendigerweise einer geistigen Überarbeitung bedürfen.

Studierende, die über viel schulisches Vorwissen im Umgang mit mathematischer Exaktheit und Beweisen verfügen, erleben deutlich weniger Frustration im Lauf des ersten Semester und haben dadurch weniger mit Übergangsschwierigkeiten in den entsprechenden LVen zu kämpfen als andere. Ein qualitativ hochwertiger, inhaltlich anspruchsvoller Analysis-Unterricht in der Schule (beispielsweise Differentialquotient, Grenzwerte) entschärft die Probleme vor allem im momentanen Lehramtsstudium deutlich – erkennbar an den Leistungen und dem Arbeitsaufwand in der thematisch naheliegenden Lehrveranstaltungen *Höhere*

24 Vgl. dazu Empfehlungen für Mathematik an der Schnittstelle Schule Universität in der Schweiz, S. [77], S.138ff

25 Das kann der schulische Unterricht nach Meinung von Hochschullehrenden im Allgemeinen nicht leisten (vgl. eine Studie von Grünwald unter 63 Hochschullehrenden [4]).

26 In anderen Ländern funktioniert das durchaus. Durch die calculus-Reform in den USA (vgl. z. B. [32] S.291ff) werden beispielsweise nur mehr selten ϵ-δ-Beweise behandelt (S. 93, ebendort). Zur Calculus-Reform im Allgemeinen vergleiche etwa [78].

27 Es gibt dazu auch andere Ansichten zur Übergangsproblematik im Sinne von Brückenschlägen. Kümmerer meint in [1], S.141 dazu: »Da mag die Versuchung groß sein, die Studierenden anfangs in den Vorlesungen ein wenig zu schonen, mit bekanntem Stoff zu beginnen (›so schwer ist das doch alles gar nicht‹) und schleichend in die Hochschulmathematik einzusteigen. Ich bin mir nicht sicher, ob man den Studierenden damit einen Gefallen erweist: Die einen kommen voller Neugier an die Universität und wollen nun endlich wissen, ›was Sache ist‹: Sie werden von einem solchen Beginn enttäuscht sein. Die anderen lassen sich allzu gerne ›einlullen‹ (›das kenne ich doch schon alles, Mathematik ist für mich kein Problem‹): Sie verpassen leicht den Moment, zu dem sie den Kontakt zur Vorlesung verlieren. Bis ihnen das Problem bewusst wird, ist es oft schon zu spät, den Faden wieder aufzunehmen und so kommt es in der zweiten Hälfte des ersten Semesters viel zu oft zu unnötigen Abbrüchen. [. . .] Ich denke, es dient allen Studierenden, wenn bewusst und pointiert Unvertrautes an den Anfang des Mathematikstudiums gestellt wird. Stehen in der ersten Vorlesung des Mathematikstudiums die Peano-Axiome an der Tafel, dann wird für alle sichtbar: ›Hier beginnt etwas Neues, damit muss ich mich auseinandersetzen‹.« Aus meiner Sicht scheint eine Mischung aus spannenden neuen Inhalten als auch ein Rückgriff auf Vorwissen – bei gleichzeitiger Thematisierung von Unterschieden usw. – für den Großteil der Studierenden geeigneter.

Mathematik I –, weswegen diese Studierenden Kapazitäten für andere (mathematische) Herausforderungen des ersten Semesters haben. Nichtsdestotrotz stellen schulferne Themengebiete und Zugänge wie in der *Linearen Algebra* auch für (hochschulmathematisch) gute Studierende mit viel Vorwissen eine Herausforderung dar[28] Die mit dem vorhandenen Vorwissen einhergehenden Erfolgserlebnisse dürften wieder eine positive Motivation darstellen, wodurch diese Studierenden auch eine höhere Anstrengungsbereitschaft aufzuweisen scheinen. Als Maßnahme für diese Aspekte wird Folgendes in einem Brückenkurs angestrebt:

> Die angehenden Studierenden sollen erkennen, dass für Erfolgserlebnisse im Allgemeinen beträchtlich mehr Energie in die Beschäftigung mit Mathematik hineingesteckt werden muss als aus der Schule gewohnt. Dieses Bewusstsein soll als notwendiges Kriterium für das studentische Mathematik-Lernen erkannt werden.

7.3.3. Rolle der Fachwissenschaft in der Lehramtsausbildung

Die oben dargestellten Problemfelder führen spätestens[29] im Lauf des ersten Semesters bzw. beim Voranschreiten des Stoffes in Richtung wissenschaftliche Mathematik zur folgenden, überstehenden Frage, nämlich zur Frage der Rolle der Fachwissenschaft in der Mathematik-Lehramtsausbildung: Nicht nur an der Uni Graz ist die Rolle der mathematischen Fachwissenschaft (und ihr Ausmaß![30]) in der Lehramtsausbildung unter Studierenden und Lehrenden umstritten.[31] Bei fachlich schwächeren bzw. (kognitiv) unbegabteren Studierenden das Verständnis für eine fundierte, wissenschaftliche Fachausbildung erfahrungsgemäß gering. Das zeigt sich sogar schon bei den (wissenschaftlichen) mathematischen Grundlagen im ersten Semester etwa in den *Grundbegriffen der Mathematik VU* (z. B. Formalisieren, Beweisen, Argumentieren, Relationen, Mengenlehre, vgl. Abschnitt 3.3). Aussagen wie »Wofür brauche ich als Lehrer bitte die LV *Grundbegriffe der Mathematik*? Das werde ich ja nie unterrichten!« sind keine Seltenheit.

Auch bei der Umfrage unter Lehramtsstudierenden an der Uni Graz [71] ist deutlich herausgekommen, dass die Offenheit für (vermeintlich) neue, (vermeintlich) schulferne Inhalte großteils nicht oder nur beschränkt gegeben ist – sogar bei weiter fortgeschrittenen Studierenden, die bereits einen Überblick über wissenschaftliche Mathematik und Schulmathematik haben sollten. Damit dürften viele dieser Studierenden bereits von Beginn an eine Blockade für neue Lernerfahrungen aufbauen, die nur unter größten Anstrengungen aller Beteiligten abgebaut werden können.[32] Bei einem Teil der Studierenden ist davon auszugehen, dass bereits mit Studienbeginn zu wenig Interesse am Fach und Offenheit für das Fach (als Wissenschaft) vorhanden ist. Allerdings gab der Großteil der Studierenden bei einer Orientierungslehrveranstaltung im Rahmen einer spontanen Präsenzumfrage per Handzeichen an, »Interesse an Mathematik« zu haben.[33] Die Abgrenzung der Schulmathematik von der Hochschulmathematik bleibt erfahrungsgemäß bei vielen Studierenden in einer sehr ausgeprägten Form – mitunter über das gesamte Studium – bestehen. Die Studierenden sehen (zu) wenige inhaltliche Überschneidungen. Die Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik werden von den Studierenden nicht nur am Zugang (globales Ordnen vs. lokales Ordnen oder dem Abstraktionsgrad insgesamt, vgl. [5], S. 245 - 261) erlebt, sondern explizit auch an den Inhalten selbst: Aus der Umfrage [71] sind exemplarisch

28 Vgl. dazu [2], S.7: »Oft hört man auch den Vorwurf, den Studierenden mangele es schlicht an Fleiß. Dabei ist zu bedenken, dass es sich bei Professorinnen und Professoren der Mathematik in der Regel um Hochbegabungen mit einer intensiven fachlichen Identifikation und einem eingeübten Habitus handelt.«

29 Bei einem Teil der Studierenden ist bereits im Vorfeld davon auszugehen, dass sie die Ansicht vertreten, ein Lehramtsstudium solle sich nur direkt mit Schulstoff beschäftigen, weil man bekanntlich nur diesen unterrichten muss. Die Matura (Reifeprüfung) wird als ausreichende fachliche Ausbildung gesehen.

30 In der Schweiz muss zuerst ein fachwissenschaftlicher Bachelor absolviert werden – die lehramtsspezifische Ausbildung wird erst im Master erhalten. Vgl. z. B `http://www.uzh.ch/studies/application/lehrpersonen/lehrdiplom.html`

31 Die in [79] empfohlenen Standards können meiner Einschätzung nach momentan an der Uni Graz allerdings nicht gänzlich erfüllt werden, etwa in der nicht-euklidische Geometrie.

32 Es ist empirisch nachgewiesen, »dass die Lehramtsstudierenden keine belastbare, affektiv unterstützte positive Beziehung zur Mathematik haben bzw. entwickeln. Statt auf Begeisterung für Mathematik deuten sie eher auf eine innere Abkehr vom Fach hin.« (Pieper-Seier [80] zitiert nach [5] S.4).

33 Inwieweit es sich dabei nur um das Erfüllen der gesellschaftlich erwünschten Ansicht handelt, sei dahingestellt.

zwei Antworten auf die Frage »Auf welche momentanen LVen bzw Inhalte kann verzichtet werden?« angeführt:

> »*Analysis I, II* und *Lineare Algebra I, II* sind einfach zu weit von der Schulmathematik entfernt und haben darüberhinaus nur wenig Relevanz, da man nie einem Schüler irgendetwas von diesem Gelernten vermitteln kann, weil die Schüler das einfach nicht nachvollziehen können.« [34]

> »*Analysis 1* Vorlesung... der Stoff ist sehr schwer verständlich«

Mit diesen Ansichten ist die Gefahr groß, dass von vornherein ganze Lehrveranstaltungen als schulfern abgestempelt werden und die Studierenden dadurch keine Zusammenhänge mit der Schulmathematik *erwarten* und *suchen*. Man könnte insgesamt eher von einem kaum überwindbaren Graben zwischen der Schulmathematik und der Hochschulmathematik sprechen, über den kaum Brücken führen. Die Gründe, warum kaum Brücken gebaut werden, müssen bei mehreren Interessensgruppen gesucht werden:

- Lehrkräfte an den Schulen: Sie müssen passende Lernsituationen in der Schule mit ausbaufähiger Mathematik bereitstellen. Daneben sind Ausblicke in die Hochschulmathematik vorteilhaft – besonders für das obere Leistungsviertel. Einen Einfluss dürfte auch die Fachkompetenz der Lehrkraft selbst darstellen – im Sinne des Lernens am Modell. In diesem Sinne muss auch Fachkompetenz verstanden werden: Nicht als die Fähigkeit, Standardbeispiele möglichst einfach und rezepthaft erklären zu können, sondern als die Kompetenz, Inhalte auf verschiedenen Exaktheitsebenen und Komplexitäten adäquat vermitteln zu können – ausgehend von einem wissenschaftlich fundierten Fachwissen, das bei Vereinfachungen (didaktische Reduktionen) entscheiden hilft, ob sie sinnvoll oder verfälschend sind.
- Lehrende an den Hochschulen: Sie müssen Hochschulmathematik so aufbereiten und die Schwerpunkte so setzen, dass die vorhandenen Zusammenhänge zur Schulmathematik aus der eigenen Biographie der Studierenden sowie für den zukünftigen Beruf unmittelbar sichtbar werden. Nur wenn diese Zusammenhänge explizit gemacht werden, haben durchschnittliche Studierenden eine realistische Chance, davon für ihren zukünftigen Beruf als Lehrkräfte zu profitieren. Den Lehrenden muss klar sein, dass durch das Studium das Bild der Mathematik in den Köpfen der Studierenden wesentlich geprägt werden kann und soll.
- Studierende: Sie müssen die Angebote der Lehrenden (falls vorhanden) nutzen und sich darum bemühen, die notwendige fachwissenschaftliche Kompetenz zu erwerben, um die Verknüpfungen als solche erkennen zu können. Insbesondere muss die Offenheit bzgl. der fachwissenschaftlicher Inhalte und im besten Fall eine positive Einstellung dazu gegeben sein. Das Bemühen, Verknüpfungen zu suchen und anzunehmen, ist notwendig. Diese geistig anspruchsvollen Leistungen bleiben den Studierenden nicht erspart – und soll es auch nicht, da sie im späteren Lehrberuf auf (zum Teil) anderen Ebenen bei den SchülerInnen mit analogen Situationen zu tun haben.

Durch diese vielschichtige Situation bleibt die Verantwortung letztendlich oft an den Studierenden hängen, falls weder die Lehrkraft in der Schule ausreichend Vorbild war, noch die Lehrenden an der Uni ausreichend Angebote zum Brückenbauen anbieten können.[35] Besonders für leistungsschwächere Studierende ist das eine Herausforderung, da sowohl die Mathematik auf Schulniveau, als auch die Mathematik auf Hochschulniveau grundlegend verstanden sein müssen. Erst danach lassen sich Verknüpfungen aufbauen, die sowohl die Schule bereichern als auch zur Wissenschaft motivieren. Insbesondere müssen in dieser Worst-Case-Situation die gemeinsamen Bereiche, die Verknüpfungen ermöglichen, erst gesucht und gefunden werden. Dieser Verknüpfungsprozess kann keine kurzfristige Aktivität sein, sondern sollte kontinuierlich bereits ab dem Studienbeginn ins Auge gefasst werden. Dadurch wird verhindert, dass die Verbindungen abreißen und hochschulmathematische Inhalte gänzlich in der Luft hängen.

34 Die Inhalte dieser LVen entsprechen den durchschnittlichen Inhalten im deutschsprachigen Raum, vergleiche dazu Abschnitt 3.3.2.

35 Auch Bauer in [81] (S. 40-41) stellt fest, dass sich diese Brücken nicht automatisch bei der Mehrzahl der Studierenden bilden. Auch gelegentliche Bemerkungen der Lehrenden diesbezüglich würden meist nicht ausreichen.

Allgemein ist im Umkehrschluss davon auszugehen, dass unverstandene Hochschulinhalte neben dem Erwerb aufbauender Inhalte den Aufbau von fachwissenschaftlicher Lernbereitschaft zusätzlich behindern – auch aus motivationaler Sicht. Daher muss von Anfang an die Bereitschaft zum Lernen präsent sein – und darf im Lauf des Studiums nicht verloren gehen. Dazu soll ein Brückenkurs seinen ersten Beitrag leisten.

Der Brückenkurs soll den Studierenden klarmachen, dass fachwissenschaftliche Kompetenz und schulisches Niveau keine Widersprüche sind und dass beide Bereiche große inhaltliche Überschneidungen in grundlegenden Themen (Funktionen, Differenzierbarkeit, . . .) haben.

Der fachkompetente Vortragende soll die Inhalte verständlich bringen und kompliziertere, abstraktere Inhalte auch auf eine anschaulichere Ebene herunterbrechen. Mit Begeisterung sollen sowohl schulnahe, als auch wissenschaftsnahe Inhalte geboten werden.

7.3.4. Reflexionsbereitschaft und Eigenverantwortung

Eng verknüpft mit der Sinnstiftung im Studium bzgl. Fachwissenschaft ist allgemein die Einstellung zum Studieren als Bildungsabschnitt in der eigenen (Lern-)Biographie. Die Frage, wer für den Lernerfolg, die Sinnhaftigkeit der Inhalte und des gesamten Studiums zuständig ist, stellt sich als zentraler Punkt heraus und spielt für Lernerfahrungen eine entscheidende Rolle. Der geänderte *didactic contract* (Ebene i) mit seiner Verantwortungsverschiebung an der Universität muss angenommen werden.

Studierenden sollten demnach das Hauptinteresse an ihrem eigenen Lernprozess haben, wenn die Studienzeit optimal für die persönliche Entwicklung und den späteren Beruf nützen soll. Folglich müssen Studierende darum bestrebt sein, sich bereits im Studium bestmöglich auf den zukünftigen Lehrberuf vorzubereiten und damit sämtliche unterrichtsrelevanten Aktivitäten verfolgen: Aufbereiten von Inhalten, Erstellen von Musterlösungen, Vorbereitung von Präsentationen, Entwickeln eines guten Tafelbildes. Dadurch erhalten vermeintlich schulferne Aktivitäten wesentliche schulrelevante Aspekte. Zur optimalen Umsetzung ist allerdings Reflexionsbereitschaft[36] notwendig, die in das Entwickeln von Eigenverantwortung mündet. Ein Brückenkurs muss daher ein erste Schritt in diese Richtung sein und über passende Methoden und Inhalte verfügen, die zur Reflexion anregen.

Bereits im Brückenkurs sollen die Studierenden über ihre Tätigkeiten in mathematischer und methodischer Hinsicht reflektieren. Steigende Verantwortung der Studierenden soll eingefordert werden. Der Kursleiter ist jene Person, die Lerngelegenheiten anbietet, die Studierenden müssen diese bestmöglich nutzen. Dadurch wird ein universitätsnaher *didactic contract* fixiert.

36 Vgl: In [10] S.267 wird thematisiert, dass es wünschenswert ist, passende Lehrkonzepte zu entwickeln, die Lehrenden und Lehramtsstudierenden helfen, Vorstellungen zu erweitern oder anzupassen, Fehlvorstellungen zu berücksichtigen oder über Vorstellungen zu reflektieren und diese evtl. auszubauen, zu korrigieren oder zu ersetzen.

Teil III.

Entwicklung und Implementierung des Brückenkurs-Konzepts

»Alle Dinge sind Gift, und nichts ist ohne Gift; allein die Dosis machts, dass ein Ding kein Gift sei.«
Philippus Aureolus Theophrastus Bombast von Hohenheim
(»Paracelsus«)

Da in den beiden vorigen Teilen I und II der Arbeit die Problemfelder beim Studieneinstieg (an der Uni Graz) aufgeworfen, konkretisiert und Ziele zu deren Entschärfung dargestellt wurden, wird in diesem Teil III der Arbeit das daraus entwickelte Konzept für den Brückenkurs dargestellt. Die Ziele werden aufgegriffen, anhand von passenden Inhalten umgesetzt und durch geeignete Methoden transportiert – unter Berücksichtigung der konkreten Rahmenbedingungen an der Uni Graz im WS 12/13.

- In Kapitel 8 »Problemfelder und Ziele« erfolgt vorab eine Zusammenfassung der Probleme und Ziele, die allgemein ein Brückenkurs für Studierende eines Mathematik-Studiums (Lehramt oder Fachwissenschaft Bachelor) aufgreifen kann. Die Ziele sind der Situation in Graz erwachsen, lassen sich aber durchaus auf andere Universitäten im deutschsprachigen Raum übertragen.
- Kapitel 9 »Rahmenbedingungen im WS 12/13« stellt die (institutionellen) Rahmenbedingungen (Personal, Abhaltungsdauer usw.) an der Uni Graz im WS 12/13 vor, die sowohl Auswirkungen auf Ziele, Methoden und Inhalte haben.
- In Kapitel 10 »Umsetzung der Ziele« werden die konkret umgesetzten Ziele des Brückenkurses vom WS 12/13, die durch die Rahmenbedingungen voreingeschränkt werden, präsentiert (und kommentiert) – in der Form, wie sie den Studierenden zugänglich gemacht wurden.
- Kapitel 11 »Brückenkurs-Methoden« stellt die im WS 12/13 gewählten Methoden (Vorlesungsteil, Übungsteil, Selbststudienanteil mit Übungsaufgaben) dar und begründet sie.
- Letztlich werden in Kapitel 12 »Brückenkurs-Inhalte« die geplanten und auch umgesetzten Inhalte in ihrer Bandbreite von Logik bis Integralrechnung präsentiert, begründet und auch anhand von konkreten Beispielen aus dem Vorlesungsteil oder dem Übungsteil illustriert.

8. Problemfelder und Ziele

In diesem Kaptitel wird ein Überblick über die charakterisierten Problemfelder beim Studieneinstieg und die dadurch resultierenden Ziele für einen Brückenkurs dargestellt. In den vorigen Teilen I und II dieser Arbeit wurde deutlich, dass die Übergangsproblematik nicht nur an ein oder zwei Problemfeldern (etwa unzureichendes Schulwissen der Studierenden) festzumachen ist, sondern sich an vielen Bereichen herausstellt. Die Situation in Graz unterscheidet sich von den Problematiken nicht wesentlich von anderen Universitäten. Ein ganzheitliches Konzept, dass sowohl Inhalte, Lehr- und Lernformen, aber auch Einstellungen und Motivationen behandelt, ist dadurch naheliegend.

Schulwissen festigen/nachholen

Neue Lernerfahrungen bauen auf Vorwissen auf, erweitern diesen, verändern dieses oder greifen (unbewusst) darauf zurück. Damit ist schulisches Vorwissen ist zwar kein hinreichendes Kriterium, um mit akademischer Mathematik zurecht zu kommen, erhöht aber die Chance, dass neue Inhalte nicht in der Luft hängen. Grundkompetenzen wie das Rechnen mit Brüchen, das Umformen von Termen, das Lösen von Gleichungen, das Arbeiten mit dem Funktionsbegriff oder auch das Skizzieren von Funktionsgraphen sind Voraussetzungen dafür, dass mit darauf aufbauenden Konzepten sinnvoll gearbeitet werden kann. Obwohl der Lehrplan der AHS viele dieser Inhalte vorsieht, so darf im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass sie immer verstanden wurden. Weiters ist für den Brückenkurs selbst eine gemeinsame Arbeitsgrundlage nötig, um weitere Problemfelder thematisieren zu können.

Vorverständnis von typischen Probleminhalten des ersten Semesters erhalten

Die Analysen und Erfahrungen haben gezeigt, dass es einige besonders problembehaftete Inhalte im ersten Semester gibt. So sind der Grenzwert-Begriff und die Stetigkeit mit Schwierigkeiten behaftet, bei denen schulisches Vorwissen nicht ausreicht. Ein erster Einstieg in diese Themen soll geeignete Hilfsmittel (z. B. Arbeiten mit Ungleichungen und Skizzen) bereitstellen. Grundlegenden Ideen, Unterschiede und Notwendigkeiten der Begriffe sind zu thematisieren. Die Studierenden werden dadurch frühzeitig auf etwaige Schwierigkeiten sensibilisiert, zu einer intensiven Beschäftigung motiviert und können im Semester auf tragfähiges Vorwissen zurückgreifen. Gleichzeitig wird versucht, *obstacles* abzubauen, die durch problematisches schulisches Vorwissen (z. B. »Bleistiftstetigkeit«) oder intuitives Verständnis neue Lernerfahrungen behindern.

Exaktes Formulieren kennenlernen

Die schulische Ausdrucksweise genügt selten akademischen Ansprüchen – die strengeren Ansprüche im ersten Semester werden von Beginn eingefordert. Notationen wie Quantoren, Summenzeichen, Implikationen werden in der Schule kaum verwendet, umgangssprachliche Formulierungen bleiben oft diffus. Damit ist es notwendig, die Erstsemestrigen in diesen neuen *didactic contract* einzuführen, Unterschiede und Sinnhaftigkeiten zu thematisieren, damit sich die Studierenden aktiv mit den neuen Gegebenheiten beschäftigen können.

Erhöhung der Abstraktionsfähigkeit und Sensibilisierung auf strukturelles Denken

Schulmathematik arbeitet wenig mit abstrakten Strukturen: Der Funktionsbegriff bleibt üblicherweise auf reelle Funktionen beschränkt, Vektorräume werden nicht durch ihre Rechenregeln definiert, sondern durch die unmittelbar einsichtige Anschauung, strukturelle Abgrenzungen zwischen Funktionen und Funktionswerten bleiben implizit, Rechenregeln für reelle Zahlen, Grenzwerte oder Folgen sind selbstverständlich.

Diese Selbstverständlichkeiten und anschaulichen Zugänge erschweren am Studienbeginn das Arbeiten mit abstrakten Strukturen. Durch wenig Vorerfahrungen ist der Schock am Beginn oft groß. Ein Brückenkurs kann etwa durch Thematisieren von abstrakten Strukturen und durch das Bearbeiten von abstrakteren Übungsaufgaben dazu beitragen, die Studierenden zu sensibilisieren. Damit sollen grundlegende Probleme in abstrakten, strengen Lehrveranstaltungen (*Analysis*, *Lineare Algebra*) reduziert werden.

Zugänge wissenschaftlicher Mathematik kennenlernen

Im schulischen Unterricht ist der Aufbau durch lokales Ordnen innerhalb kleiner Themenbereiche bestimmt, der Aufbau nach Definition – Satz – Beweis kaum üblich, obwohl Schulbücher mitunter diese Aspekte beinhalten. Der stark beispielorientierte Charakter der Schulmathematik verlangt oft wenig Zusammenhänge innerhalb einer Theorie und zwischen Theorien. Dadurch sind recht einseitige *beliefs* der SchülerInnen zu Mathematik zu erwarten. Gerade das Vorhandensein von *beliefs*, die mit dem meist axiomatischen Aufbau der akademischen Mathematik kaum vereinbar sind, erschwert das Zurechtkommen und Akzeptieren der akademischen Schwerpunkte. Die Suche nach dem Sinn und nach Zusammenhängen mit der Schulmathematik werden zu zentralen Aufgaben des ersten Semesters, besonders für Lehramtsstudierende. Ein Brückenkurs kann dazu beitragen, diese *belief overhangs* zu minimieren, indem Begriffe explizit definiert werden, indem Herleitungen (Beweise) zu Aussagen eingefordert und geliefert werden oder indem aus der Schule bekannte Inhalte mit einem anderen Schwerpunkt betrachtet werden.

Hochschulmathematische Lehr- und Lernformen erleben

Der schulische *didactic contract* bzgl. Methoden ist geprägt durch kleine Informationshäppchen und lange Übungsphasen unter Anleitung. Das macht es für die SchülerInnen kaum nötig, Strategien für die Bewältigung von großen Stoffmengen und für die selbstständige, eigenverantwortliche Bearbeitung von weiterführenden Aufgaben zu entwickeln. Doch gerade diese Strategien sind an der Hochschule nötig – und müssen den Erstsemestrigen schnellstmöglich zur Verfügung stehen. In einem Brückenkurs, der universitäre Lehr- und Lernformen aufgreift, können Erstsemestrige ohne Druck erste Erfahrungen sammeln. Selbststudienanteile helfen, Mathematiklernen als aktiven Prozess wahrzunehmen. Daneben können typische Herangehensweisen an Übungsaufgaben sowie andere Hilfestellungen und Tipps dazu beitragen, dass die Erstsemestrigen für sich selbst geeignete Methoden finden. Der soziale Aspekt darf nicht vernachlässigt werden: Freundschaften sollen begonnen und Lerngruppen gefunden werden.

Motivation und Sinnstiftung anregen

Motivation für Mathematik ist zunächst – wie kann es auch anders sein – an die schulischen Erfahrungen gebunden – und damit an den Charakter der Schulmathematik. Da sich mit Studienbeginn der Charakter der Mathematik (schlagartig) ändert, besteht die Gefahr, dass die Motivation schwindet. Die Sinnhaftigkeit, Mathematik auf akademischen Niveau zu behandeln, wird besonders von Lehramtsstudierenden in Frage gestellt. Schulmathematik- und Hochschulmathematik werden getrennt wahrgenommen. Die Fähigkeit, ausreichend Verknüpfungen herstellen zu können, setzt dagegen fachliches Verständnis voraus.

Damit muss ein Brückenkurs ein erster Schritt sein, der Studierenden akademische Mathematik positiv erleben lässt, der Zusammenhänge innerhalb der akademischen Mathematik erahnen lässt, aber auch Zusammenhänge mit Schulmathematik herstellen kann. Die Studierenden müssen angeregt werden, sich selbst auf die Suche nach intrinsischen Motivationen und einer positiven Einstellung zu neuen Lernerfahrungen zu machen. Den Lehrenden im Brückenkurs kommt dabei eine entscheidende Rolle zu: Die Begeisterung am Stoff selbst, aber auch am Vermittlungsvorgang sowie ein ehrliches Interesse an den Lernerfolgen der Brückenkursteilnehmenden müssen für diese spürbar sein. Sie müssen das Gefühl haben, dass sich die eigene Motivation bezahlt macht und dass daneben die Institution Universität *mit* ihnen arbeitet und nicht *gegen* sie.

Resümee

Die Schwerpunktsetzung dieser vielfältigen Ziele kann und soll von den jeweiligen curricularen Rahmenbedingungen sowie den gängigen Lehr- und Lehrmethoden abhängen. So scheint es sinnvoll, dem Thema Beweisen und Beweistechniken mehr Zuwendung zu schenken, falls das jeweilige erste Semester mit rigorosen Fachwissenschaftsveranstaltungen (üblicherweise *Analysis 1* oder *Lineare Algebra 1*) beginnt, ohne jedoch besonders vertiefend auf den Beweis-Aspekt einzugehen (vgl. Abschnitt 19.2). Die Wahl der Methoden und der Inhalte ist von den jeweiligen Rahmenbedingungen (Personal, Technik, ...) abhängig, weswegen hier als allgemeine Empfehlung nicht näher darauf eingegangen werden kann.

In den nächsten Kapiteln 10, 11 und 12 wird nun die Umsetzung dieses Konzepts für die Uni Graz im WS 12/13 vorgestellt, ausgehend von den institutionellen Rahmenbedingungen (Kapitel 9).

9. Rahmenbedingungen im WS 12/13

Bevor ab Kapitel 10 die konkrete Umsetzung der in Kapitel 8 festgemachten Ziele erfolgen kann, sind zunächst die gegebenen Rahmenbedingungen für das WS 12/13 festzuhalten. Die Gegebenheiten werden im folgenden kurz dargestellt und diskutiert, da Entscheidungen dadurch nachvollziehbar werden.

9.1. Institutionelle Abhaltungsform

Der Brückenkurs wurde als Lehrveranstaltung[1] mit zwei Semesterwochenstunden[2] genehmigt, was 30 Einheiten zu 45 Minuten entspricht. Das entspricht z. B. zehn Lehrveranstaltungstagen mit 2 Stunden 15 Minuten Lehrveranstaltungsabhaltung pro Tag, insgesamt 22,5 Echtstunden Aufwand in der Lehrveranstaltung. Im Vergleich zu anderen Brückenkursen[3] ist das eher im unteren Viertel des Üblichen.

Als Lehrveranstaltungstyp wurde »Vorlesung mit Übung« (VU) festgesetzt, was Anwesenheitspflicht für die Studierenden bedeutet. Da der Typ VU einen sogenannten prüfungsimmanenten[4] Lehrveranstaltungstyp darstellt, ist eine eine Anmeldung über das Online-System der Uni Graz (UGO) nötig.[5] Die Studierenden können den Kurs im Rahmen der freien Wahlfächer besuchen und bekommen bei erfolgreicher Absolvierung 1,5 ECTS dafür. Da der Brückenkurs eine Lehrveranstaltung ist, ist sein Besuch kostenlos.[6] Es wurde mit einer Teilnahmezahl von 30 bis 60 Studierenden gerechnet – was bei einem tatsächlichen Besuch von rund 50 Studierenden als gute Schätzung gelten kann.[7]

9.2. Personal

Entgegen anderer Brückenkurse, bei der neben Lehrenden für den Vorlesungsteil weitere Tutoren und Tutorinnen für Übungsteile zur Verfügung stellen (vgl. z. B. [83] S.4-5.), wurde an der Uni Graz nur eine Person, der Autor dieser Arbeit, zur Verfügung gestellt, zuständig für die Entwicklung eines Konzepts, für die konkrete Planung, die Organisation sämtlicher anfallender Dinge sowie für die Abhaltung des Kurses. Weitere unterstützende MitarbeiterInnen gab es nicht.[8] Damit ist das Personal ein stark limitierender Faktor, der Kleingruppenbetreuung von vornherein (zumindest bei diesem zeitlichen Rahmen) unmöglich macht. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass sich Studierende im Eigenstudium selbstständig aktiv mit Mathematik beschäftigen müssen/sollen, was (schriftliche) Hausaufgaben nahelegt.[9]

1 Die Lehrveranstaltungsbeschreibung im Uni Graz Online findet sich hier [82].
2 Eine Semesterwochenstunde ist eine 45 Minuteneinheit pro Woche des Semesters. Ein Semester hat etwa 15 Wochen.
3 Vgl. [17] (S.2) oder etwa [10] S.302: Üblich ist eine Dauer von einer bis fünf Wochen, bzw. nach [83] (S.11) 20 bis 70 Echtstunden.
4 »Prüfungsimmanent« impliziert einerseits Anwesenheitspflicht, andererseits auch, dass die Leistungsbeurteilung nicht anhand einer einzigen Prüfung festgemacht werden darf. Vgl. z. B. [44] S.21.
5 Das setzt bereits einen gültigen Account voraus, der erst aktiviert wird, wenn die Studierenden nach dem erfolgreichen Immatrikulieren den ÖH-Beitrag (rund 18,00 Euro) an die Uni Graz überwiesen haben.
6 Brückenkurse an anderen Universitäten sind zum Teil kostenpflichtig, vgl. [83] S.5.
7 Bei verbesserter Bewerbung ist mit einer deutlich höheren Teilnahmezahl zu rechnen, etwa 80 – 100 Studierende. Vgl. Kapitel 16
8 Das Fehlen von TutorInnen für Kleingruppen hat mitunter auch den Grund, dass der Einsatz von TutorInnen in Übungsgruppen an der Uni Graz keine Tradition hat. Daneben fällt es trotz hoher Studierendenzahlen im Mathematik Lehramt oder Bachelor (gesamt über 700 Studierende) schwer, fachlich und didaktisch kompetente Studierende zu finden, die solche Positionen übernehmen könnten.
9 Das Nichtvorhandensein von Tutoriumsgruppen impliziert meiner Ansicht nach nicht, dass die Studierenden deshalb nicht aktiv Mathematik betreiben (können). Es kommt vielmehr zu einer Verschiebung der aktiven Auseinandersetzung mit Mathematik von den Präsenzanteilen des Brückenkurs in den Eigenstudienanteil. Auch die Unterstützung beim Lernen fällt nicht aus, sondern verschiebt sich zeitlich, etwa auf den Übungsteil mit Kontrolle und Besprechung der Übungsaufgaben, vgl. Kapitel 11.

Zudem wurde der Brückenkurs erst Ende Mai 2012 genehmigt. Der Brückenkurs sollte Anfang des WS 2012/13 (also August – Oktober) stattfinden, was nur einer Vorlaufzeit von etwa 3 Monaten entspricht.

9.3. eLarning-Technik

Die Uni Graz verfügt zwar über eine moodle-Lernplattform[10], allerdings wird sie meist nur als organisatorische Hilfe bei Lehrveranstaltungen (Bereitstellung von Übungszetteln, Skripten) eingesetzt und nicht im Sinne von umfassenden eLearning-Einheiten. Eine Implementierung eines Online-Brückenkurses wie dem schwedischen math.se oder dem deutschen OMB (Online-Mathematik Brückenkurs)(siehe etwa [14]) war damit innerhalb des engen Zeitrahmens unmöglich. Will man diesbezüglich verstärkt eLearning-Anteile ohne Anwesenheit nutzen, so scheint es sinnvoller, bestehende Kurse von anderen (deutschsprachigen) Universitäten zu übernehmen bzw. zu adaptieren – so wie es etwa beim OMB ausgehend vom math.se geschehen ist [14]. Für den Brückenkurs im WS 2012/13 kam damit blended-Learning[11] nicht in Frage.

9.4. Betroffene Studien

Der Brückenkurs wurde eigens für Lehramtsstudierende und Bachelor-Studierende der Mathematik ins Leben gerufen, und nicht für andere (Ingenieurs-)Studien mit höheren Mathematikanteilen. Eine simple Wiederholung von Schulstoff von Sekundarstufe I (Unterstufe)[12] und Sekundarstufe II (Oberstufe)[13] reicht als Hilfestellung nicht aus – gute Schulnoten und ein fundiertes Schulwissen sind keine hinreichende Bedingung für Erfolg in einem Mathematikstudium. Ein Schwerpunkt auf algebraische Rechentechniken (anders als in [84]) ist damit nicht zielführend.[14]

9.5. Zeitlicher Rahmen

Das Studium an der Uni Graz beginnt im WS mit dem ersten Oktober. Im Mathematikstudium beginnen alle Lehrveranstaltungen gleichzeitig, Blockabhaltungen sind nicht üblich. Ein Brückenkurs in den ersten Oktoberwochen würde daher eine zusätzliche Belastung für die Studierenden darstellen. Durch das volle Studienprogramm müsste gleichzeitig Neues gelernt und Altes aufgeholt werden. Daher wurde der Brückenkurs vor dem eigentlichen Studienbeginn als Vorbereitung angesetzt anstatt als begleitende Maßnahme.[15] Damit wird in Kauf genommen, dass nur Studierende mit rechtzeitigem Zugang zur Universität als Teilnehmende in Frage kommen und damit Studierende, die noch nicht am Studienort sind, von vornherein ausgeschlossen werden.[16] Der zeitliche Rahmen 2012 ist in Abb. 9.1 dargestellt.

Eine spätere Kursanmeldung war in Absprache mit dem Lehrveranstaltungsleiter noch möglich. Bei der Angabe von triftigen Gründen konnte auch erst in der zweiten Woche (21. September) eingestiegen werden.[18]

10 http://moodle.uni-graz.at
11 Lernform, bei der eLearning-Anteile (zu Hause) mit Präsenzanteilen kombiniert werden.
12 Beispielsweise Bruchrechnen, Prozentrechnen, . . .
13 Beispielsweise Rechnen mit Variablen, Kurvendiskussionen von Polynomfunktionen usw.
14 Daneben ist kritisch zu hinterfragen, in wie weit jemand mit grundlegenden Lücken bei elementaren Kompetenzen etwa im Umgang mit Zahlen und Variablen überhaupt eine Chance hat, ein Mathematikstudium auf universitärem Niveau erfolgreich zu absolvieren.
15 Begleitende Maßnahmen während des Semesters finden ohnehin in Form der Tutorien (vgl. Abschnitt 3.2.3) zu den jeweiligen Lehrveranstaltungen statt.
16 Möglicherweise lässt sich dieses Problem in Zukunft durch besseren Informationsfluss schon vor dem Inskribieren der Studierenden entschärfen, vgl. Abschnitt 19.1.
18 Nur zwei Studierende nahmen dieses Angebot in Anspruch.

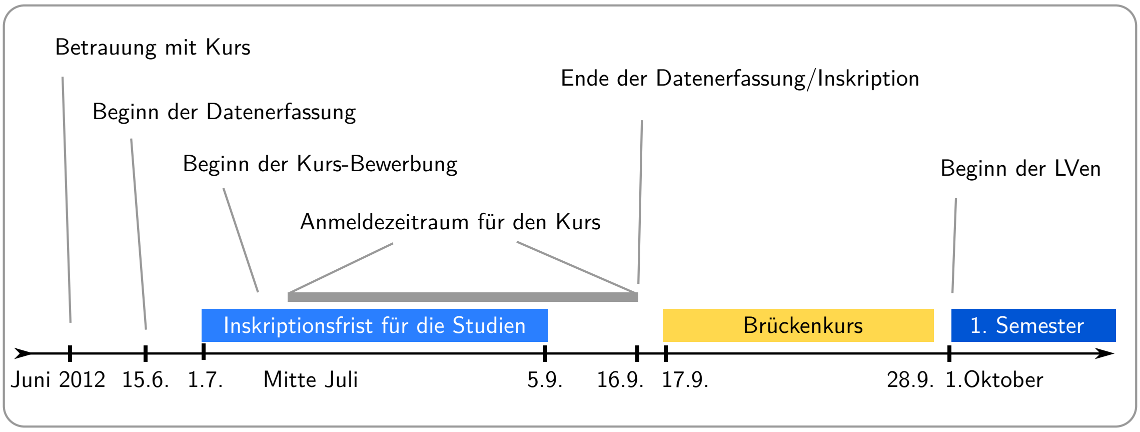


Abb. 9.1.: Zeitlicher Rahmen[17] für den Brückenkurs Mathematik im WS 12/13

9.6. Bewerbung

Da der Brückenkurs Mathematik im Jahr 2012 zum ersten Mal stattgefunden hatte, gab es noch keine Erfahrung bzgl. der Bewerbung und ihrer Wirksamkeit. Auf folgenden Wegen wurde daher der Brückenkurs publik gemacht:

Offiziell über die Universität: Bei der Inskription haben die Studierenden einen Link (unter vielen) auf einem Zettel erhalten, über dem sie zu einer Webseite der Universität Graz weitergeleitet wurden, wo ein Informationsschreiben zum Brückenkurs (siehe Anhang A) zu finden war. Aus organisatorischen Gründen in der Studien- und Prüfungsabteilung der Uni Graz, in der die Studierenden persönlich inskribieren müssen, konnten/durften den Studierenden keine weiteren Flyer ausgehändigt werden.

Daneben wurde über die Österreichische HochschülerInnenschaft (ÖH) Werbung betrieben:

- **i)** Erstsemestrigen- und Inskribtionsbetratung (20. August bis 7. September) vor dem Gebäude, in dem die Studierenden inskribieren müssen. Insgesamt haben etwa 70 Mathematik-Erstsemestrige an der Beratung teilgenommen.
- **ii)** Online-Bewerbung auf der Webseite der Studienvertretung Mathematik `http://mathematik.oehunigraz.at`.
- **iii)** Der Brückenkurs wurde im Studienleitfaden Mathematik erwähnt (der Informationsbroschüre der Studienvertretung zu den Mathematik-Studien, [85], S.11). Der Leitfaden wurde bei der Erstsemestrigenberatung ausgegeben und war auch online auf der Webseite der Studienvertretung erhältlich.
- **iv)** Vor Ort am Campus der Universität im Gebäude des Institutes für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen wurden Informationsplakate zum Brückenkurs ausgehängt.
- **v)** Zusätzlich gab es zwei Mailaussendungen an die E-Mail-Accounts an der Uni Graz, die die Studierenden mit dem Inskribieren zu Verfügung gestellt bekommen. Termine der Aussendungen: 29.8 sowie 13.9. (Zur Erinnerung: Kursbeginn war am 17.9.)

Es stellt sich im Nachhinein heraus, dass mindestens die Hälfte der Erstsemestrigen nicht über den Brückenkurs Bescheid gewusst hat (vgl. Kapitel 16). Ein Link auf einem Zettel unter vielen ist demnach keine adäquate Werbemaßnahme. Mailaussendungen an die Uni-Adresse *vor* dem eigentlichen Studienbeginn werden kaum gelesen. Groß angelegte Werbemaßnahmen (im Gegensatz zum schwedischen Brückenkurs math.se, vgl. [15]) sind auch in Zukunft wenig realistisch. Leicht umsetzbare Verbesserungsvorschläge finden sich dennoch in Abschnitt 19.1.

10. Umsetzung der Ziele

In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick über das Konzept des Kurses vom WS 12/13 an der Uni Graz gegeben. Ich orientiere mich dabei an den in Kapitel 8 festgehaltenen Zielen. Dann folgt eine kommentierte Darstellung der Lehrveranstaltungsziele laut Lehrveranstaltungsbeschreibung im Onlinesystem der Uni Grau (UGO) [82]. Letztendlich wird die erwartete Zielgruppe charakterisiert.

10.1. Überblick

Das in Kapitel 8 als ganzheitliche Maßnahme vorgestellte Konzept wurde an der Uni Graz im WS 12/13 umgesetzt. Die nachfolgende Tabelle 10.1 gibt noch einmal eine Übersicht und gibt gleichzeitig die Maßnahmen an, wie eine Überprüfung des Erreichens der Ziele umgesetzt wurde. Einige Ausgangsüberlegungen zu diesen Maßnahmen werden in Abschnitt 10.2 dargestellt, die Ergebnisse sowie die Maßnahmen im Detail finden sich in Teil IV »Evaluierung des Brückenkurses« dieser Arbeit.

Tab. 10.1.: Überblick über die Ziele des abgehaltenen Brückenkurses vom WS 12/13

Ziel	Begründung
Schulwissen festigen/nachholen	Bereitstellung eines notwendigen Grundwissens und Rechenkompetenz
Vorverständnis von typischen Probleminhalten des 1. Semesters erhalten	frühzeitige Sensibilisierung, um intensive Beschäftigung zu motivieren; geeignete Hilfsmittel (Skizzieren usw.) anbieten, Abbau von *obstacles*
Exaktes Formulieren kennenlernen	Minimierung der Probleme mit Notationen usw.
Erhöhung der Abstraktionsfähigkeit und Sensibilisierung von strukturellem Denken	Verringerung der Probleme in abstrakten Lehrveranstaltungen
Zugänge wissenschaftlicher Mathematik kennenlernen (Definition – Satz – Beweis usw.)	Verringerung von *belief overhangs* als zusätzliche Hürde
hochschulmathematische Lehr- und Lernformen erleben	frühzeitige Anpassung an den geänderten *didactic contract Ebene i) (Allgemein)*, frühzeitige Entwicklung von geeigneten Strategien ermöglichen
Motivation und Sinnstiftung anregen	(besonders Lehramts-)Studierende für wissenschaftliche Mathematik und ihre Zusammenhänge begeistern, um eine positive Einstellung zum Studium zu entwickeln

Was kann der Brückenkurs nicht leisten?

Einem nur zweiwöchigen Kurs mit etwa zwei Stunden (verpflichtender) Mathematik pro Tag unmittelbar vor Studienbeginn sind selbstverständlich von vornherein einige Limitationen gesetzt, die die Ziele im Hinblick auf das Ausmaß der Umsetzbarkeit beschränken.

- Es kann nicht erwartet werden, dass sämtliche Wissenslücken aus der Schule geschlossen werden können, die sich über Jahre angesammelt haben. Allerdings werden den Studierenden zumindest ihre Lücken bewusst, sodass ihnen ein weiteres Handeln frühzeitig möglich wird.
- Es kann nicht erwartet werden, dass Studierende sämtliche Charakteristika von wissenschaftlicher Mathematik in einer Form aufnehmen können, die weitere Lernleistungen diesbezüglich überflüssig macht. Beweisen lernt man nicht in zwei Wochen – auch nicht formal korrekt (nach Standards der Wissenschaft) zu schreiben oder zu argumentieren. Allerdings darf erwartet werden, dass die Studierenden die diesbezüglich geänderten Schwerpunkte zur Schule erkennen und ihnen dadurch Orientierung gegeben wird, die bei ihrer weiterer hochschulmathematischen Entwicklung helfen wird.
- Es kann (und soll) nicht erwartet werden, dass sämtliche Vorgriffe[1] von den Studierenden dahingehend genutzt werden können, dass sie ein Verständnis auf Niveau des ersten Semesters erlangen. Allerdings kann es ihnen Orientierung geben, etwaige Berührungsängste nehmen und vor Frustration schützen.[2]
- Ein Brückenkurs kann nicht als fertige »Brücke« zwischen Schul- und Hochschulmathematik verstanden werden, sondern vielmehr als der erste, unter Anleitung gebaute »Ausleger« damit die Studierenden die restliche Brücke im Lauf des ersten Semesters oder Studienjahres (selbstständig) fertigstellen können. Die Lehrveranstaltungen sollten noch einen wesentlichen Beitrag dazu leisten.

10.2. Maßnahmen zur Überprüfung der Zielerreichung

Zu einem ganzheitlichen Lehrveranstaltungskonzept gehört es, zu untersuchen, in wie weit die Lehrveranstaltung ihre Ziele[3] erreicht hat. Tab. 10.2 zeigt, durch welche Instrumente das Erreichen der Ziele im Hinblick auf die Wirksamkeit des Brückenkurses festgestellt werden sollte. Dabei fließt nur das *Teilnehmen* an den Maßnahmen an 1 bis 4 in die Beurteilung der Leistungen der Studierenden im Sinne einer Notengebung ein (vgl. Abschnitt 11.4). Abb. 10.1 zeigt die Übersicht, wann welche Maßnahmen eingesetzt wurde.

Tab. 10.2.: Maßnahmen zur Evaluierung: ZG: Zielgruppe, BK: Brückenkursteilnehmende, LA: alle Lehramtsstudierenden (1. Semester)

Nr	Maßnahme	ZG	Beschreibung
1	P & P-Orientierungstest	BK	Vorwissen, allgemeine Erhebungen
2	schriftl. Abgaben der Übungsaufgaben	BK	Feststellung des Lernfortschritts
3	P & P-Abschlusstest	BK	fachliche Leistungen, Leistungszuwachs
4	P & P-Feedbackbogen	BK	Rückmeldungen zum Brückenkurs
5	Online-Feedbackbogen	LA	Rückmeldungen zum 1. Semester
6	LV-Noten (UGO)	LA	fachliche Leistungen

1 Andere Kurse vermeiden es meist, Vorgriffe auf das erste Semester zu bringen, vgl. [17] S.3. Bei Hinblick den an der Uni Graz attestierten Probleme bzgl. Motivation und Sinnstiftung (besonders im Lehramt) scheinen Vorgriffe trotzdem sinnvoll, um die neuen Inhalte von vornherein in einem sinnstiftenden Kontext zu setzen.

2 Nach dem Motto: »Stetigkeit ist ein schwer zu verstehender Inhalt. Es ist keine Schande, ihn nicht auf Anhieb zu verstehen – man muss allerdings bereit sein, sich damit ausreichend zu beschäftigen.«

3 Ich unterscheide hier zwischen dem Erreichen der Ziele zur positiven Absolvierung der Lehrveranstaltung und dem Erreichen der Ziele im Hinblick auf die Wirksamkeit des Brückenkurses. Die Notengebung wird in Abschnitt 11.4 diskutiert.

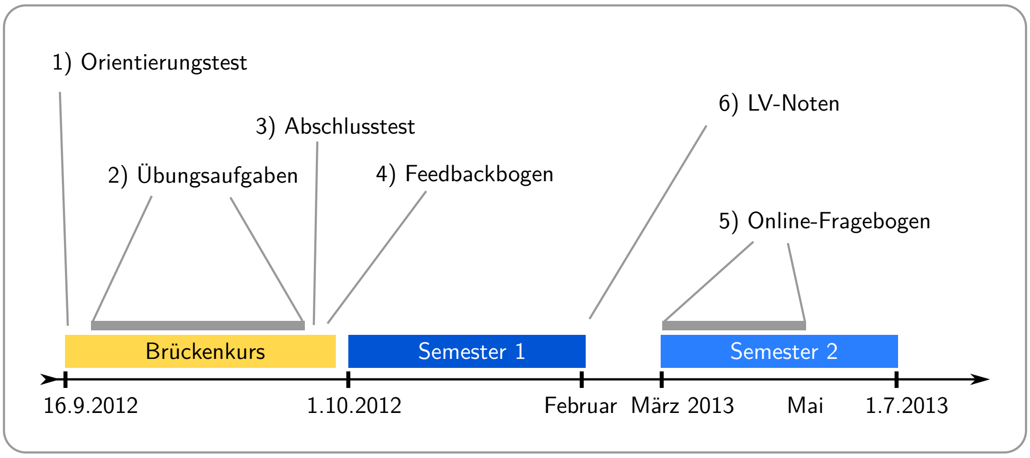


Abb. 10.1.: Zeitliche Übersicht der Maßnahmen

Das Erreichen inhaltsbezogener Ziele lässt sich durch Leistungsvergleich bei Tests am Kursbeginn mit dem Kursende verfolgen (Kapitel 13 und 14) – was durchaus eine gängige Methode ist (vlg. [17]). Daneben kann auch die subjektive Zufriedenheit der Studierenden und ihre Einschätzung zum Lernzuwachs herangezogen werden (Kapitel 15 und 16). Ziele bzgl. Motivation sowie Einstellung zur Mathematik wurden in Form von Fragebögen (Nr 4,5) erhoben. Eine nähere Untersuchung im Hinblick auf *beliefs* wurde nicht durchgeführt.

Die Erhöhung der Abstraktionsfähigkeit ist objektiv nur schwer zu überprüfen. Nichtsdestotrotz können Selbsteinschätzungen die subjektiv erlebte Schwierigkeit erheben sowie mögliche Zusammenhänge im Hinblick auf Leistung bei den abstrakten Lehrveranstaltungen des ersten Semesters aufzeigen (im Lehramt: *Grundbegriffe der Mathematik* vgl. Abschnitt 3.3.1).

Zu den Auswertungen und zum Erreichen der Ziele im Hinblick auf die Tests sowie die Fragebögen und Noten siehe Teil IV »Evaluierung des Brückenkurses«. Erfahrungen zu den Lösungen der Übungsbeispiele (und etwaigen Problemen) werden dagegen parallel zur Vorstellung der Inhalte in Kapitel 12 thematisiert.

10.3. Ziele laut Lehrveranstaltungsbeschreibung

Die in den vorigen Abschnitten charakterisierten Problemfelder und die dadurch entstanden Ziele für den Brückenkurs Mathematik wurden in folgender Form den Studierenden durch die Lehrveranstaltungsbeschreibung (hervorgehoben durch die graue Schattierung) im Online-System der Uni Graz (UGO) zugänglich gemacht:

> Grundlegende (mathematische) Kompetenzen (auf Maturaniveau) sollen durch die unter »Inhalt«[a] genannten mathematischen Teilgebiete IN GRUNDZÜGEN kennengelernt bzw. erarbeitet oder auch weiter vertieft werden, abhängig von den Fähigkeiten, die die Studierenden aus der Schule mitbringen. Diese Kompetenzen betreffen...
>
> a) die mathematische Sprache
>
> b) den Umgang mit mathematischen Inhalten und Problemstellungen/Aufgaben
>
> c) Lerntechniken für das Mathematik-Studium
>
> Insbesondere sollen gravierende Defizite dieser Fähigkeiten aufgrund unterschiedlicher Schultypen oder Lehrkräfte minimiert werden.
>
> *a* Anm. des Autors: siehe Kapitel 12

Durch diese Darstellung der Ziele sollte den Studierenden das Augenmerk auf den aktiven Umgang mit Mathematik bewusst werden. Es geht dabei weniger um die Reproduktion von Wissen, Formeln oder das sture Anwenden von Rechentechniken, sondern um das verständnisvolle Beschäftigen mit Mathematik. Das sollte eine erste Abgrenzung zum (unterstellten) schulischen Alltag darstellen.

a) Ziele betreffend der mathematischen Sprache

- Verstehen mathematischer Sprache und korrekte Verwendung/Interpretation von Fachvokabular
- Erkennen der Notwendigkeit einer exakten mathematischen Sprache
- Erkennen der Vorteile von mathematischer Kurzschreibweise (Quantoren,...)
- selbstständiges Verstehen/Erfassen mathematischer Texte
- selbstständiges Formulieren/Verfassen mathematischer Aussagen/Texte, auch in Ansätzen unter Verwendung (korrekter) mathematischer Kurzschreibweise.

Die Studierenden sollen durch diese Ziele erkennen, wie entscheidend das Beherrschen der mathematischen Sprache für den weiteren Wissenserwerb ist. Insbesondere sollte dadurch auch die Motivation und Anstrengungsbereitschaft für die *Grundbegriffe der Mathematik VU* erhöht werden, weil diese Lehrveranstaltung erfahrungsgemäß große Probleme (und damit Durchfallquoten) bereitet (vgl. z. B. Abschnitt 5.2).

b) Ziele betreffend der mathematischen Inhalte

- für die unter »Inhalt« genannten Objekten und Themengebiete ein (anschauliches) Verständnis zu haben, diese Inhalte wiedergeben bzw. erklären zu können sowie mit diesen Inhalten auf einer operativen Ebene arbeiten zu können
- die Fähigkeit, mathematische Theorie nachzuvollziehen
- Übertragung von mathematischer Theorie auf konkrete Beispiele (»Transferleistung«)
- die Fähigkeit, mathematische Problemstellungen selbstständig zu verstehen und zu lösen
- die Fähigkeit, konkreten Beispiele zu verallgemeinern (»Abstraktion«, »Verallgemeinerung«)
- ein erstes Kennenlernen des (strengen) inneren Aufbaus einzelner Teilgebiete (»Mathematik als deduktive Wissenschaft«)
- ein erstes Verständnis für das Konzept »Definition-Satz-Beweis«
- das Erkennen der Beweisbedürftigkeit mathematischer Aussagen
- ein erstes Kennenlernen typischer Vorgangsweisen beim Beweisen (»Beweisstrategien«) als Einstiegshilfe in die Hochschulmathematik
- ein erstes Kennenlernen der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik
- die Erkenntnis, dass wesentliche Konzepte (Funktionen,...) bei vielen mathematischen Teilgebieten auftauchen
- Verminderung von Berührungsängsten und einer negativen Grundhaltung gegenüber hochschulmathematischen Inhalten und Zugängen

Man beachte dabei, dass der Schwerpunkt nicht auf rechentechnischen Fähigkeiten liegt. Vielmehr soll der Anspruch an die Studierenden (besonders für das Lehramt) herangetragen werden, (wissenschaftliche) Mathematik grundlegend zu verstehen und das Konzept hinter Mathematik (Rolle von Definitionen und Beweisen) zu erkennen. Damit soll deutlich die Anpassung der *beliefs* der Studierenden forciert werden und die *belief-overhangs* minimiert werden (vgl. Abschnitt 7.3.1).

c) Ziele betreffend der Lerntechniken

- Erwerb/Erhöhung von Frustrationstoleranz
- Fähigkeit zur (selbstständigen) Überprüfung des Lernerfolges
- Fähigkeit des eigenverantwortlichen Lernens (auch mit geeigneter (Fach-)Literatur)
- Erwerb von effektiven Lernstrategien im Umgang mit (neuen) mathematischen Inhalten
- die Fähigkeit, den notwendigen Zeitbedarf für das Mathematik-Lernen einschätzen zu können

Die Fähigkeiten bzgl. Lerntechniken sind objektiv (im Kurs selbst) zwar nur schwer zu überprüfen, machen aber deutlich, in wessen Verantwortung das Lernen liegt – nämlich in der Verantwortung der Studierenden. Den Studierenden soll dadurch noch stärker die Verantwortungsverschiebung von den Lehrenden (Schule) hin zu den Lernenden (Hochschule) bewusst werden, um sich darauf frühzeitig einstellen zu können.

10.4. Erwartete Zielgruppe

Als Zielgruppe für den Brückenkurs als Lehrveranstaltung wurde in einem Dokument, zu dem die Erstinskribierten bei der Inskription einen Link erhielten, folgende definiert:

> »Diese [Lehrveranstaltung] richtet sich primär an StudienanfängerInnen, die ihr Mathematik-Studium im Wintersemester 2012/13 beginnen wollen.« (siehe Anhang A)

Zunächst sind also alle StudienanfängerInnen angesprochen, wobei die weitere Beschreibung der Lehrveranstaltung bzgl. Inhalte und Ziele selbstverständlich implizit die Zielgruppe näher definiert. Da der Brückenkurs gezielt Themengebiete und Aspekte (z. B. Ausblick auf Hochschulmathematik) anspricht, ist es zu erwarten, dass Studierende besonders angezogen werden, die in diesen Bereichen Unklarheiten über die Anforderungen oder vermeintliche Lücken in den eigenen Fertigkeiten sehen – oder bereits über Unterschiede und resultierende Probleme gehört haben und daher frühzeitig gegensteuern wollen. Das kann im Zusammenhang damit stehen, dass im Vorfeld ein Schultyp mit (vermeintlich) niedrigem Mathematik-Niveau (BAKIP, HAK)[4] besucht wurde, oder es unklar ist, wie gut die eigene Leistung[5] tatsächlich eingeschätzt werden kann. Daneben gibt es auch Studierende, die sich gut informiert haben (und daher gehört haben, dass ein Mathematik-Studium anders ist als Mathematikstunden im Schulunterricht) und sich daher im Vorfeld ein noch konkreteres Bild davon machen wollen.[6]

Problematisch sind jene Studierenden, die das Angebot des Brückenkurses nicht wahrgenommen haben und gleichzeitig schlecht über das Studium und die Anforderungen informiert sind.

Es stellt sich in Abschnitt 16.7 heraus, dass ein Teil der schlecht informierten Problemgruppe mit falschen Erwartungen nicht erreicht werden konnte.

4 BAKIP: Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik; HAK: Handelsakademie.
5 Beispielsweise, wenn das Niveau im Unterricht durch viele schwache Mitschüler und -schülerinnen für alle offensichtlich niedrig war.
6 Und zum Teil sicher »übervorsichtig« sind. Meiner Erfahrung nach trifft das auf Frauen stärker zu als auf Männer, die sehr häufig mit einer »es kann ja eh nichts passieren«-Einstellung ein Studium beginnen.

11. Brückenkurs-Methoden

In diesem Kapitel werden die verwendeten Methoden des Brückenkurses aus dem WS 12/13 vorgestellt und begründet. Folgende Phasen/Methoden/Tätigkeiten waren Bestandteil des *didactic contract* des Kurses:

- Vorlesungsteil im Kurs: klassischer Tafelvortrag (Theorie und Beispiele)
- Arbeitsphase: Selbststudienanteil zu Hause (schriftliche Bearbeitung von Übungsaufgaben)
- Übungsteil im Kurs: Präsentation von Lösungen der Übungsaufgaben durch den Kursleiter

Der grundsätzliche zeitliche Ablauf dieser Methoden ist in Abb. 11.1 dargestellt. Ein Thema wurde zuerst im Vorlesungsteil (VO-Teil) vorgestellt, daraufhin wurden Übungsaufgaben ausgegeben und am nächsten Tag im Übungsteil behandelt. Bis dahin mussten die Studierenden die Übungsaufgaben selbstständig gemacht und abgegeben haben. Der erste Lehrveranstaltungstag sowie die letzten Tage wichen etwas von diesem Schema ab.

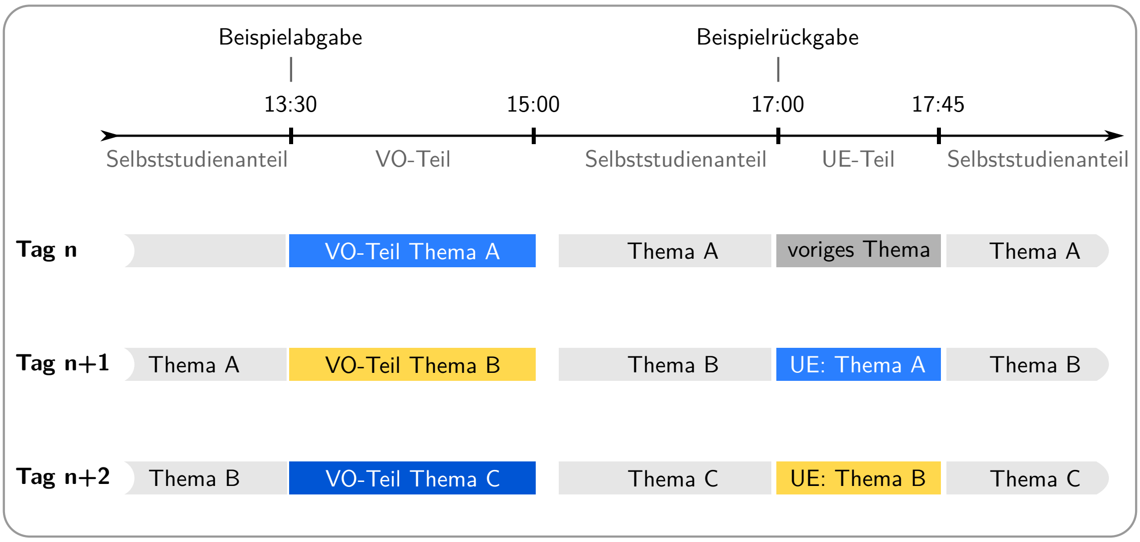


Abb. 11.1.: Zeitlicher Ablauf der Methoden im Brückenkurs WS 12/13

11.1. Vorlesungsteil: Klassischer Tafelvortrag

Der Tafelvortrag dauerte pro Tag 1,5 Stunden, am ersten Kurstag insgesamt 2,25 Stunden, da die Studierenden noch keine Zeit zur Bearbeitung von Übungsaufgaben aufwenden konnten (vgl. Tabelle 12.1 in Kapitel 12). Daneben wurde der Vortrag inhaltlich durch ein Skript zum Kurs [70] bereichert. Zahlreiche Gründe sprechen dafür, die mathematische Inhalte zunächst durch Vortrag zu präsentieren:

- Kosteneffizienz und Skalierbarkeit: Für eine Vorlesung in einem Hörsaal wird nur einE VortragendeR gebraucht, egal ob 30 Studierende anwesend sind oder 200. Bei Präsenz-Übungsgruppen oder Übungsgruppen, in denen die Teilnehmenden selbst vorbereite Aufgaben präsentieren sollen, sind aus Betreuungsgründen die Gruppengrößen begrenzt, da z. B. gewährleistet sein muss, dass alle Studierende ausreichend Zeit zur Präsentation haben oder die TutorInnen über den Lernfortschritt und die Probleme aller Studierenden einen Überblick haben müssen.

- Effizienz und Stofffülle: Vorträge können in kurzer Zeit viele Inhalt vermitteln. Durch die beschränkte Zeit (zwei Wochen, zwei SSt, also ca. zwölf 1,5-Stundeneinheiten), die im Kurs zur Verfügung stand, war das eines der Hauptargumente für den Einsatz eines Vorlesungsteils.
- Einheitlichkeit: Durch einen gemeinsamen Vortragsteil erhalten alle Studierenden die selbe Ausgangsbasis (und damit Argumentationsbasis. Dadurch können sich die Studierenden beim gemeinsamen Lernen auf eine einheitliche stoffliche Grundlage stützen.
- Möglichkeit zum Nachfragen und zur Differenzierung: Kein Widerspruch zur Einheitlichkeit stellt die Möglichkeit in Präsenzlehrveranstaltungen dar, je nach Bedürfnissen der Teilnehmenden zu differenzieren, auf spontane Probleme einzugehen, konkrete Fragen zu beantworten oder Alternativerklärungen anzubieten. Die Umsetzung dieser Möglichkeiten hängen stark vom Vortragenden und seinem didaktischen Gespür ab, andererseits auch von der aktiven Mitarbeit und der Offenheit der Kursteilnehmenden. Insbesondere muss eine positive, offene Atmosphäre hergestellt werden, bei der es keine sprichwörtlich blöden Fragen gibt.[1]
- Qualität der Erklärungen: Neben einem adäquaten Tafelbild, lesbarer Schrift, strukturiertem inhaltlichen Aufbau sowie einem stimmigen Vortrag haben die verständlichen Erklärungen auf verschiedenen Exaktheitsebenen (→ steigender Schwierigkeitsgrad) einen wesentlichen Beitrag, dass Inhalte von den Studierenden aufgenommen werden können. Daneben unterstützt reaktionsschnelles Eingehen auf spezielle Bedürfnisse (z. B. Gegenbeispiele bringen, noch ein weiteres Beispiel zum Erklären eines Sachverhalts bringen usw.) den positiven Eindruck. Zudem fühlen sich Studierende wertgeschätzt, wenn sie merken, dass der Vortragende um ihren Wissenszuwachs bemüht ist und individuell auf sie eingeht, wo es möglich ist.
- Vorbereitung auf die Lernmethoden/Wissensvermittlung im Studium: Je früher die Studierenden in einer geschützten Atmosphäre mit dem Vortragsstil an der Universität umgehen lernen, desto früher können sie sich auf die anderen Herausforderungen des Studiums konzentrieren. Neben der zeitlichen Dauer macht erfahrungsgemäß auch das sinnvolle Mitschreiben (Tempo, Strukturierung, Form, Notizen und Bemerkungen) Probleme. Das kann im Brückenkurs thematisiert werden.

Ein Grund gegen einen Vorlesungsbetrieb ist z. B. die Gefahr, dass die Studierenden kaum aktiv mitdenken und mitarbeiten. Dieses Problem kann auch mit anderen Methoden nie ausgeschlossen werden. Die Qualität des Vortrags, das Stellen von (rhetorischen) Fragen und der schlüssige Aufbau der Inhalte tragen wesentlich dazu bei, dass Studierende auch bei Vorlesungen angeregt werden, aktiv mitzudenken. Eine Vorlesung kann aber nie die selbstständige, aktive anleitungslose Beschäftigung mit Mathematik ersetzen. Daher sind Selbststudienanteile zusätzlich einzubauen.

11.2. Selbststudienanteil: studentische Arbeitsphase

Nach dem jeweiligen Themenblock in der Vorlesungseinheit wurde ein Aufgabenblatt mit fünf bis zehn Aufgaben (z. T. einige optional) ausgegeben, das die Studierenden selbstständig bis zum nächsten Nachmittag vor der Übungseinheit bearbeiten sollten.

Die bearbeitenden Aufgaben mussten in schriftlicher Form vor oder kurz nach dem Vorlesungsteil abgegeben werden. Die Abgaben wurden dann vom Kursleiter mit »bearbeitet« oder »nicht bearbeitet« bewertet. Durch dieses überblicksartige Durchsehen der Abgaben erhielt der Vortragende einen Eindruck, was Probleme bereitet hat und welche Beispiele die Studierenden zufriedenstellend gelöst hatten. Damit wurde deutlich, welche typischen Fehler oder Missverständnisse auftraten. Das hatte den Vorteil, dass im anschließenden Übungsteil diese Fehler vom Vortragenden thematisiert werden konnten, wodurch auch ohne ausführliche Korrekturen[2] konstruktiv mit Fehlern umgegangen werden konnte.

Folgende Ausgangsüberlegung führte zur Wahl dieses Systems: Die TeilnehmerInnen sollten die Möglichkeit haben bzw. gezwungen werden, selbstständig die Aufgaben zu bearbeiten. Nicht alle Studierenden haben das selbe Lerntempo, was in Übungen mit Präsenz-Aufgaben Probleme machen kann. Dagegen

1 Es ist zu erwarten, dass die Hemmschwelle für Fragen von Studierenden bei jungen Lehrenden grundsätzlich niedriger ist als bei »alteingesessene« Lehrenden.

2 War aus Zeitgründen nicht möglich. Eine einzige Person hätte in ca. zwei Stunden rund $50 \cdot 6 = 300$ Übungsaufgaben korrigieren müssen, was bei den verwendeten Aufgabentypen nicht schaffbar ist.

erlaubt das selbstorganisierte Arbeiten, ausreichend Zeit verwenden zu können. Die Teilnehmenden werden also schon bereits während des Brückenkurses mit Eigenverantwortlichkeit konfrontiert, was auch im Brückenkurs thematisiert wurden. Insbesondere wurde darauf hingewiesen, dass es sinnvoll ist, Lerngruppen zu bilden und über Mathematik zu sprechen. Die Umsetzung davon blieb in der Verantwortung der Teilnehmenden. Durch das eigenverantwortliche Arbeiten werden die Studierenden mit folgenden Elementen hochschulmathematischen Lernens konfrontiert:

- Theorie muss weitgehend selbstständig von den Studierenden auf Übungsaufgaben übertragen werden (können).
- Nicht immer ist alles auf Anhieb klar – und gegen diese Unklarheiten muss aktiv etwas unternommen werden.
- Gruppenarbeit ist eine sinnvolle Arbeitsform, in der man über Mathematik reden kann und dadurch Erkenntnisgewinn erlangt.

Bei anderen Rahmenbedingungen (Personal) kann diese Arbeitsphase auch anders gestaltet sein, etwa in Form von durch geeignete TutorInnen[3] betreuten Lerngruppen. Trotzdem sollten Selbststudienanteile eingeplant werden, in denen die Studierenden ohne Anleitung arbeiten müssen.

11.3. Übungsteil: Kontrollphase

Am Tag nach der Behandlung eines Themengebietes in der Vorlesungseinheit fand in der Nachmittagseinheit (Dauer: 45 min) die Kontrollphase zu den Aufgaben in Form eines »Übungsbetriebes« statt. Die Studierenden holten am Beginn ihre abgegebenen und durchgesehen Übungsaufgaben ab, sodass sie diese im Lauf der Übung mit den vorgetragenen Musterlösungen vergleichen und kontrollieren konnten. Entgegen dem an der Uni Graz typischen Übungsbetrieb rechneten nicht die Studierenden an der Tafel vor, sondern der Kursleiter. Das hat folgende Gründe:

i) Da der Kursleiter von sämtlichen Lösungen der Studierenden einen Eindruck hatte, konnte er beim Vorzeigen einer Ideallösung unmittelbar auf typische Fehler eingehen und flächendeckend Verständnisprobleme lösen. Weiters sind die Qualität der Erklärungen und die fachliche Qualität der Lösung vom Kursleiter im Allgemeinen deutlich höher als die der Kursteilnehmenden. Die Studierenden wurden durch den Modus zum selbstständigen Kontrollieren motiviert und waren damit bis zu einem gewissen Grad eigenverantwortlich für ihren Lernfortschritt zuständig.

ii) Daneben hat diese Methode gegenüber schriftlicher Musterlösungen einen großen Vorteil: Schriftliche Musterlösungen bedeuten einen großen Aufwand und sind unflexibel. Bei verbalen Lösungen können bei Fragen andere Erklärungen angeboten werden, falls nötig. Verständnisprobleme lösen sich dadurch unmittelbarer.

iii) Weiters spielt der Zeitfaktor eine Rolle: Im typischen Übungsbetrieb an der Uni Graz (vgl. Abschnitt 3.2.2) können üblicherweise in 1,5 Stunden nur fünf oder sechs Beispiele von Studierenden vorgerechnet werden. Soll im Brückenkurs die selbe Stoffmenge abgedeckt werden, so kann die Übungsteil-Dauer von 45 Minuten nicht verlängert werden.[4] Gleichzeitig kann die Anzahl der Übungsaufgaben nicht verringert werden, ohne Abstriche bei den eigenständigen Lernerfahrungen zu machen. Damit ist ein zügiges Vorgehen im Übungsbetrieb nötig, das beim Vorrechnen von Studierenden oft nicht gewährleistet ist – durch das Schreibtempo, aber vor allem durch das Aufgreifen von inhaltlichen und didaktischen Mängel durch die Lehrenden. Diese Nachteile wurden durch das Vorrechnen durch den Kursleiter vermieden.

Nichtsdestotrotz könnten zu dem einen oder anderen Beispiel auch (nur) schriftliche Musterlösungen hergegeben werden, um die Lernenden mit mathematischen Texten zu konfrontieren. Dadurch würden die Studierenden darauf vorbereitet, auch während des Semesters Mathematik-Bücher als »Fachexperten«

3 Hier besteht ein quantitatives Problem an der Uni Graz. Andere Universitäten verfügen z. T. über Programme zur Schulung von TutorInnen, siehe [16], S.33-57.

4 Außer man lässt die Studierenden mehr Wissen im Selbststudienanteil aneignen, beispielsweise durch Leseaufgaben in Büchern oder dem Skript.

heranzuziehen, was die meisten SchülerInnen aus der Schule nicht gewohnt sind. Dort wird grundsätzlich zuerst die Lehrkraft als Experte bzw. Expertin herangezogen.

Letztlich wurde im Brückenkurs ein Methoden-Konzept gewählt, das ohne Präsenzaufgaben im Übungsteil auskommt. Das zur Verfügung stehende Personal (eine Person!) kann kaum in der verfügbaren Zeit (gesamt rund 2 Stunden pro Tag) die Teilnehmenden in ihrer Heterogenität betreuen. Die Gefahr ist groß, dass Studierende überfordert sind, andere ihr Potenzial dagegen nicht ausschöpfen können. Das Bearbeiten von anspruchsvolleren, abstrakten Aufgaben ist in so kurzer Präsenzzeit kaum umzusetzen. Daneben wird diese Methode der Präsenz-Übungsaufgaben nicht im Lauf des Semesters fortgeführt, wodurch ein Brückenkurs mit dieser Methode weniger gut auf den *didactic contract* vorbereiten würde.

11.4. Notengebung

Da der Brückenkurs Mathematik als Lehrveranstaltung abgehalten wurde, ist bei erfolgreicher Teilnahme ein Zeugnis auszustellen. Wie für alle prüfungsimmanenten Lehrveranstaltungen sind die Beurteilungskriterien und -methoden in der ersten Lehrveranstaltungseinheit bekanntzugeben. Nachfolgend der Originaltext aus Informationsschreiben zur Lehrveranstaltung (siehe Anhang A):

> Die Lehrveranstaltung hat als Typ VU (Vorlesung mit Übung) sogenannten immanenten Prüfungscharakter, also insbesondere Anwesenheitspflicht. Für das positive Absolvieren (»mit Erfolg teilgenommen«) ist die Erfüllung folgender Kriterien (hinreichend und) notwendig:
>
> **i)** Mitschreiben beim »Orientierungstest« in der ersten Einheit. (Bei Abwesenheit in der ersten Einheit muss nachgeschrieben werden.)
>
> **ii)** ≥ 80 % Anwesenheit bei den Lehrveranstaltungseinheiten. (Bei schwerwiegenden Gründen ist es möglich, als Ersatz zusätzliche Beispiele/Ausarbeitungen zu versäumten Themen abzugeben, um fehlende Anwesenheit auszugleichen. Insbesondere gilt das für auswärtige Studierende, die erst ab der letzten Septemberwoche in Graz sind.)
>
> **iii)** ≥ 70 % der zu bearbeitenden Übungsbeispiele müssen abgegeben werden. Es muss zumindest ein erkennbarer Versuch einer Lösung vorhanden sein.
>
> **iv)** Mitschreiben beim »Abschlusstest« am Ende der Lehrveranstaltung. (Für Studierende, die einen triftigen Grund haben, am geplanten Termin nicht mitschreiben zu können, wird es einen Ersatztermin geben).
>
> **v)** Abgabe des (anonymen) Abschluss-Feedbackbogens am Ende der Lehrveranstaltung (Details werden noch bekanntgeben).
>
> Ist einer oder mehrere dieser Punkte nicht erfüllt, so wird eine negative Beurteilung ausgestellt (»ohne Erfolg teilgenommen«).

Diese Kriterien lassen sich folgendermaßen begründen:

i) Der Orientierungstest (Dauer 45 min) am Beginn sollte sowohl den Studierenden, als auch dem Kursleiter einen ersten Überblick geben. Geschrieben wird der Orientierungstest sofort am Beginn der ersten Einheit gleich nach der organisatorischen Besprechung und der Vorstellung der Prüfungsmethoden und -kriterien. Schwerpunkt des Orientierungstests lag auf dem rechnerischen, handwerklichen Aspekt von Mathematik, der als Basis vorausgesetzt wird. Darunter fallen: Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Wurzeln, Differenzieren und Integrieren von Funktionen, Lösen von Gleichungssystemen. Der Test selbst wurde nicht im Sinne der üblichen Noten beurteilt, weil das Studierende mit wenig Vorwissen bzw. einem schlechteren Schulunterricht eindeutig benachteiligt hätte. Der Test im Detail sowie seine Auswertung wird in Kapitel 13 behandelt.

ii) Die Anwesenheitspflicht soll sicherstellen, dass sich die Studierenden auch tatsächlich mit den vorgetragenen Inhalten – im schlechtesten Fall passiv – beschäftigen. Zudem wird dadurch ein geordneter Rahmen mit klaren Regeln (*didactic contract*) hergestellt.

iii) Dass zumindest 70 % der Übungsbeispiele abgegeben werden sollen, scheint auf den ersten Blick im Vergleich zu andere Lehrveranstaltungen viel – meist sind 50 % Beispiele üblich (bzw. die Bereitschaft, diese zu rechnen). Die die Studierenden sollen sich mit den Übungsaufgaben beschäftigen, um eine gewisse Hartnäckigkeit, Ehrgeiz sowie mathematische Lernstrategien zu trainieren. Sie sind es aus der Schule im Allgemein gewohnt, dass sie eine Hausübung machen müssen.[5] Eine gravierende Änderung diesbezüglich – also eine freiwillige Bearbeitung – stellt für die angehenden Studierenden (zu?) viel Freiheit dar, die mit viel Verantwortung ihrerseits verbunden ist. Die Gefahr, dass sich Studierende nicht ausreichend mit den Beispielen beschäftigen und schon vorher das Handtuch werfen, wäre evtl. zu groß – auch wenn der Zwang zum Mathematik-Lernen natürlich nicht die intrinsische Motivation ersetzen oder ausgleichen kann und soll.

Ein abgegebenes Beispiel zählt dann als »abgegeben«, wenn der Versuch einer Lösung erkennbar ist. Damit soll sichergestellt werden, dass auch Kursteilnehmende, die zu große mathematische Defizite haben, trotzdem zur Teilnahme am Kurs motiviert bleiben und nicht von vornherein chancenlos sind, die Lehrveranstaltung positiv zu absolvieren. Spezielle Vorgaben zur Abgabeform der Beispiele haben das Durchsehen der Aufgaben sowie das Eintragen in die Liste angenehm gemacht.[6]

iv) Am letzten bzw. vorletzten Tag des Kurses ist ein Abschlusstest vorgesehen. Auch dieser wird nicht auf seine Qualität hin im üblichen Notensinn bewertet. Der Abschlusstest hat primär orientierenden Charakter für Studierende und den Lehrenden. Der Test im Detail sowie seine Auswertung wird in Kapitel 14 behandelt.

v) Um beim Feedbackbogen am Kursende eine höhere Rücklaufquote zu erreichen, wurde die Abgabe des schriftlichen, zweiseitigen Feedbackbogens in die Beurteilungskriterien für eine positive Note aufgenommen. Dieser Schritt wurde gesetzt, weil mit dem üblichen Feedbacksystem für Lehrveranstaltungen[7] oft nur sehr niedrige Rücklaufquoten erreicht werden. Die Ergebnisse des Feedbackbogens finden sich in Kapitel 15.

Zusammengefasst zielte das Burteilungskonzept darauf ab, Motivation und Einsatz zu belohnen, statt schlechte Leistungen und fehlendes Vorwissen zu »bestrafen«. Daneben sollten der Orientierungstest sowie Abschlusstest sowohl den Studierenden, als auch dem Kursleiter Orientierung geben.

11.5. Skalierung: Anpassungen an Teilnahmezahl

Die Frage der Skalierbarkeit der Methode (also die Anpassung an abweichende Teilnehmendenzahlen) war wichtig, da schwer abzusehen war, wie viele der Erstsemestrigen rechtzeitig vom Kurs erfahren haben. Es wurde mit etwa 30 bis 60 Studierenden gerechnet, wobei im »schlimmsten« Fall rund 150 Studierenden teilnehmen hätten können sollen.

Der Vorlesungsteil ist diesbezüglich weitgehend unabhängig von der Teilnehmendenzahl, ausreichend große Hörsäle sind vorhanden. Evtl. hätte man bei einer größeren Teilnehmendenzahl auch mit Mikrophon und Tablet-PC arbeiten können, um die Vorteile der modernen Technik (Lautsprecher sowie Beamer-Projektion auf Leinwand) nutzen hätte können.

Bei der Kontrollphase im Übungsteil sind rund 300 durchzusehende Aufgaben das Limit für die effektiv zur Verfügung stehenden 1,5 Stunden zwischen Vorlesungsteil und Übungsteil, falls abgegebenen Aufgaben rechtzeitig retourniert werden sollen. Bei mehr Studierenden müsste auf ein System umgestellt werden, dass Lösungen nur Stichprobenartig kontrolliert. Alternativ könnte der Übungsteil auch erst einen Tag nach Abgabe der Aufgaben stattfinden. Würde der Kurs mit Kleingruppen arbeiten, so ist die Skalierbarkeit durch die Anzahl der Lehrenden/TutorInnen limitiert, die zur Verfügung stehen. Das ist an der Uni Graz momentan aus Mangel an TutorInnen kaum umzusetzen.

---

5 Auch wenn im Allgemeinen zu bezweifeln ist, dass sie sie immer selbst machen. Das Abschreiben von Hausaufgaben ist in vielen Schulen leider Usus.

6 Alle Zettel sind mit vollständigem Namen und Matrikelnummer zu versehen; pro Zettel ein Beispiel; alle Zettel in der richtigen Reihenfolge; alle Zettel eines Studierenden mit einer Büroklammer verbunden oder getackert. Dadurch konnten ca. $50 \cdot 6 = 300$ Zettel in etwa 1,5 h durchgesehen werden.

7 Über das Online-System Uni Graz Online (UGO) wird direkt über die Lehrveranstaltungsanmeldung eine freiwillige Evaluierung freigeschaltet.

12. Brückenkurs-Inhalte

In diesen Kapitel werden die im Brückenkurs geplanten und umgesetzten Inhalte und ihr Niveau dargestellt. Es folgt zunächst ein allgemeiner Überblick, dann die Vorstellung der Themen im Detail.

12.1. Überblick

Grundsätzlich hat sich die Auswahl der Inhalte primär an den Lehrveranstaltungen des ersten Semesters (Lehramt und Bachelor) orientiert, was zu einem Schwerpunkt im Hinblick auf die Analysis (Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration) geführt hat (vgl. Abschnitt3.3.2). Zusätzlich wurden grundlegende Inhalte der Vektorrechnung eingebaut – im Hinblick auf das (kleinere) Publikum der Bachelor-Studierenden.[1] Nach Möglichkeit wurden dabei die Inhalte berücksichtigt, die sich in Abschnitt 6.3 als besonders problematisch herausgestellt haben,.

Die Anordnung der Themenbereiche war (logisch weitgehend) aufbauend – die Reihenfolge der Themen auf den folgenden Seiten entspricht der Reihenfolge der Lehrveranstaltungseinheiten. Tabelle 12.1 zeigt eine Übersicht des inhaltlichen Ablaufs.

Tab. 12.1.: Übersicht der Kurstage und Inhalte im Brückenkurs WS 12/13

		Vorlesungseinheit 1,5 h	Übungseinheit 45 min
Mo	17.9	Orientierungstest, Mengenlehre und Logik	Mengenlehre und Logik (VO)
Di	18.9.	Verknüpfungen und Rechenregeln	Mengenlehre und Logik
Mi	19.9.	Funktionen	Verknüpfungen und Rechenregeln
Do	20.9.	Folgen und Reihen	Funktionen
Fr	21.9.	Folgen und Reihen (UE)	Ungleichungen (UE), Gleichungen (VO)
Mo	24.9.	Grenzwerte und Stetigkeit	Gleichungen (UE)
Di	25.9.	Differentialrechnung	Grenzwerte und Stetigkeit
Mi	26.9.	Integralrechnung	Differentialrechnung
Do	27.9.	Abschlusstest, Vektorrechnung	Integralrechnung
Fr	28.9.	Wiederholung und Vertiefung	Reflexion, Bibliotheksbesuch

Es wurde weitgehend versucht, in der Reihenfolge Definition → Beispiele sowie Satz → (Beweis bzw. Herleitung) → Beispiele vorzugehen. Grund ist der, die Studierenden an die übliche universitäre Vorgangsweise zu gewöhnen (*didactic contract*). Durch den Einstieg mit den abstrakten, exakten Begriffen sollten Studierende an diese Vermittlungsform und den damit verbundenen Schwierigkeiten gewöhnt werden. Aus schulischer Sicht wird deutlich, dass es sich dabei nicht immer um den niederschwelligsten Zugang handelt, der vorwiegend von anschaulichen Beispielen ausgeht. Diese Umstellung sollte dadurch entschärft werden, dass (fast) alle Definitionen und Aussagen an (mehr oder weniger) konkreten Beispielen illustriert wurden.

1 Nicht alle österreichischen Schultypen behandeln Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ (intensiv)

Beweise und Herleitungen wurden nach Möglichkeit dort gebracht, wo sie nicht in technische Spitzfindigkeiten ausarten oder für Erstsemestrige kaum einsichtige »Tricks« (etwa Hilfsfunktionen usw.) benötigen. Nach Möglichkeit wurden Beweise dazu verwendet, die Besonderheiten der jeweiligen Strukturen und Objekte zu verdeutlichen – etwa beim Nachweis von Stetigkeit von Funktionen die logische Struktur der Stetigkeitsdefinition. Daneben wurde versucht, erste Beweisstrategien (direkter Beweis, Beweis durch Widerspruch, vollständige Induktion) zu vermitteln, damit die Studierenden im ersten Semester an bereits Bekanntes anknüpfen können.

Ein wesentlicher Aspekt des Kurses war die selbstständige Beschäftigung mit Übungsaufgaben (vgl. Kapitel 11). Diese Aufgaben sind oft über die typischen Aufgabenstellungen der Schule im Sinne eines simplen Reproduzierens (Analogiebeispiele) oder Regelanwendens (»In-die-Formel-einsetz-Beispiele«) hinausgegangen. Es wurde versucht, durch die Übungsaufgaben einerseits den selbstständigen) Umgang mit neuen mathematischen Inhalten (ergänzend zum gebrachten Stoff im Vorlesungsteil) kennen zu lernen, andererseits auch Inhalte aus dem Vorlesungsteil zu vertiefen oder mit einem anderen Schwerpunkt zu versehen. Die Übungsbeispiele finden sich im Anhang C. Einige »Highlights« werden auch parallel zur Vorstellung der Inhalte in diesem Kapitel präsentiert und die Erfahrungen aus dem Kurs angeführt.

Mit diesen Ausgangsüberlegungen und Ansprüchen ist damit zu rechnen, dass Studierende in Situationen kommen, die sie überfordern oder in denen eine Übungsaufgabe nicht auf Anhieb gelingt. Diese (zu erwartende)[2] Überforderung ist zunächst nicht negativ zu bewerten, der Umgang damit macht den Unterschied.[3] Nach Möglichkeit wurden daher Probleme, Fehler und Fehlverständnisse aufgegriffen, thematisiert und es wurde versucht, Lösungswege dafür zu geben. Dabei konnten die Schwierigkeiten je nach Inhalt nicht im Lauf des Kurses gelöst werden, sondern müssen/sollen als Aufgabe der Studierenden für das erste Semester angesehen werden.

Zusätzlich zum in der Vorlesung gebrachten Stoff gab es ein Skriptum [70], das die Themen in sehr ähnlicher Form, aber zum Teil deutlich ausführlicher behandelt. Daneben finden sich im Skript immer wieder viele interessante Zugänge und Ausblicke, die für die Hochschulmathematik von Relevanz sind und die Studierenden neugierig machen sollen. Beispiele dafür sind die Peano-Axiome von $\mathbb{N}$, der mühsame Weg zur Konstruktion der reellen Zahlen, Differenzierbarkeit als lineare Approximation, Möglichkeiten der Einführung von e^x usw. Die Studierenden konnten dadurch Inhalte der Vorlesung im Detail nachlesen, sich weiterführend mit Mathematik beschäftigen. Weiters enthält das Skriptum etliche vollständig durchgerechnete Beispiele zu den verschiedenen Themengebieten und kann daher als Übungshilfe angesehen werden. Letztendlich ist das Skriptum also mehr als simple Beispiel-Sammlung mit Lösungen (primär auf Schulniveau) wie etwa [86].[4] Zudem ist das Skriptum weniger auf den Kalkülaspekt fixiert, sondern eher auf Konzepte, Ideen und Herleitungen – im Gegensatz zu [87].[5] Das Vorwort zum Skriptum findet sich im Anhang B und vermittelt einen guten Eindruck über sein Ziel.

Nachfolgend ist die Inhaltsbeschreibung der Lehrveranstaltung im UGO [82] dargestellt, wie sie den Studierenden (bereits im Vorfeld[6]) als Orientierungshilfe diente:

> Exemplarisch werden zentrale Themen des Schulstoffes der Oberstufen von AHS und BHS[a] behandelt. Die Themenwahl hängt im Konkreten von den Kenntnissen der TeilnehmerInnen ab. Insbesondere werden jene Themengebiete vertieft, die darüber hinaus für das erste Studienjahr in den Mathematik-Studien von Relevanz sind. Solche Themengebiete sind z. B.
>
> - (Zahlen)Mengen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) und ihre Eigenschaften bzw Besonderheiten;
> - Rechenregeln/-gesetze und Term-Umformungen (Bruchrechnung, Potenzen, Wurzeln, Binomische Formeln, Variablen,...);

2 Wie die Auswertung am Ende des Kurses in Abschnitt 15.4 zeigt, waren etwa 50 % der Studierenden irgendwann einmal im Brückenkurs überfordert.
3 Ein angstfreier Umgang in der Lehrveranstaltung mit Fehlern gibt den Studierenden eine positive, fehlerverzeihende Lernumgebung.
4 Universität Potsdam, Kurs für Studierende (Lehramt und nicht-Lehramt) der Biowissenschaften, Ernährungswissenschaft, Geowissenschaften, Geoökologie, Mathematik, Physik
5 Universität Frankfurt, Kurs primär für Informatik- und Physik-Studierende gedacht, eher weniger für Mathematik-Studierende.
6 Die Studierenden sehen diese Beschreibung, wenn sie sich zum Brückenkurs anmelden wollen.

- Gleichungen (linear, quadratisch, höhere Grade), Ungleichungen (linear, quadratisch, Betragsungleichungen) sowie (lineare) Gleichungssysteme;
- Funktionen (grundlegende Definitionen: Bild, Urbild etc; Stetigkeit; Polynomfunktionen und rationale Funktionen, e-Funktion und Logarithmus, Sinus und Cosinus);
- Differential- und Integralrechnung (Tangentenproblem; Rechenregeln für das Ableiten, darunter Produkt-, Quotienten- und Kettenregel; Integralbegriff als Stammfunktion bzw. Fläche unter der Kurve; Rechenregeln wie Partielle Integration und Substitution);
- Vektoren und Vektorräume (Rechenregeln, Beträge und Winkel, Geraden und Ebenen).

Begriffe und Definitionen aus der Schule werden wiederholt und (wo nötig bzw. sinnvoll) exaktifiziert. Als Ausblick auf die Hochschulmathematik in den Mathematik-Studien werden auch Konzepte wie Definition-Satz-Beweis anhand einfacher Beispiele illustriert. Die Gewichtung in dieser LV bezüglich der operative Ebene (»Rechnen können«, z. B. Bruchrechnung) hängt von den Fähigkeiten der Studierenden ab.

Um die Studierenden auf das hohe Abstraktionsniveau in den Mathematik-Studien vorzubereiten, wird nach inhaltlicher/zeitlicher Möglichkeit und nach Fähigkeit der Studierenden zunehmend ein höherer Abstraktionsgrad als in der Schule angestrebt – eine Zweigleisigkeit (anschaulich $\leftrightarrow$ abstrakt) soll diesen Schritt erleichtern.

a Anm. des Autors: Berufsbildende Höhere Schulen. Grundlegende Inhalte wie Funktionen oder Differentialrechung sind in einer ähnlichen Form wie in der AHS vorgesehen.

Es folgt nun die Vorstellung der einzelnen Themengebiete.

12.2. (Zahlen)Mengen

Das mathematische Fundament des Brückenkurses und der Lehrveranstaltungen des ersten Semesters bildet die (naive) Mengenlehre. Aus fachlicher Sicht wurde dieser Inhalt aufgenommen, da er eine notwendige Voraussetzung für viele weitere Inhalte ist, beispielsweise für Funktionen (Bild von f, Graph). Daneben bietet es sich an, mit diesem einfachen Thema das Konzept von exakten, formalen Definitionen kennenzulernen, etwa Vereinigung oder Durchschnitt. Parallel dazu werden deswegen mathematische Symbole ($\in, \notin, \subset, \vee, \wedge, \cap, \cup, :\Leftrightarrow$ usw.) eingeführt und an einfachen, kurzen Beispielen erklärt. Zudem werden Kommentare dazu an der Tafel (Farbkreide!) verfasst, um die Studierenden zum selbstständigen Kommentieren anzuregen.[7] Dort, wo es Unterschiede in den Notationen zur Schule gibt[8], werden diese thematisiert, zur Illustration auch die Schulschreibweise festgehalten, aber im weiteren nicht mehr verwendet, damit sich die Studierenden an die Schreibweisen im Studium gewöhnen.

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
Menge als Zusammenfassung von Objekten (»Elemente«) + Bspe	
Definition von Teilmenge in sprachlicher Form + Bspe	
Mengengleichheit definiert + Bspe	
Einführung der Mengenoperationen (Verwendung von $\wedge$, $\vee$)	
Venn-Diagramm	
Intervalle (offen, abgeschlossen), Zahlengerade	vgl. Ü-Aufgaben
kartesisches Produkt + Bsp	siehe unten

7 Die Erfahrung hat gezeigt, dass es offenbar keine Selbstverständlichkeit ist, Kommentare in der eigenen Mitschrift zu verfassen, die über das Tafelbild des/der Vortragenden hinausgehen.

8 Etwa bei Intervallen: Statt (a, b) schreibt man in der Schule (momentan noch) oft $]a, b[$. Für die Zentralmatura wurde mittlerweile die Vorgabe $(a; b)$ dazu veröffentlicht, siehe [36] S.5.

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B wurde folgendermaßen eingeführt:

$$A \underbrace{\times}_{\text{»kreuz«}} B := \{\underbrace{(a,b)}_{\text{»Paar«}} \mid a \in A, b \in B\}$$

Dann wurde auf den Unterschied zu $B \times A$ hingewiesen. Es folgte ein Beispiel mit den Mengen $A = \{1,3,5\}$ und $B = \{\frac{1}{2},1\}$. Es ist dann

$$A \times B = \{(1,\tfrac{1}{2}),(1,1),(3,\tfrac{1}{2}),(3,1),(5,\tfrac{1}{2}),(5,1)\}$$

In einem Koordinatensystem wurden diese Elemente eingezeichnet und farblich hervorgehoben.

Übungsbeispiele

Die Übungsbeispiele zu diesem Thema waren (vgl. auch Anhang C):

- Analogie-Beispiele zu den in der VO-gebrachten Beispielen (Differenz, Vereinigung usw.– auch mit Intervallen) sowie
- eine Aufgabe zum Skizzieren von kartesischen Produkten.

In diesem Zusammenhang zeigte sich ein interessantes Phänomen zwischen der Intervallschreibweise und dem kartesischen Produkt:

Seien die Intervalle I_1, I_2, I_3 gegeben. Bestimme die Mengen $I_1 \times I_2$, $I_2 \times I_3$, $I_1 \times \mathbb{R}$.

$$I_1 := (0,\infty) \qquad I_2 := (3,4] \qquad I_3 := [-2,4]$$

Gib auch geeignete Skizzen in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ (also in einem x-y-Koordinatensystem) an.

Es stellt sich heraus, dass die viele Brückenkursteilnehmende im inhaltlichen Kontext nicht zwischen dem Paar (a,b) und dem Intervall (a,b) ausreichend unterscheiden konnten. Dadurch wurden nur einige Paare als Elemente der Kartesischen Produkte angegeben.[9] Die Studierenden haben offenbar die Skizze im Vorlesungsteil zum kartesischen Produkt nicht ausreichend verstanden, wodurch sie auch nicht überprüft haben, ob z. B. ein Element $(a,b) \in I_1 \times I_2$ enthalten ist, indem $a \in I_1$ und $b \in I_2$ ist.

Studierenden konnten die beiden Inhalte (Intervalle und Paare) inhaltlich nicht ausreichend trennen, obwohl beim Tafelbild das Wort »Paar« vermerkt war. Zudem scheint für viele Studierende der Sprung von diskreten Mengen (wie im VO-Teil) auf kontinuierliche, unendliche Mengen zu groß gewesen zu sein. Offenbar muss das Thema kartesisches Produkt stärker vom Intervall abgrenzt werden, was durch die stärke Betonung des Koordinaten-Gedankens erfolgen könnte (oder durch andere Notationen für Intervalle). Daneben könnten weitere Beispiele (Rechtecksflächen) zur Verdeutlichung des Unterschieds herangezogen werden, wodurch $I_1 \times I_2$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ interpretiert (oder gar definiert) werden könnte.[10]

Zahlenmengen etwas detaillierter vorzustellen war zunächst zwar geplant, wurde letztlich nur im Zusammenhang mit Rechenoperationen behandelt (– siehe unten). Nach Absprache mit den Studierenden musste darauf nicht näher eingegangen werden. Darüber hinaus findet sich im Skritpum [70] S.10ff etwas ausführlichere Kapitel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – auch mit Ausblicken in die Konstruktion dieser Zahlenmengen.

9 Ein Lösungsversuch: Zunächst wurde $I_1 \times I_2 := \{(a,b) \mid a \in I_1, b \in I_2\}$ korrekt definiert. Danach wurden jedoch nur die Grenzen eingesetzt, damit wurde $I_1 \times I_2 = \{(0,3),(0,4),(\infty,3),(\infty,4)\}$ erhalten. Im gezeichneten Koordinatensystem wurde die Achsen mit I_1 (waagrechte Achse) und I_2 (senkrechte Achse) bezeichnet und die Elemente die vier Elemente von $I_1 \times I_2$ als Punkte eingetragen. Das Problem mit ∞ als Koordinate wurde so »gelöst«, dass die entsprechenden Punkte rechts außerhalb des Koordinatensystems gezeichnet wurde.

10 Es ist auf diesem Niveau nicht zielführend, Unterschiede zwischen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ zu thematisieren.

12.3. Logische Aussagen

Im Anschluss an die grundlegenden Definitionen von Mengen wurden logische Aussagen behandelt, da diese bereits vorgekommen sind (beispielsweise bei Intervallen $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\}$. Das motiviert dazu, näher auf die formalen Schreibweisen und die Wahrheitswerte von Aussagen einzugehen. Diese Inhalte sind eher gedacht, um in die Thematik hineinzuschnuppern und um ein erstes Verständnis von Implikationen (und damit Beweisen) zu ermöglichen. Es wird keine mathematische Vollständigkeit und auch keine formale Exaktheit angestrebt. Die Studierenden sollen zumindest so gut vorbereitet werden, dass sie den ausführlicheren Ausführungen im Skriptum [70] S.4ff (bei Bedarf) folgen können.

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
mathematische Aussagen durch Intervalldefinition motiviert	
Wahrheitstafeln (p, q, $p \wedge q$, $p \vee q$, $(p \wedge q) \vee q$, $p \Rightarrow q$ + Bspe	vgl. Ü-Aufgaben
Einführung von $\exists$ und $\forall$ (Aussageformen) + Bspe	

Die Einheit wurde mit dem klassischen Widerspruchs-Beweis beendet, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Einerseits sollten die Studierenden so einen ersten etwas längeren Beweis kennenlernen, sich andererseits auch an die neuen Schreibweisen (Implikation, Quantoren usw.) gewöhnen.

Übungsbeispiele

Als Übungsaufgaben zu diesem Themenblock wurden gegeben:

- Einführung der logischen Negation $\neg p$,
- (einfache) umgangssprachliche Aussagen formalisieren,
- Erstellung von Wahrheitstafeln, um beispielsweise $\neg(p \Rightarrow q)$ und $\neg p \vee q$ zu vergleichen.

Somit wurde der Übungszettel wieder genutzt, um die Inhalte zu vertiefen und zu erweitern, wie es auch in den Übungen während des Semesters der Fall ist. Den Studierenden sollte dadurch schnell klar werden, dass typische Uni-Aufgaben (weit) über das simple »Nachkochen von Rezepten« hinausgeht. Insbesondere waren alle Beispiele bisher innermathematische Aufgaben (und keine eingekleideten Textaufgaben). Zur Illustration sei hier eines der Übungsbeispiel vorgestellt:

Sei p eine mathematische Aussage. Dann bezeichnen wir mit $\neg p$ die sogenannte Negation von p, also jene Aussage, die wahr ist, wenn p falsch ist, und falsch ist, wenn p wahr ist:

p	$\neg p$
W	F
F	W

Sei nun p die Aussage: »Es regnet« und q die Aussage »Die Sonne scheint«. Formalisiere folgende Aussagen (d. h. gib sie in mathematischer Kurzschreibweise an):

a) »Es regnet und die Sonne scheint«
b) »Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht«
c) »Es regnet oder es scheint die Sonne«
d) »Entweder regnet es, oder es scheint die Sonne.«

Dieses Übungsbeispiel vereint wieder typische Aspekte von hochschulmathematischen Übungsaufgaben, wie sie im Lauf des ersten Semesters auftauchen: Es wird eine weitere Definition eingeführt, die auf bisherigen Inhalten (hier: dem Wahrheitswert) aufbaut. Daneben sind Aufgaben gestellt, die in dieser Form nicht im Vorlesungsteil behandelt wurden. Weiters muss ein Zusammenhang zwischen konkreten Inhalten und abstraktem Formalismus gefunden werden, was insbesondere das richtige Aufschreiben von mathematischen Aussagen voraussetzt.

12.4. Rechengesetze und Algebra

Das Themengebiet »Rechenregeln und Rechengesetze« wurde im Anschluss an die Mengenlehre und Logik behandelt. Ziel war es, die aus der Oberstufe bekannten Inhalte von einem abstrakteren Standpunkt aus erneut zu betrachten und gleichzeitig zu wiederholen (z. B. partielles Wurzelziehen). Der höhere Standpunkt zu den Verknüpfungen sollte dazu beitragen, auf interessante Teilgebiete der Mathematik auszublicken (Algebra), in die man in der Schule kaum Einblick bekommt. Besonders betont wurden daher die abstrakten Strukturen, um auch ihre Fachausdrücke kennen zu lernen. Daneben wurden Notationen wiederholt bzw. eingeführt, die aus der Schule z. T. wenig bekannt sind (Summenzeichen), oft aber in Erstsemestrigenlehrveranstaltungen zu kurz erklärt werden. Wie in Einheit 1 wurde abschließend ein Beweis vorgeführt, der Nachweis der Gleichheit $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per vollständiger Induktion. Dadurch wurde eine weitere Beweistechnik vorgestellt.

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
Verknüpfung als Rechenoperation $\circ$	vgl. Ü-Aufgaben
Definitionen von kommutativ und assoziativ	
neutrales Element (Beweis der Eindeutigkeit, falls es existiert)	
Definition vom inversen Element + Bspe (Gegenzahl in $\mathbb{Z}$).	
Satz zitiert: $\mathbb{R}$ ist ein Körper.	vgl. Ü-Aufgaben
Beweis: Produkt-Null-Satz in $\mathbb{R}$	
Definition von a^n und a^{-n} mit $n \in \mathbb{N}$.	
Wurzeln und rationale Hochzahlen, partielles Wurzelziehen + Bspe	
Rechenregeln für reelle Hochzahlen zitiert	vgl. Ü-Aufgaben
Ausblick auf Einführung von irrationalen Exponenten	vgl. [70], S.36
Einführung vom Summenzeichen, Rechenregeln + Bspe	
Beweis von $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$ per vollständiger Induktion	

Übungbeispiele

Folgende Übungsbeispiele wurden zu diesen Themengebieten gegeben, von den 8 Aufgaben waren (zumindest) 6 zu machen:

- geometrische Interpretation von Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen am Zahlenstrahl;
- Quadrate von (un)geraden Zahlen auf gerade bzw. ungerade untersuchen;
- eine Verknüpfung auf $\{a, b\}$ definiert durch eine Verknüpfungstabelle auf bestimmte Eigenschaften untersuchen;
- Gültigkeit der binomischen Formeln durch die Körperaxiome von $\mathbb{R}$ nachweisen;

- einfache Rechnungen für komplexe Zahlen;
- Termvereinfachungen zur Erhöhung der Rechenkompetenz;[11] Matrizenmultiplikation: neutrales Element nachweisen, Nichtgültigkeit des Produkt-Nullsatzes nachweisen;[12]

Die Übungsaufgabe, die Gültigkeit der binomischen Formel zu zeigen, hat durch die in der Angabe geforderten Begründungen für die Umformungsschritte einen hohen didaktischen Wert:

> Zeige die Gültigkeit der binomischen Formel
>
> $$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
>
> Du darfst dabei verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist (siehe Satz 5.1 Seite 20 und Def. 4.3 auf Seite 17). Ein Hinweis: Es ist zunächst nicht offensichtlich, dass z. B. $a + a = 2a$ ist. Das ist mit der Gleichung $a = 1 \cdot a$, der Rechenregel $1 + 1 = 2$ sowie den Rechengesetzen (z. B. Distributiv-Gesetz) erst zu zeigen. Notiere insbesondere bei jedem Schritt, welche Rechenregel im Körper (siehe S. 17) du verwendet hast.

Es wird explizit auf die zu verwendende Argumentationsbasis hingewiesen, die es nicht erlaubt, mehrere Umformungsschritte gleichzeitig machen, indem bei jedem Schritt das zu Grunde liegende Rechengesetz notiert werden muss. Daneben handelt es sich bei dieser binomischen Formel um eine sogenannte No-na-Ned-Aussage[13], deren Gültigkeit von SchülerInnen kaum hinterfragt wird. Aus mathematischer (algebraischer) Sicht dagegen muss die Gültigkeit (zunächst) hinterfragt werden.[14] Die Studierenden werden dadurch motiviert zu hinterfragen. Das kritische Hinterfragen legt nahe, warum man Aussagen beweisen muss oder bekanntes Wissen und mathematische Objekte exaktifizieren muss.

Auf einer etwas abstrakteren Ebene ist das folgende Übungsbeispiel angesiedelt:

> Sei $M := \{a, b\}$. Wir betrachten folgende Verknüpfung $\circ$ auf M. Wir legen fest:
>
> $$a \circ a := a \qquad a \circ b := b \qquad b \circ b := a \qquad b \circ a := b$$
>
> Wir können dann eine sogenannte Verknüpfungstabelle machen, wobei der Eintrag in einer Zelle der Tabelle jeweils »Zeile $\circ$ Spalte« ist:
>
> | $\circ$ | a | b |
> |---|---|---|
> | a | a | b |
> | b | b | a |
>
> a) Berechne für folgende Ausdrücke das Verknüpfungsergebnis und begründe dabei jeden Schritt:
>
> $$(a \circ a) \circ b = ?$$
>
> $$(a \circ b) \circ a = ?$$
>
> b) Ist die Gleichung
>
> $$a \circ (a \circ b) = (b \circ a) \circ a$$
>
> eine wahre Aussage?
>
> c) Untersuche die Verknüpfung $\circ$ auf Kommutativität.

11 Diese Aufgabe wurde aufgenommen, um rechenschwächeren Studierenden die Möglichkeit zu üben zu geben. Im Rahmen einer verpflichtenden Aufgabe fällt das sicher leichter als beim eigenständigen Nachlernen.

12 Dieses Beispiel sollte sich besonders die interessierten Studierenden wenden. Aus fachlicher Sicht wurden besonders die Bachelor-Studierenden ein wenig auf die Lineare Algebra vorbereitet.

13 österreichisch für: »Ja, das ist klar und selbstverständlich, wie könnte es auch anders sein.«

14 Im Ring der quadratischen Matrizen gilt diese Aussage im Allgemeinen bekanntlich nicht, weil die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Man beachte, dass in der Angabe der Aufgabe explizit notiert ist, dass a und b reelle Zahlen sind.

d) Welche besondere Rolle nimmt das Element a ein und warum? (vgl. Skriptum S. 16 ff, Körper)
e) Was ist das inverse Element bzgl. $\circ$ zum Element b?

Aus mathematischer Sicht handelt es sich hier um eine Gruppe mit zwei Elementen.[15] Der didaktische Wert hinter diesem Beispiel ist die Abstraktionsfähigkeit, die notwendig ist, bei gleichzeitiger Aufgabe sämtlicher selbstverständlicher, unreflektierter Rechenregeln für reelle Zahlen. So ist das Verknüpfungssymbol $\circ$ ein Zeichen, das nicht dem bisherigen schulischen Erfahrungsraum der Studierenden entspricht. Zusätzlich werden alle notwendigen Definitionen in der Angabe des Beispiels vorgenommen, was man als eine kleine, abgeschlossene mathematische Welt bezeichnen könnte. Daneben wurden die im Vorlesungsteil abstrakt eingeführten Begriffe (z. B. neutrales Element, inverses Element usw.) wiederholt und anhand eines »konkreten« Beispiels illustriert.

Erwartungsgemäß hatte ein Teil der Studierenden damit Probleme[16], wobei man anmerken muss, dass viele Studierende die Aufgabe gut lösten. Um dieses Beispiel von den reellen Zahlen weiter abzugrenzen, könnte man noch a und b durch andere Symbole (etwa $\clubsuit$ und $\blacklozenge$) ersetzen.

Neben diesen Beispielen mit hochschulmathematischem Charakter sei ein Beispieltyp angeführt, der in vielen Mathematik-Brückenkursen (besonders für nicht Mathematik-Studierenden) seinen Platz findet:

Berechne:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} &= ? \\ \sqrt{\sqrt{a^{2/3}}} &= ? \\ \sqrt{36a^4b^4} : \sqrt{4a^2} &= ? \\ \frac{\sqrt[6]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[8]{y^6 \cdot \sqrt[9]{y^2}}} &= ? \end{aligned}$$

Es wurde versucht, Beispiele dieser Art eher bescheiden einzusetzen, weil sich diesbezüglich herausstellte, dass die Studierenden damit kaum Probleme hatten – zumindest bei isolierten Rechenaufgaben.

Komplexe Zahlen

Beim Thema der komplexen Zahlen wurde zuerst durch ein Übungsbeispiel abgeklärt, in wie weit Nachholbedarf besteht und das Thema im Vorlesungsteil behandelt werden sollte. Die Studierenden erhielten daher folgende Übungsaufgabe:

Es seien $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 - 4\mathrm{i}$, $z_3 = 8\mathrm{i}$ gegeben. Berechne

$$z_1 + z_2, \quad z_1 \cdot z_3, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

Gilt die Ungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad ?$$

Siehe Skriptum Seite 23, Kapitel 6: Komplexe Zahlen.

15 Schreibt man $a = 0$ und $b = 1$ und $\circ = +$, so kann man diese Menge mit einer passenden Multiplikation zum klassischen Beispiel eines endlichen Körpers Charakteristik 2 ausbauen. Bekanntlich übernimmt dann 1 die Rolle des multiplikativ neutralen Elements.

16 Zum Teil war den Studierenden nicht klar, was überhaupt zu tun ist.

Da sich bei dem Übungsbeispiel herausstellte, dass nicht alle Studierende die Beispiele mit den komplexen Zahlen lösen konnten (und sich die Studierenden eine Auffrischung wünschten), wurde eine kurze Einführung gegeben:

Inhalt	Anmerkung
i als Lösung von $x^2 = -1$ definiert.	
Definition von Real- und Imaginärteil, Gauß'sche Zahlenebene	
Rechenoperationen auf $\mathbb{C}$ vorgestellt	
Polarkoordinaten eingeführt	Verweis auf Skriptum

12.5. Funktionen

Das Thema Funktionen beinhaltet eines der wesentlichsten Konzepte der Mathematik und wird auch in der Schule über lange Zeiträume behandelt, was allerdings nicht heißt, dass das Thema aus mathematischer Sicht ausreichend behandelt wird. In der Schule werden Funktionen nach Erfahrung des Autors häufig[17] mit den Funktionsgleichungen gleichgesetzt, was im Brückenkurs durch ausreichend exakte Schreibweisen und Zuordnungen ohne Funktionsgleichungen (z. B. Pfeildiagramme) ausgebessert werden soll. Daneben wird ein Schwerpunkt auf Verknüpfungen von Funktionen (Summe, Produkt, Hintereinanderausführung) gelegt. Diese Inhalte legen den Grundstein für weitere Verallgemeinerungen bzw. Abstraktion, haben trotzdem noch Veranschaulichungen, wodurch Transferleistungen im Laufe des Studiums erleichtert werden.

Wie auch schon bei den Mengen erfolgt die Einführung der neuen Begriffe zunächst per (abstrakter) Definition[18], die schon die mathematischen Kurzschreiben (Quantoren usw.) beinhaltet. Selbstverständlich werden durch verbale Erklärungen die Notationen näher beschrieben und dadurch verständlicher gemacht. Studierende bekommen dadurch die Chance, erklärende Notizen zu machen, ohne viele eigenständige Gedanken entwickeln zu müssen: Man notiert einfach zusätzlich, was der/die Vortragende spricht. Das ist eine mögliche Strategie zum Verfassen einer Mitschrift. Nach dem Definieren der Begriffe folgt sofort (zumindest je) ein Beispiel, an dem die Definitionen greifbarer werden. Die Beispiele sind zum Teil sehr grundlegend, zum Teil auch aufwendiger. Das Konzept mit dem steigenden Schwierigkeitsgrad wird auch bei den Übungsaufgaben fortgesetzt, wodurch die Brückenkursteilnehmenden gezwungen sind, sich intensiv mit der Vorlesungsmitschrift oder dem Skriptum zu beschäftigen.

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
Funktionsbegriff (Abbildung) inkl. Definitionsbereich, Wertevorrat, Argument.	
Beispiele + Pfeildiagramme	
Definition des Bildes sowie des Graphen (Skizzen!)	
Summenfunktion ($D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$), Produkt, Differenz, Quotient, grafische Veranschaulichungen, auch nur grafisches Addieren von Funktionen.	vgl. Ü-Aufgaben
Hintereinanderausführung, Umkehrfunktion + Bspe	vlg. Ü-Aufgaben
Definitionen und Graphen von $x^n, \sqrt{x}$ aber auch $\mathrm{e}^x, \ln(x)$,	vgl. Ü-Aufgaben
Sinus-Funktion, Cosinus sowie Tangens per Einheitskreis, Graphen	
Betragsfunktion eingeführt, $\lvert x - a \rvert$ als Abstand von x zu a	

17 In Nachhilfestunden stellte sich heraus, dass der Definitionsbereich als »unnötige Beiwerk« oft von SchülerInnen weggelassen wird.

18 Die Funktion wurde nicht als Spezialfall einer Relation eingeführt, sondern als eindeutige Zuordnung $f : X \to Y$ mit $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\ :\ y = f(x)$ sowie mit der Schreibweise $x \mapsto f(x)$.

Das Skriptum [70] S.44ff behandelt die allgemeinen Grundlagen (Wohldefiniertheit usw.) sehr ausführlich an vielen Beispielen, wodurch sich Studierende, die mit dem schnellen Vorgehen im Vorlesungsteil nicht zurecht kommen, eigenverantwortlich damit beschäftigen können.

Auf die grafischen Veranschaulichungen wurde großer Wert gelegt, da dadurch viele Konzepte um Einiges klarer werden. Studierende sollen dazu angeregt werden, selbst nach Veranschaulichungen zu suchen. Es hat sich beim Abschlusstest herausgestellt, dass das bei weitem nicht allen Studierenden in der gewünschten Komplexität gelungen ist (siehe Kapitel 14. Darum wurde in einer weiteren Einheit am Ende des Kurses erneut auf dieses Thema (insbesondere das schrittweise Hintereinanderausführen) eingegangen.

Im Vorlesungsteil wurden nicht sämtliche Eigenschaften der elementaren Funktionen im Detail behandelt, diese konnten stattdessen im Skriptum [70] S.66-82 nachgelesen werden.

Übungsbeispiele wurden wieder genützt, um einerseits einfache Schulaufgaben zu wiederholen (Parabel und Scheitelpunktsform), andererseits auch, um die Konzepte wie Verknüpfungen von Funktionen auf ein abstrakteres Niveau zu bringen (vgl. unten). Daneben kommen Zahlenbeispiele vor, um die Rechenkompetenz der Studierenden einzufordern. Auch ein Beispiel mit Beweis-Charakter (Eigenschaften von $f(z) = \overline{z}$) sollte die Studierenden zur (in diesem Fall) systematischen Herangehensweise (Definition aufschreiben, einsetzen, umformen) anregen.

Übungsbeispiele

- Addition von Funktionen über einem Körper mit Charakteristik[19] 2
- Parabeln samt Scheitel skizzieren;
- Einige Funktionen skizzieren, z. B. $\sqrt{x^2}, e^{x^2}, \ln(x-1)$;
- Eine Folge von Funktionen skizzieren[20];
- Die Hintereinanderausführungen von zwei gegebenen Funktionen f und g inkl. deren Definitionsbereich bestimmen;
- Eigenschaften von $f(z) = \overline{z}$ untersuchen und damit Rechenregeln für das komplexe konjugieren formulieren;
- Zu einer durch eine Wertetabelle gegebenen Funktion die Umkehrfunktion finden, falls möglich
- Ein Beispiel[21] einer Umkehrfunktonen zu einer rationalen Funktion mit Verweis auf das Skript.

Im Hinblick auf die Argumentationsbasis und die Schulung der Abstraktion betrachten wir:

Wir betrachten die Verknüpfung auf der Menge $M = \{a, b\}$ aus Bsp 2.2.[a] Statt $\circ$ schreiben wir nun $+$ für diese Verknüpfung.

Sei V die Menge, die alle wohldefinierten Funktionen von M nach M enthält. Wie viele Elemente (also Funktionen von M nach M) enthält die Menge V?

Seien nun $f : M \to M$ gegeben durch $f(a) := a$ und $f(b) := b$ sowie $g : M \to M$ mit $g(a) = b$ und $g(b) = b$.

Bestimme dann die Funktion $f + g$.

Bestimme dann die Funktion $f \circ g$ sowie $g \circ f$, wobei das Zeichen $\circ$ nun die Hintereinanderausführung von Funktionen bezeichnet. Siehe Skriptum S.51, Kapitel 11.4 »Verkettung von Funktionen: Hintereinanderausführung«.

a Anm. des Autors: vgl. das Beispiel weiter vorne.

19 Das wurde nicht so bezeichnet, sondern es wurde eine Verknüpfungstabelle angegeben.
20 Besonders für die Bachelor-Studierenden eine interessante Thematik, die in der Analysis 1 wieder im Hinblick auf die verschiedenen Konvergenzarten auftaucht.
21 Diese Aufgabe war erst beim zweiten Übungsblatt zum Thema Funktionen enthalten

Bei der Verknüpfung auf der Menge M müssen wieder sämtliche üblichen Rechenregeln der reellen Zahlen ausgeblendet werden, was die Studierenden dazu zwingt, sich ihrer Selbstverständnisse bzgl. Rechnen mit Variablen bewusst zu werden. Trotzdem ist dieses Beispiel so kurz und »einfach«, dass man sämtliche Möglichkeiten für Funktionen zeichnen kann (Pfeildiagramme oder Wertetabellen), was den Studierenden bei den Abstraktionsschritten helfen soll. Weiters muss in der Verknüpfungstabelle nachgesehen werden, wie zwei Funktionswerte addiert werden müssen, um die Summenfunktion zu erhalten. Damit soll deutlich werden, dass die Addition von Funktionen und die Addition von Funktionswerten nicht das selbe ist.[22] Daneben wurde die Hintereinanderausführung von Funktionen in dieses Beispiel aufgenommen. Zum Teil schien es Missverständnisse bzgl. der Notation von $\circ$ zu geben. Es scheint sinnvoll, für die Einführung in Verknüpfungen im algebraischen Teil ein anderes Symbol als $\circ$ zu verwenden, etwa $\heartsuit$ oder $\blacktriangle$, um Doppelnotationen in diesem frühen Abstraktionsstadium zu vermeiden.

Neben abstrakten und strukturell ungewohnten bzw. anspruchsvollen Beispielen wie diesen wurden auch sehr elementare, schulnahe Beispiele bearbeitet:

> Skizziere die Funktion $\ln(x-1)$ sowie $\mathrm{e}^{(x^2)}$, wo die Funktionen definiert sind.

Die mathematische Exaktheit der Angabe wurde (bewusst) auf Kosten der Verständlichkeit geopfert. Es ist implizit klar (*didactic contract* aus dem Vorlesungsteil), dass der größtmögliche (reelle) Definitionsbereich gemeint ist. Beim »Skizzieren der Funktionen« ist auch klar, dass man den Graph der Funktion skizzieren soll. Allgemein wurde immer nur so viel Exaktheit wie notwendig verwendet, um die Sprache schlank zu halten – die (mathematische) Eindeutigkeit der Aufgabenstellungen hat darunter kaum gelitten. Dieses Beispiel darf unter dem Aspekt »Wiederholen und Vertiefen« eingereiht werden. Es ist schnell klar, dass eine Wertetabelle kaum nützlich ist, um den qualitativen Verlauf der Funktionen (bzw. Graphen) zu erhalten, da man kaum schöne Zahlen erhält.[23] Vielmehr muss man von (hoffentlich!) aus der Schule bekannten Funktionen e^x und $\ln(x)$ ausgehen[24] und mittels Hintereinanderausführung die gewünschten Funktionen zusammenbasteln. Zur Vorbereitung wurde in der Vorlesung das Beispiel 3 vom Orientierungstest (vgl. Kapitel 13) vorgeführt:

> Skizziere die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{für } x > 3 \\ \frac{1}{x-1} & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Damit sollte der Verschiebungsgedanke bei Funktionen der Art $g(x) = f(x-c)$ vergleichsweise leicht zugänglich sein. Für die e-Funktion lassen sich Rechenregeln für Potenzen nicht verwenden, da $e^{x^2} \neq (e^x)^2$. Um den qualitativen Verlauf graphisch zu erhalten, kann man den Hintereinanderausführungsgedanken explizit über die Graphen von x^2 und e^x durchführen, indem man die jeweiligen Längen (grob) abmisst und einsetzt. Die Symmetrie ist einfach zu sehen, wurde aber im Vorlesungsteil nicht explizit thematisiert.[25] Es ist weiters anschaulich klar, dass $x = 0$ das Minimum liefert. Auch der Schnittpunkt mit e^x ist leicht zu bekommen, wenn man den Verlauf von x^2 mit x vergleicht. Es hat sich bei der Kontrolle der Beispiele herausgestellt, dass die $\ln$-Funktion deutlich leichter zu skizzieren war als $e^{(x^2)}$, was aufgrund der Komplexität zu erwarten war (affine Manipulation versus quadratischer Manipulation).

Abschließend ist noch eine Beweis-Aufgabe mit Schwerpunkt auf den strukturellen Eigenschaften[26] angeführt:

---

22 . . . und (zunächst) nur bei gegebenen Funktionsvorschriften wieder als geschlossene Funktionsvorschrift geschrieben werden kann.

23 Trotzdem lassen sich die Funktionen ausgehend von einigen wenigen Werten unmittelbar zeichnen, beim $\ln$: $x = 2$, bei der e-Funktion $x = 0, x = 1, x = -1$. Den weiteren Verlauf erhält man im Groben durch die Stetigkeit und Verläufe von $\ln(x)$ und e^x.

24 Die Graphen von e^x und $\ln(x)$ wurden zudem im Vorlesungsteil gebracht und sind auch im Skript [70] S.77ff enthalten.

25 Im Skriptum [70] S.55 ist nur die Definition von gerade und ungerade enthalten. Es wird nicht näher auf die Symmetrieachsen usw. eingegangen.

26 Es wurde dabei nicht eingegangen, dass dieses f damit ein Körperhomomorphismus auf $\mathbb{C}$ ist, da diese Begrifflichkeiten als Vorbereitung auf das erste Semester nicht notwendig sind.

> Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(a + ib) = a - ib$ für $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Zeige oder widerlege (also Gegenbeispiel angeben):
>
> $$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: &\quad f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: &\quad f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \end{aligned}$$
>
> Welche Rechenregeln ergeben sich dann mit der Schreibweise $f(z) = \overline{z}$?

Vom Rechenaufwand ist dieses Beispiel gering, dennoch sind typische Schritte nötig, die beim »Nachrechnen« (Beweisen) von Gleichheiten nötig sind: Mit Definitionen (linke Seite) starten, Variablen sinnvoll benennen[27] (z. B. $z_1 = a_1 + ib_1$), Funktionsvorschrift anwenden, erlaubte Rechenregeln (für komplexe Zahlen) verwenden, Funktionsvorschrift in die »andere« Richtung verwenden, Ergebnis überprüfen und gesamte Rechnung auf Plausibilität und erlaubte Umformungsschritte überprüfen. Der Mehrwert dieses Beispiels liegt darin, dass gleichzeitig die Rechenregeln für das Konjugieren erarbeitet werden – das wurde im Übungsteil angesprochen.

Es hat sich herausgestellt, dass nicht alle Studierenden dieses Beispiel gelöst haben bzw. lösen konnten. Es zahlt sich diesbezüglich vielleicht aus, zumindest im Nachhinein die oben genannten notwendigen Schritte als eine mögliche Strategie für Aufgaben dieses Formats explizit zu thematisieren. Das kann beispielsweise in einem Zweispalten-System passieren: In der linken Spalte sind die formalen (Rechen-)Schritte angeführt, in der rechten Spalte parallel dazu das strategische Vorgehen und der Ablauf (z. B. Definition anschreiben, einsetzen, umformen, usw.).

Ein nicht triviales Beispiel zu einer Umkehrfunktion war ebenfalls zu bearbeiten:

> Finde die Umkehrfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit
>
> $$f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$$
>
> Skizziere zusätzlich die Funktion f mitsamt ihren Asymptoten. (Tipp: Vgl. Bsp 14.3 auf Seite 70 im Skript). Zum Berechnen der Umkehrfunktion siehe Kap 12.3 »Invertierbarkeit und Umkehrfunktion« ab Seite 55 im Skript.

Dieses Beispiel wurde gegeben, um den rechnerischen[28] Weg, eine Umkehrfunktion zu finden, kennenzulernen. Auch dieses Thema wird im Skriptum näher behandelt, wurde im Brückenkurs ab eher nur am Rand angeschnitten, da die Lehramtsstudierenden in der *Höheren Mathematik 1* ähnliche Aufgaben erhalten. Es wird davon ausgegangen, dass durch diese Beispiele zumindest ein erstes Verständnis für die Umkehrfunktion (und den Zusammenhang der Graphen von f und f^{-1}) erhalten werden kann, sodass zumindest die Vokabeln für die Studierenden im Lauf des Semesters bekannt sind.

12.6. Folgen und Reihen (zusätzlich)

Das Thema »Folgen und Reihen« war zunächst nicht als Inhalt für den Brückenkurs vorgesehen.[29] Beim Orientierungstext stellte sich allerdings heraus, dass sich die Studierenden vor allem beim Thema Reihen

---

27 Das ist für Erstsemestrige kein trivialer Schritt. Erstsemestrigen ist oft nicht klar, wann sie eine neue Variable nehmen müssen oder dürfen – besonders bei All- und Existenzaussagen kommt es zu immer wieder zu unerlaubten Verwendung des gleichen Buchstabens. Schulische Aufgaben machen es oft nicht nötig, selbst Bezeichnungen für Variablen einzuführen.

28 Den graphischen Weg (Spiegelung an der Geraden $y = x$) kennen vergleichsweise viele Erstsemestrige.

29 Hauptgrund dafür war, dass dieses Thema für die Lehramtsstudierenden im ersten Semester praktisch keine Rolle spielt (vgl. Abschnitt 3.3). Bachelor-Studierende behandeln diese Themen in der *Analysis*, und zwar sehr ausführlich und auf einem sehr abstrakten, hohen Niveau, aber immerhin nicht am Beginn des ersten Semesters. Da der Kurs inhaltlich prall gefüllt war, war dieses Thema zunächst nicht eingeplant.

sehr unsicher waren. Aus mathematischer Sicht[30] musste trotzdem mit Folgen begonnen werden, was dann auch dem Wunsch der Studierenden entsprach. In Absprache mit den Studierenden wurde gleich ein tragfähiges, exakteres Niveau angestrebt, wobei sich bei den Übungsaufgaben herausstellte, dass das Niveau insgesamt zu hoch gewesen sein dürfte.

Inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
Einführung von (reellen) Folgen als $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, Notationen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.	
Beispiel mit Bildungsgesetz: $a_n = \frac{n}{n+1}$	
Definition der Monotonie, Überprüfung am vorigen Bsp	vlg. Ü-Aufgaben
Definition der Beschränktheit von Folgen (Skizzen)	vgl. Ü-Aufgaben
Exakte ϵ-N-Definition des Grenzwertes von Folgen, graphische Veranschaulichung (ϵ-Schlauch)	
Berechnung des Grenzwertes zum Bsp oben (Suchphase, Beweisphase)	vgl. Ü-Aufgaben
Berechnung von Grenzwerten (»rationalen« Folgen) (Erweitern, Rechenregeln)	vgl. Ü-Aufgaben
Reihen als Folge der Partialsummen, Tabellarische Darstellung (S_n, $\sum_{k=0}^{n} a_k$, $a_0 + \ldots + a_n$)	
Konvergenz, Divergenz definiert; ($1 \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^n \stackrel{?}{=} 0$ durch Umklammern)	
geometrische Reihe, Formel für S_n (ohne V.I.), Existenz des Grenzwertes	vgl. Ü-Aufgaben
divergente Reihe: harmonische Reihen (ohne Beweis)	vgl. Ü-Aufgaben
Drei Kriterien für Konvergenz/Divergenz angeben.	vgl. Ü-Aufgaben
Rechenregeln für konvergente Reihen angeführt.	vgl. Ü-Aufgaben

Übungsbeispiele

Die Übungsbeispiele waren wieder gewohnt vielseitig und umfassend:

- einige Folgenglieder einer Folge berechnen;
- Folge auf Beschränktheit und Grenzwert besuchen (Verweis auf Skriptum);
- einige Folgenglieder der Fibonacci-Folge berechnen und auf Monotonie und Beschränktheit untersuchen;
- Grenzwert einer »rationalen« Folge berechnen (Verweis auf Skriptum);
- Folge auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz untersuchen;
- Reihen auf Konvergenz untersuchen;
- Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ berechnen.

Die Übungsaufgaben waren von verschiedenem Schwierigkeitsgrad.Es stellte sich etwa für die Hälfte der Studierenden heraus, dass das Thema insgesamt vom Niveau und Tempo her sehr/zu hoch war, obwohl die Studierenden das Wochenende über Zeit hatten, die Aufgaben zu behandeln und etwaige Schwierigkeiten zu überwinden.

Es seien einige Beispiele angeführt, um das oben Ausgeführte zu illustrieren:

30 Reihe als Folge der Partialsummen, und nicht als unendliche Summe.

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ gegeben. Ist die Folge beschränkt? Ist die Folge monoton? (Eine Skizze kann helfen.)

Hat die Folge einen Grenzwert? Wenn ja, dann zeige per Definition des Grenzwertes (Definition B.2 im Skript auf Seite 164), dass die Folge wirklich den (vermuteten) Grenzwert besitzt.

Berechnet man die ersten paar Folgenglieder, so erkannt man das Verhalten dieser Folge. Es liefert $(-1)^n$ zwar ein alternierendes Vorzeichen, dieses ist für den Betrag von a_n aber nicht relevant. Die Monotonie (steigend sowie fallend) kann sofort durch die Angabe von drei Folgengliedern widerlegt werden.[31] Die Beschränktheit ist durch eine Skizze sofort offensichtlich, man erkennt z. B. 1 als Schranke. Das Nachrechnen dieser Definition ist kurz und einfach. Anschaulich erkennt man, dass sich die Folgenglieder immer näher an 0 annähern, was den Kandidaten für den Grenzwert liefert. Beim formalen Beweis kann man sich stark an das Vorgehen im Skriptum beim Beispiel $a_n = 1/n$ orientieren, wodurch die Systematik deutlich werden sollte. Es hat sich herausgestellt, dass der Nachweis des Grenzwertes für viele der Studierenden vom Ablauf her nicht ausreichend verstanden wurde, was die Suchphase und die Beweisphase betrifft. Nicht immer wurde $N(\epsilon)$ richtig, d. h. sinnvoll, gewählt. Das war eigentlich zu erwarten, da z. B. die Stetigkeitsdefinition ähnliche Probleme im ersten Semesters bereitet und strukturell recht ähnlich ist. Das Abschätzen fällt schwer.

Ein systematisches Beispiel, das in dieser Form dagegen doch vermehrt im Unterricht aufzutreten scheint, wurde von deutlich mehr Studierenden gelöst:

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n + 1},$$

indem du Rechenregeln für konvergente Folgen verwendest (siehe Satz B.1 auf Seite 165 im Skript).

Ein Analogie-Beispiel dazu wurde im Vorlesungsteil vorgetragen. Die erlaubten Rechenschritte per Rechenregeln zu argumentieren, wurde im Sinne der Vorbereitung auf das Studium eingefordert. Dadurch sollten die Studierenden angeregt werden, auch beim Rechnen reflektiert vorzugehen.

Bei den Reihen war die Lösungshäufigkeit geringer als bei den Folgen. Aufgrund des unplanmäßigen Einschubs dieses Themas ging der Vorlesungsstoff über den Inhalt des Skriptums hinaus, wodurch die Studierenden keine ergänzenden Erklärungen nachlesen konnten.[32]

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \ldots = ?$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = ?$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n} = ?$$

Tipp zur zweiten: Versuche auf die Form $\sum q^k$ mit einem $0 < q < 1$ zu kommen.

Ein Beispiel stellt sich mit Abstand (fast wie erwartet) als zu schwer heraus, nämlich folgendes:

31 Dass die Folge auch im weiteren Verlauf nicht monoton sein kann, ist aufgrund des alternierenden Vorzeichens klar.
32 Eine Internetrecherche hätte selbstverständlich Hilfestellungen geliefert.

Berechne den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

Tipp: Gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$$

mit passenden $a, b \in \mathbb{R}$? Betrachte dann die n-te Partialsumme und verwende dann z. B. Rechenregeln für Summen, um eine geschlossene Formel für S_n zu finden.

Aus mathematischer Sicht beinhaltet dieses Beispiel sehr viele »Tricks« (Partialbruchzerlegung, Teleskopsummen), weswegen es in die Übungsaufgaben aufgenommen wurden. Prinzipiell wurde das notwendige Wissen durch den Vorlesungsteil bereitgestellt.

Da insgesamt das Niveau beim Thema Folgen und Reihen zu hoch war, sind noch zwei Änderungsmöglichkeiten bzw.Verbesserungsmöglichkeiten vorgestellt, um Überforderung bei den Studierenden zu verringern:

i) In Summe sollte mehr Literatur zur Verfügung gestellt werden. Mehr vollständig durchgerechnete und kommentierte Beispiele (samt graphischer Veranschaulichung) sind sinnvoll. Die Einführung der Folgen war in dieser kurzen Zeit (bei wenig Vorwissen) zu dicht gedrängt – was durch schulnähere Beispiele im Skriptum etwas entschärft werden könnte. Insgesamt würde sich eine sinnstiftende Einleitung bzw. der Wert der Folgen an sich die Wichtigkeit der Folgen für die Hochschulmathematik herausstreichen.[33]

ii) Das Niveau könnte allgemein tiefer angesetzt werden. Grundlagen wie das Berechnen von Folgengliedern, das Skizzieren von Folgen oder die anschauliche Untersuchung auf Beschränktheit und Monotonie sind auszuweiten. Im Gegensatz dazu könnte man die ϵ-N-Definition des Grenzwertes weglassen und auf einen anschaulichen Grenzwert-Begriff setzen. Die Rechenregeln für konvergente Folgen wird man trotzdem zitieren müssen, um das Berechnen der Grenzwerte von rationalen Folgen zu ermöglichen, was eigentlich in vielen Schulbüchern enthalten ist.

33 Ab WS 13/14 wird dieses Thema auch für Lehramtsstudierende wegen des Einstieges mit der Analysis 1 relevant.

12.7. Ungleichungen, Gleichungen und Gleichungssysteme

Das Thema Ungleichungen war zunächst nicht in diesem Ausmaß vorgesehen, wurde dann aber aufgrund des Orientierungstestes[34] etwas ausführlicher aufgenommen. Das Kennenlernen der Thematik fand für die Studierenden schon bei den Folgen statt (Monotonie und Beschränktheit), wobei die dortigen Beispiele keine Fallunterscheidungen benötigten, da keine Multiplikationen bzw. Divisionen mit Ausdrücken < 0 nötig waren. Im Anschluss wurden an diese Thematik des Wechsels des Ungleich-Zeichens herangeführt ($\rightarrow$ Isolierung der Schwierigkeiten). Im Hinblick auf die *Analysis* im ersten Semester sowie die noch im Brückenkurs folgenden Grenzwerte von Funktionen bzw. Stetigkeit wurden ebenfalls noch Betragsungleichungen eingeführt und ihre Rolle als Instrument zum Messen von Abständen betont.[35]

inhaltlicher Aufbau – Ungleichungen

Inhalt	Anmerkung
Quadratische Ungleichungen graphisch und rechnerisch (Fallunterscheidung)	
Bruchungleichungen $\frac{x}{x+3} \leq 4$ mit Fallunterscheidung	
Ungleichungen 3. Grades graphisch und rechnerisch	
Betragsungleichungen $\lvert 4x+2\rvert \geq 3$ (auch als Abstand interpretiert)	

Im Zusammenhang mit der Linearfaktor-Zerlegung konnte wiederholt auf das Skizzieren von Funktionen zurückgegriffen werden, wobei die Thematik der Anzahl der Nullstellen von Polynomen offensichtlich wird.

inhaltlicher Aufbau – Gleichungssysteme

Beim Thema »Gleichungen und Gleichungssysteme« wurde vor allem das Thema Gleichungssysteme behandelt, da das Lösen von Polynomgleichungen eine vergleichsweise gute Lösungwahrscheinlichkeit hatte (siehe Kapitel 13 hatte. Das Beherrschen von quadratischen Lösungsformeln kann de facto beim Großteil der Studierenden vorausgesetzt werden. Daneben wird dieses Thema im Skriptum ausreichend behandelt, ebenso das Thema Polynomdivision, das ebenfalls vergleichsweise viele Studierende beherrscht haben. Dagegen fiel das Lösen eines Gleichungssystem beim Orientierungstests überraschend schwer, weswegen verstärkt darauf eingegangen wurde (besonders der Fall: unendlich viele Lösungen und Wahl eines Parameters). Es wurde bei den üblichen Rechenverfahren (Additions- bzw. Elliminationsverfahren) darauf geachtet, keine der Gleichungen zu verlieren[36], um später die Anknüpfung des Gauß'schen Algorithmus zu erleichtern (vgl. unten).

Inhalt	Anmerkung
2×2 Gleichungssystem (genau eine Lösung)	vgl. Ü-Aufgaben
2×2 Gleichungssystems (unendlich vielen Lösungen)	vgl. Ü-Aufgaben
Gleichungssystem (2 Gleichungen, 3 Unbekannten) unendlich viele Lösungen, geometrische Interpretationen	vgl. Ü-Aufgaben

34 60% der Kursteilnehmenden gaben an, dieses Thema nicht ausreichend behandelt zu haben.
35 Das Skriptum [70] S.73ff beschäftigt sich mit der Betragsfunktion deutlich ausführlicher, als das im Kurs geschehen ist. Dort wird sogar der Begriff einer Metrik angeführt und die Normeigenschaften des Betrages bewiesen.
36 Das passiert in der Schule sehr oft, dass durch das Kombinieren von Gleichungen die (alten) Gleichungen weniger werden. Den Schülern und Schülerinnen ist dadurch nicht immer klar, in welcher der Gleichungen sie dann rückeinsetzen dürfen. Das wurde beim Orientierungstest deutlich.

Übungsaufgaben – Gleichungssysteme

Gleichungssysteme folgender Größen (Gleichungen, Unbekannte, Anzahl Lösungen) waren im Rahmen der Übungsaufgaben zu Lösen: (2,2,1), (3,2,0), (3,3,1), (3,2,∞), (4,4,∞), beispielsweise:

> Löse folgendes Gleichungssystem:
>
> $$\begin{array}{rcrcrcrc} 2x & + & 3y & + & z & = & 10 & (I) \\ x & - & y & + & 2z & = & 7 & (II) \end{array}$$

Die Studierenden hatten das Wochenende über Zeit, dieses Aufgaben zu bearbeiten. Ziel dieser Vorgangsweise war es, die Studierenden dazu zu animieren, sich selbstständig bereits im Vorfeld mit den Inhalten zu beschäftigen, damit sie erkennen, dass man sich mit Mathematik aktiv beschäftigen muss, wenn man seine Fähigkeiten erweitern möchte. Zudem erleichtert ein größeres Vorwissen das Einführen von neuen Verfahren bzw. Notationen (Gauß-Verfahren). Am Montagnachmittag darauf wurden die Lösungen präsentiert, wobei die gängige Kurzschreibweise (erweiterte Koeffizientenmatrix und Gauß-Algorithmus) verwendet wurde. Die Studierenden wurden über das Wochenende aufgefordert, sich zunächst selbst in die Thematik im Skriptum einzulesen, das neben sehr grundlegenden Beispielen auch eine relative abstrakte Form (Matrizenschreibweise) der Theorie beinhaltet.[37] Es muss festgestellt werden, dass das selbstständige Erarbeiten der Inhalte in diesem Zusammenhang nicht bei allen Studierenden in der gewünschten Form funktioniert hat. Insbesondere die Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen machten vor der Theorie-Einheit am Montag Probleme. Den Rückmeldungen zu Folge konnten diese Unklarheiten im Laufe des Montags für die Studierenden zufriedenstellend gelöst werden.

12.8. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Das Thema »Grenzwerte und Stetigkeit« wurde erst in der zweiten Brückenkurswoche behandelt, damit die Studierenden vorher genug Zeit hatten, das Thema Funktionen zu verstehen (Definitionsbereich, Graph, Verkettungen von Funktionen).

Hauptgrund, warum dieses Thema in den Brückenkurs aufgenommen wurde, ist, dass viele Studierende im ersten Semester[38] kaum selbstständig mit diesen Begriffen auf formaler Ebene arbeiten können, vgl. Abschnitt 6.3. Wie dargestellt gibt es bei diesen Themen einen zu großen Sprung zwischen Anschauung (was kann man aus der Skizze schließen) und formalem Nachweis (»wie muss ich was hinschreiben«). Im Schulalltag scheint kaum darauf eingegangen zu werden.[39] Es kann nicht erwartet werden, dass am Ende des zweiwöchigen Kurses ein Verständis auf akamdemischem Niveau erreicht wird.

Zunächst muss festgehalten werden, dass zuerst das Thema Grenzwerte und darauf aufbauend das Thema Stetigkeit gebracht wurden. Dadurch wurde Stetigkeit als lokale Eigenschaft eingeführt wurde und nicht als globale Eigenschaft (»Bleistiftstetigkeit«), die wenig Anschlussfähigkeit für die exakte ϵ-δ-Definition liefert.

Zunächst noch eine Begriffsklärung: Nach Tall [11] S.256 hat der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ sowohl *process*-Charakter[40] (Approximationsgedanke, das Streben zum Grenzwert: $f(x) \to c$), als auch *concept*-Charakter (die formale Definition bzw. der Grenzwert als Zahl an sich, c bzw. die ϵ-δ-Definition). Tall fasst diese *process-concept*-Kombination unter dem Begriff *procept* zusammen (S.253ff) (vgl. auch [88]). Um mit dem Grenzwert in seiner Gesamtheit sinnvoll arbeiten zu können, ist ein Hin- und Herwechseln zwischen dem *process*-Charakter und dem *concept*-Charakter notwendig. Problematisch beim Grenzwert ist allerdings, dass das (anschauliche) Verständnis des *process*-Charakters im Allgemeinen nicht direkt

37 Das ist im ersten Semester vor allem für die Bachelor-Studierenden in der *Lineare Algebra* interessant.
38 Nicht nur in der *Analysis*, sondern auch in der *Höheren Mathematik*
39 Obwohl die Präzisierung des Grenzwertbegriffs und der Stetigkeit im Lehrplan gefordert ist, wird es offensichtlich nicht ausreichend in der Schule behandelt.
40 Dieser *process*-Charakter ist nicht ident mit dem *process* im Sinne von Berechnen (in der Arithmetik) von z. B. $4 + 5$. Das *concept* im Zusammenhang der Arithmetik ist das (numerische) Ergebnis des Ausdrucks, also 9. Vgl. [11], S.253-255. Hier kann also der *process* unmittelbar zum Berechnen des Ergebnisses verwendet werden.

zur Berechnung des Grenzwertes selbst führt – stattdessen ist (zumindest am Beginn) ein Rückgriff auf die Definition *(concept)* nötig. Sobald dann allerdings einige Grundresultate (z. B. konstante und lineare Funktionen haben überall einen Grenzwert, Rechenregeln für Grenzwerte) zur Verfügung stehen, wird die Definition *(concept)* aufgrund der mühsamen Handhabung nach Möglichkeit vermieden: Die Berechnung des Grenzwertes wird dann durch Anwendung der Grundresultate (»algebra of limits« S.256) vollzogen. Durch diese Unklarheiten, wann welcher Aspekt zu verwenden ist, wird die mentale Kombination von *process* und *concept* sehr schwierig. Ausgehend von diesen Überlegungen scheint ein (zumindest implizites) Thematisieren beider Aspekte (*process* und *concept*) sowie der Wechsel zwischen ihnen, sinnvoll.

inhaltlicher Aufbau

Ein Überblick der Inhalte sollte den Zugang zur Thematik deutlich machen:

Inhalt	Anmerkung
eigentlicher Grenzwert durch Skizze eingeführt (hebbare Unstetigkeitsstelle)	siehe unten
$\lim$-Kursschreibweise eingeführt	
ϵ-δ-Definition, Illustration an Skizze	siehe unten
Signum-Funktion auf $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ untersucht, einseitge Grenwerte anschaulich eingeführt	
Satz zitiert: Limes existiert genau wenn, wenn die einseitigen Limiten existieren und gleich sind	
Größtes-Ganzes-Funktion ($\lfloor x\rfloor$ Gaußklammer) auf Existenz der Limiten für alle $x \in \mathbb{R}$ untersucht.	
Funktion $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ an $x = 3$ auf Existenz des Grenzwertes untersucht.	vgl. Ü-Aufgaben
Grenzwertsätze (Summe, Differenz, Produkt) zitiert.	
Bsp $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}$ mit Grenzwertsätzen bestimmt.[41]	
Stetigkeit formal und mit einer Skizze eingeführt + grafisches Bsp für Unstetigkeit	
Untersuchung der Signum-Funktion auf Stetigkeit	
Satz für stetige Funktionen ($f+g, f-g, f\cdot g, f/g$) zitiert	
Beispiel: $f(x) = c$ und $g(x) = x$ als stetig vorausgesetzt und damit die Stetigkeit von ax^2+bx+c argumentiert	vgl. Ü-Aufgaben
Stetigkeit von e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ zitiert.	
$f(x) = 4x+2$ an $x_0 = 1$ per Definition auf Stetigkeit untersucht (Suchphase, Beweisformulierung)	vgl. Ü-Aufgaben
Weitere Beispiele (nur Skizzen!) stetig/unstetig gebracht: $x\cdot\sin(1/x)$ und $\sin(1/x)$.	

Im Skriptum [70] S.59ff sind diese Themen sehr ausführlich behandelt, wobei ein schrittweises Erhöhen des Formalen vorgesehen ist, d. h. zuerst gibt es sprachliche und anschauliche Definitionen, und erst in einem zweiten Exaktifizierungsschritt werden Quantoren und formale Beweise (auch anhand von Beispielen und Gegenbeispielen) eingeführt. Im Folgenden werden nun einige Vorlesungsinhalte näher ausgeführt, um das Konzept zu verdeutlichen.

41 Im Vorlesungsteil wurde $x\to\infty$ nicht formal eingeführt. In diesen Stadium schien es ausreichend, anschaulich zu argumentieren. Im Skriptum findet sich etwas mehr dazu – wobei das Thema aus (hochschul)mathematischer Sicht nicht zufrieden stellend behandelt wird, da dies ohnehin in den Lehrveranstaltungen des ersten Semesters passiert.

Zunächst wurde eine anschauliche Skizze gebracht, durch die der »Grenzwert« anschaulich eingeführt wird *(process)*. Die formale Definition *(concept)* wurde danach in einen Zusammenhang mit der Skizze gebracht, die logische Reihenfolge der Schritte erklärt. Dazu wurde die Aussage in ihre Bestandteile zerlegt, nummeriert und die Skizze dadurch beschriftet.

Im Anschluss daran wurde noch nicht auf formaler Ebene mit dieser Definition gearbeitet – es wurde versucht, ausgehend von den Skizzen die Begriffsbildung zu schärfen (also das *concept image* an die neue *concept definition* anzunähern). Mit typischen Beispielen wie der Vorzeichenfunktion oder der »Größtes Ganzes«-Funktion ist das zunächst gut möglich. Zugleich wird dadurch der *process*-Charakter[42] des Grenzwertes thematisiert, da bei diesen Beispielen die Annäherungen von links und von rechts die Entscheidungsgrundlagen zur Beurteilung der Existenz des Grenzwertes liefern. Durch die Darstellung mit Pfeilen auf der x-Achse, am Graphen und an der y-Achse wurde dieser Gedanke verstärkt.

Durch dieses Beispiel wurde gezeigt, dass es zur Untersuchung eines Grenzwertes an einer Stelle x_0 nicht nötig ist, dass x_0 im Definitionsbereich liegt ($\rightarrow$ Abgrenzung zur Stetigkeit). Der mathematisch korrekte Begriff »Häufungspunkt« wurde nicht thematisiert. Darüber hinaus ist bei dieser Aufgabe offensichtlich, dass $\lim_{x\to 3} x+3$ den Wert 6 liefert, was eine Skizze »bestätigt«. Zunächst ist nicht klar, dass der Grenzwert 6 mit der anfänglich gebrachten ϵ-δ-Definition verträglich ist – es ist jedoch fraglich, in weit das den Studierenden zu diesem Zeitpunkt bewusst ist.

Ein Beweis mit einer formalen ϵ-δ-Definition wurde erst am Ende der Vorlesungseinheit gebraucht, nämlich im Zusammenhang mit Stetigkeit (Rückgriff auf *concept*):

Es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x + 2$ gegeben. Frage: »Ist f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?«

Suchphase:

$$|f(x) - f(x_0)| = |4x - 2 - (4+2)| = |4x - 4| = |4(x-1)| = 4\underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 4\delta < \epsilon$$

wenn $|x - x_0| = |x-1| < \delta$. Dann wird $\delta < \frac{\epsilon}{4}$ begründet und z. B. $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ festgesetzt. Damit ist die Suchphase abgeschlossen.

Nun der Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{5} > 0$.

Sei jetzt $x \in D$ mit $|x-1| < \delta$ beliebig gegeben. Dann

$$|f(x) - f(1)| = |4x - 2 - (4+2)| = \ldots = 4 \cdot |x-1| < 4\delta = \tfrac{4}{5}\epsilon < 1\epsilon = \epsilon\,.$$

Dabei wurde sehr deutlich eine mathematische Strategie demonstriert:

i) In der *Suchphase* wird versucht, den Ausdruck $|f(x) - f(x_0)|$ »nach oben« durch Terme mit $|x - x_0|$ passend abzuschätzen, mit dem Ziel im Hinterkopf, einen Zusammenhang zwischen δ und ϵ zu erhalten. Die logische Konsistenz im Hinblick auf Voraussetzung und Folgerung im Hinblick auf die Definition spielt dabei eine untergeordnete Rolle – der Fokus liegt auf der technischen Bearbeitung der Ausdrücke.

ii) In der *Beweisphase* werden die technischen Erkenntnisse der *Suchphase* zweierlei genützt, nämlich bei der passenden Wahl von δ sowie bei der Abschätzung von $|f(x) - f(x_0)|$. Da diese Rechenschritte bereits einmal durchgearbeitet wurden, kann jetzt der Fokus auf der korrekten logischen Notation und der richtigen Abfolge der Schritte laut Definition liegen.

42 Diesen könnte man implizit verwendetes Folgenkriterium interpretieren. Explizit wurde es nicht verwendet, da es für Erstsemestrige schwer verständlich ist, die Existenz eines Grenzwertes an der Stelle x_0 nachzuweisen, in dem man die Bilder aller möglichen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x_0 untersucht.

Übungsaufgaben

Inhalte der Übungsblätter:

- Beispiele, bei denen Grenzwerte durch Wegkürzen des Nenners erhalten werden können;
- ϵ-δ-Beweis, dass jede konstante reelle Funktion stetig ist;
- $f(x) = -3x + 1$ per ϵ-δ-Definition auf Stetigkeit untersuchen.
- Erneut im Detail argumentieren, dass $f(x) = ax^2 + bx + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ stetig ist (vgl. VO).

Bei den Beispielen war grundsätzlich nicht gefordert, mit der ϵ-δ-Definition zu arbeiten. Es sollte stattdessen mit den Rechenregeln für Limiten[43] (»algebra of limits«) argumentiert werden, um die Anschaulichkeit hoch zu halten und die formale Schwierigkeit niedrig. Dadurch sollte Überforderung verringert werden. Die Beispiele waren so gewählt, dass man ohne großen Aufwand Skizzen anfertigen konnte, was beim Vorrechnen im Übungsteil auch vorgezeigt wurde (Verdeutlichung des *process*-Charakters). Damit sollten die Studierenden die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen.

Eines der Beispiele war:

> Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \frac{x^2 - 4 - 3 \cdot |x - 2|}{x - 2}$$
>
> einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ hat. Skizze! (Tipp: Fallunterscheidung machen, um den Betrag aufzulösen.)

Hat man erst einmal eine Fallunterscheidung für den Betrag gemacht, so vereinfacht sich die Funktionsgleichung sehr (affine Funktion mit einer unhebbaren Unstetigkeitsstelle an $x = 2$). Betrachtet man dann die einseitigen Limiten, so zeigt sich, dass es keinen Grenzwert geben kann. Dieses Beispiel wird sehr anschaulich und einfach, wenn man die Funktion skizziert, was nicht alle Studierenden von allein gemacht haben. In diesem Zusammenhang scheint es notwendig zu sein, eine Skizze explizit einzufordern. Längerfristiges Ziel (für die Studierenden) muss natürlich sein, dass sie selbstständig nach passenden Veranschaulichungen suchen, um Beispiele dadurch leichter lösbar zu machen.

Mit einer geringeren Lösungshäufigkeit war folgendes Beispiel (explizite Verwendung des *concepts*) behaftet:

> Zeige mit Hilfe der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit (siehe auch Skriptum Kap. 13.4, ab Seite 63, inkl. Bsp 13.6), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x - 1$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig ist.

Obwohl es sich dabei um ein Analogie-Beispiel zum Vorlesungsteil handelt, waren viele Studierenden strukturell überfordert. Das Verständnis hat gefehlt, um einen Zusammenhang zwischen δ und ϵ zu suchen, mit dem die Implikation in der Stetigkeitsdefinition wahr ist. Ähnlich Unklarheiten waren bei der Aufgabe erkennbar, die Studierenden per Definition die Stetigkeit konstanter Funktionen nachweisen sollten.[44]

Letztlich hat die zur Verfügung stehende Zeit bei diesem Thema nicht gereicht, dass alle Studierende ein formalen Verständnis (mit Handlungskompetenz) erreicht haben. Eine graphische Behandlung des Themas könnte im Vorfeld forciert werden. Nichtsdestotrotz ist eine Präzisierung des Grenzwertbegriffs anzustreben. Das wird von den Studierenden besonders im Nachhinein positiv erlebt, wie Teil IV dieser Arbeit zeigt.

---

43 Im Lauf des restlichen Studiums wird bekanntlich auch nach Möglichkeit mit diesen Rechenregeln argumentiert, um das meist mühsame Abschätzen zu vermeiden.

44 Tall berichtet über die selben Probleme, siehe [11] S.256

12.9. Differentialrechnung

Das Themengebiet »Differentialrechnung« wird im üblichen Schulunterricht recht ausführlich behandelt – im Allgemeinen vor allem, was den systematischen Charakter (Ableiten von Polynomfunktionen sowie Kurvendiskussionen) betrifft. Mittlerweile darf zwar davon ausgegangen werden, dass der inhaltliche Aspekt der Ableitung (z. B. momentane Änderungsrate, Momentangeschwindigkeit usw.) stärker betont wird als noch vor wenigen Jahren. Das bedeutet aber nicht, dass auf formaler Ebene mit den Grenzwerten gearbeitet werden muss, insbesondere wenn ein sauberer Grenzwertbegriff (samt erlaubten Rechenregeln) fehlt.

Aufgrund der unklaren Lage über die Exaktheit des schulischen Unterrichts bietet es sich an, den im Brückenkurs behandelten Grenzwert-Begriff sinnvoll zu verwenden (Wiederholung von Inhalten). Das bedeutet, Beispiele zur Berechnung der Ableitung über die Definition zu bringen. Da nicht davon ausgegangen werden darf, dass in der Schule die gängigen Ableitungsregeln auch bewiesen/hergeleitet wurden[45], bietet sich dieses Thema diesbezüglich an, um den aufbauenden, schließenden Charakter der Hochschulmathematik zu demonstrieren.

Von den Inhalten her wurde auf die typischen Kurvendiskussionen und Extremwertberechnungen absichtlich verzichtet. Zum einen werden diese Themen für gewöhnlich in der Schule ausführlich behandelt, andererseits liegt der kaum der Schwerpunkt auf Lehrveranstaltungen auf ihnen.[46]

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
$f'(x_0)$ als Steigung der Tangente (Grenzlage der Sekante)	
Ableitung von $f(x) = x^2$ über die Definition berechnet	vlg. Ü-Aufgaben
Ableitung $f(x) = \sqrt{x}$ über die Definition berechnet	siehe unten
Betragsfunktion auf Differenzierbarkeit untersucht	
$(\alpha f)' = \alpha f'$ über die Rechenregeln für Limiten hergeleitet + Bspe	
$(f+g)' = f' + g'$ zitiert, + Bspe	
Produktregel über Rechenregel für Limiten hergeleitet	
Quotientenregel zitiert	
$\tan'$ mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ hergeleitet	
Kettenregel hergeleitet	siehe unten
Beispiele zur Kettenregel	vgl. Ü-Aufgaben

Im Vorlesungsteil wurden die Linearität der Ableitung als Selbstverständlichkeit notiert – die Notation im Skriptum [70] S.141ff ist diesbezüglich genauer, der Differentialoperator wird nämlich selbst als (lineare Funktion) aufgefasst. Das Skriptum ist diesbezüglich recht umfangreich und exakt. Es kann durchaus noch im Lauf des ersten Semesters zum Nachlesen herangezogen werden.

Es noch kurz illustriert, mit welchem Exaktheitsgrad die Kettenregel hergeleitet wurde. Die Idee des Erweiterns ist für viele Funktionsklassen verallgemeinerbar, es muss nur eine Umgebung U von x_0 geben, sodass $f(x) \neq f(x_0)$ für alle $x \in U$ ist. Auf formale Details wurde verzichtet, da die Idee im Vordergrund stand.

45 Vergleiche die unklare Situation im Lehrplan, Abschnitt 2.3.2

46 Einerseits spielen diese Themen in der *Analysis* kaum eine Rolle, in der *Höheren Mathematik* werden sie andererseits ausreichend behandelt. Vielleicht macht es Sinn, im Skriptum diesbezüglich einen Abschnitt aufzunehmen, um gängige Fehler ($f''(x) \Leftrightarrow$ Wendepunkt; Untersuchung der Randpunkte wird vergessen) abzufedern.

Die Kettenregel wurde folgendermaßen hergeleitet:

f sei differenzierbar in x_0, g differenzierbar in $y_0 = f(x_0$. Was ist dann $(g \circ f)'(x_0)$?

Zunächst wird der Differenzenquotient angeschrieben und passend erweitert:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dann wird mit dem Grenzübergang $x \to x_0$ argumentiert, wodurch folgende Gleichung erhalten wird:

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

wobei g die äußere Funktion ist und f die innere Funktion.

Übungsbeispiele

Folgende Übungsbeispiele mussten bearbeitet werden:

- Über die Definition nachrechnen, dass $f(x) = x^3$ differenzierbar ist;
- Über die Definition nachrechnen, wo $\sqrt[n]{x}$ differenzierbar ist;
- Formel für n-te Ableitung von $f(x) = 1/x$ finden;
- Formeln für $(\sqrt{f(x)})'$ und $(\ln(f(x)))'$ finden;
- Zusammenhang von $(f^{-1})'(y)$ mit $f(x)$ über die Kettenregel finden (optional);
- Eine aus x^2 und x^3 an $x = 0$ gestückelte Funktion auf Differenzierbarkeit untersuchen (optional)

Die Übungsbeispiele behandeln typische Probleme (Grenzwertdefinition). Es soll den Studierenden zu vermittelt werden, dass grundsätzlich für das Berechnen der Ableitung mit Differentialquotient-Definition gearbeitet werden muss. Das folgende Beispiel schließt dazu direkt an den Vorlesungsteil (mit $f(x) = x^2$) an:

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Möglicherweise kann folgende Formel für $n \in \mathbb{N}$ helfen:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k \,.$$

Die im Beispiel für beliebiges n formulierte Formel zum Herausheben des Faktors $(x - y)$ soll dazu anregen, allgemein formulierte Aussagen auf konkrete Einzelfälle zu übertragen. Daneben soll die Summenschreibweise trainiert werden. Mit dieser Formel lässt sich zudem die Differenzierbarkeit von x^n nachzuweisen (Generalisierung). Durch das Analogie-Beispiel im Vorlesungsteil war das Niveau dieses Beispiels für einen Großteil der Studierenden passend.

Folgendes Beispiel stellte sich dagegen für viele Studierende als zu anspruchsvoll heraus:

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist. Was passiert an der Stelle $x_0 = 0$?

Hauptschwierigkeit dabei war es, den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0}$$

zu kürzen, obwohl eine erste Idee dazu in der Vorlesungseinheit[47] gebracht wurde. Das korrekte Umschreiben

$$x - x_0 = (\sqrt[n]{x})^n - (\sqrt[n]{x_0})^n$$

gelang nur einigen wenigen Studierenden, der Großteil hat die obige Idee ohne Überprüfung auf Korrektheit angewandt und dadurch falsch faktorisiert, z. B. $x - x_0 = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0})(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x_0})$.[48] Nun kann mit Hilfe der Faktorisierungsformel aus dem vorigen Beispiel faktorisiert werden. Das weitere Vereinfachen ist vom formalen Standpunkt aus vergleichsweise schwierig – die Summenschreibweise (mit allgemeinem n) muss gut verstanden sein, Analoges gilt dann für den Grenzübergang für x gegen x_0 und seine Auswirkung auf die Summe (wobei letztlich eine Kontrollmöglichkeit bleibt, indem man $(\sqrt[n]{x})'$ über die üblichen Rechenregeln berechnet).

Ein weiteres Beispiel sollte die Fähigkeit zur Verallgemeinerung trainieren:

> Finde eine Formel für die n-te Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Hinweis: Berechne die ersten paar Ableitungen und versuche ein Gesetz zu finden. Evtl. kann die sogenannte n-Faktorielle, also $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ helfen. Ein exakter Beweis mit vollständiger Induktion ist nicht nötig.

Die Definition der höheren Ableitung war – falls nicht bekannt – im Skriptum nachzulesen. Gleiches gilt für die Ableitung von $1/x$, falls nicht aus der Schule bekannt (Tabelle im Skriptum [70] S.163). Alternativ hätten die Studierenden die Quotientenregel anwenden können. Hauptschwierigkeit bei diesem Beispiel war, die Angabe richtig zu interpretieren und dann aus einigen berechneten Ableitungen auf das allgemeine Gesetz schließen zu können. Beim Vorrechnen der Aufgabe im Übungsbetrieb wurde $1/x$ als x^{-1} geschrieben, um den Studierenden die Idee des Umschreibens auf Hochzahlen (wieder) zu vermitteln.

Bei einer weiteren Aufgabe war eine Formel für $(\ln(f(x))'$ zu finden. Das stellt sich beim Integrieren als nützliche Formel heraus. Aus mathematischer Sicht wird zudem mit einer differenzierbaren, sonst aber unbekannten Funktion f gearbeitet, was das Platzhalterverständnis fordert und fördert.

Das abschließende (optionale) Übungsbeispiel sollte noch einmal auf die Gefahren des Differenzierens hinweisen, wenn man nur stur die Abbleitungsregeln anwendet, ohne dabei über deren Gültigkeit zu reflektieren:

> Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^3 & \text{für} x > 0 \end{cases}$$
>
> auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$ Ist die Funktion dort zweimal differenzierbar?

Mit Hilfe der Grenzwert-Definition der Differenzierbarkeit zeigt sich, was an der Stelle $x_0 = 0$ passiert. Eine Skizze von f' gibt darüber hinaus anschaulich Auskunft, warum f auf $\mathbb{R}$ nicht zweimal differenzierbar sein kann ($\to$ Ecke). Dieses Beispiel ist aus mathematischer Sicht deshalb so wertvoll, weil f eine Funktion ist, nicht unendlich oft differenzierbar ist. Das sollte auch für angehende Lehrkräfte ein interessantes Phänomen sein, das neugierig auf die mathematischen Inhalte des Studiums machen sollte.

47 Dass man $x - x_0$ als $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2$ bzw. $(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$ schreiben kann und danach mit dem Zähler des Differenzquotienten zu kürzen.

48 Es scheint so, dass Studierende kaum Nachrechnen, indem sie den Term wieder ausmultiplizieren.

Insgesamt hat sich bei der Thematik der Grenzwerte und der Differenzierbarkeit herausgestellt, dass für die Studierenden stärker betont werden muss: Diese Begriffe setzen immer die Betrachtung einer Umgebung von x_0 (d. h. ein offenes Intervall) voraus. Will man die üblichen Ableitungsregel verwenden, so muss man sicherstellen, dass um x_0 die Funktion durch die selbe Funktionsvorschrift definiert ist. Damit lässt sich der Fehler des punktuellen Ableitens, etwa bei $f(3) = 2 \Rightarrow f'(3) = (2)' = 0$, verringern.

Vergleich zwischen Grenzwert – Stetigkeit – Differenzierbarkeit

Im Anschluss an den Abschlusstest wurde noch einmal näher auf die Unterschiede zwischen Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit eingegangen, da die Vielfalt der Begriffe bei den Studierenden zum Teil für Unklarheiten gesorgt hatten. Der Zusammenhang der Differenzierbarkeit mit Grenzwerten war laut Rückmeldungen für einige Studierende nicht ausreichend nachvollziehbar. Es wurden jeweils die Kurzschreibweisen für die Limiten verwendet, und Skizzen von Beispiele und Gegenbeispielen gemacht. Zusätzlich wurde dann über den Ausdruck

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=:g(x)} = L \in \mathbb{R}$$

explizit eine Hilfsfunktion $g : D_f \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ formuliert. Das Vorgehen wurde mit $f(x) = x^2$ konkret vorgezeigt und skizziert, d. h. es wurde explizit die Sekantensteigung als Funktion dargestellt. g lässt sich dann stetig fortsetzen, $g(x_0)$ nimmt dann den Wert $f'(x_0)$ an. Das sollte die Zusammenhänge verdeutlichen.

12.10. Integralrechnung

Das Thema »Integralrechnung« wurde vergleichsweise schulnah und nach Möglichkeit so wenig abstrakt wie nötig aufgebaut. Durch unterschiedlichen Integralbegriffe in der *Analysis* und der *Höheren Mathematik* wäre eine intensive theoretische Behandlung des Themas mit Kompromissen behaftet. Daher wurde ein intuitiver Zugang ohne exakten Grenzwertbegriff gewählt.

Erstes Augenmerk lag auf der Unterscheidung zwischen unbestimmtem Integral (Stammfunktion) und bestimmtem Integral (Flächenmaß), weil in der Schule die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

oft eher als Definition statt als Satz präsentiert wird. Links steht der Ausdruck, der die Fläche misst, rechts die Differenz einer beliebigen Stammfunktion. Diese schulische »Definition« verschleiert dabei die Notwendigkeit eines Beweises (bzw. einer Begründung), dass der Vorgang des Flächenmessens mit der Auswertung einer Stammfunktion zusammenhängt.[49] Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist demnach die zentrale theoretische Aussage, die das Integrieren mit dem Differenzieren verbindet und wurde daher letztendlich als großes Resultat am Ende des theoretischen Teils angesiedelt.

49 Was zunächst überraschend ist. Fast noch überraschender ist die Tatsache, dass bei stetigen Funktionen diese Gleichung unabhängig vom verwendeten Integralbegriff ist, mit dem der Flächeninhalt gemessen wird.

Beim Integralbegriff wurde sinngemäß vom Riemannschen Integral[50] ausgegangen, da nur dieses in der Schule behandelt wird, wobei auf die üblicherweise in der Schule vorkommenden Begriffe Unter- und Obersumme verzichtet wurden, die bekanntlich im Sinne eines Sandwich-Arguments für die Konvergenz der Summe bzw. Reihe herangezogen werden (können). Aus Gründen der didaktischen Reduktion ist man den Studierenden eine Begründung der Konvergenz schuldig geblieben, ebenso wenig wurde deswegen die Stetigkeit der Funktion f betont, da diese Inhalte in den jeweiligen Vorlesungen ausreichend behandelt werden. Auf formale Grenzwertbetrachtungen (und damit mathematische Exaktheit) mit Ausnahme der Definition wurde diesbezüglich verzichtet, da es sich dabei hauptsächlich um vergleichsweise mühsame Beweise handelt. Das Verständnis konzeptuelle Verständnis würde dadurch nicht erleichtert werden, sondern eher erschwert, da die Grundidee (Approximation durch immer schmälere Rechtecksflächen) vom Zeitaufwand an Gewicht verliert.

Neben diesem theoretischen Zugang sollten die Studierenden gängige Rechenmethoden wie partielle Integration oder Substitution kennenlernen. Den Studierenden wurde zudem vermittelt, dass das Integrieren im Allgemeinen weniger systematisch als das Differenzieren ist und demnach mehr Erfahrungswissen benötigt.[51] Daher wurden vielfältige Beispiele vorgezeigt und als Aufgaben gegeben. Ziel kann aber nicht sein, die Studierenden auf das Berechnen von Integralen zu »trainieren« (etwa im Sinne der Generalsubstitution oder der Methode Partialbruchzerlegung für beliebig komplizierte rationale Funktion), sondern eher exemplarische Möglichkeiten aufzuzeigen. Studierende sollen durch diesen praxisnahen Zugang über ausreichend Vorwissen verfügen, um sich im Lauf des Semesters auf die theoretischeren, exakteren Zugänge konzentrieren zu können und sich nicht auf das »Rechnen« konzentrieren zu müssen.

inhaltlicher Aufbau

Inhalt	Anmerkung
Definition einer Stammfunktion über $F' = f$ + Bspe	
Satz zitiert: Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch ein C	
Schreibweise für das unbestimmte Integral eingeführt	vgl.Ü-Aufgaben
Linearität des unbestimmten Integrals bewiesen	
Fläche unter Kurve f durch Approximation mit Rechtecken	
Riemannsches Integral als Grenzwert eingeführt	
Hauptsatz der Differential und Integralrechnung mit Herleitung	vgl. unten
Flächeninhalt per Hauptsatz bestimmt $f(x) = (x-1)^2 - 4$ zwischen $a = -2$ und $b = 4$, inkl. Thematisieren des Vorzeichens des Flächeninhalts	vgl. Ü-Aufgaben
Substitutionsregel, partiellen Integrieren hergeleitet	
Beispiele zu diesen Rechentechniken gegeben, etwa $x \cdot \mathrm{e}^x$, $1 \cdot \ln x$, $2t \cdot (t^2-2)^2$, $x \cdot \mathrm{e}^{(x^2)}$, $\frac{3}{3x-1}$, $(4t-5)^{3/2}$. Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x))$ hergeleitet.[52]	vgl. Ü-Aufgaben
»Technikerregel«: $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ liefert $\mathrm{d}x = \varphi'(t) \cdot dt$	vgl. unten

Die anschauliche Begründung für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung orientiert sich eng am Skriptum und sei hier kurz dargestellt. Im Wesentlichen ist diese »Herleitung« schultauglich:

50 Auch in der *Höheren Mathematik* wird nur das Riemannsche Integral behandelt. In der *Analysis* wird dagegen in $\mathbb{R}$ das Cauchy-Integral eingeführt. Die Idee, die Fläche zu approximieren, ist bei allen Integralbegriffen vorhanden, wodurch durch die Behandlung des Riemannschen Integrals keine »falsche« wenig tragfähige Grundidee vermittelt. Daher ist der Zugang mit dem Riemannschen Integral auch für Bachelor-Studierende kein grundlegendes Hindernis bei der Einführung des Cauchy-Integrals im Rahmen der *Analysis 1 VO*.

51 Das schulische Vorwissen ist offenbar durchaus unterschiedlich. In Höheren Technischen Lehranstalten (HTL) werden kaum Integrale händisch gelöst. Stattdessen benützt man CAS-fähige Taschenrechner, etwa TI 92 (PLUS) oder Voyage. Dagegen sind bei UE-Klausuren an Uni Graz meist nicht einmal Taschenrechner mit einzeiliger Ausgabe erlaubt.

52 Das der Logarithmus nur positive Argumente benötigt, wurde in diesem Zusammenhang nicht thematisiert – ebensowenig die Problematik von Polstellen sowie uneigentliche Integrale generell. Das wird für gewöhnlich in den Vorlesungen ausreichend thematisiert und liegt außerhalb der zeitlichen und mathematischen Möglichkeiten in einem zweiwöchigen Brückenkurs.

Man führt zunächst $I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ als jene Funktion ein, die die Fläche unter f zwischen a und x misst, mit $a \geq x$.

Man untersucht dann die Differenz $I(x+h) - I(x)$ und stellt anschaulich fest, dass sich dieser Flächeninhalt sehr gut durch den Flächeninhalt des Rechtecks mit Grundkantenlänge h und Länge der Höhe $f(x)$ approximieren lässt.[a] Man erhält damit also:

$$I(x+h) - I(x) \approx f(x) \cdot h\,.$$

Umformen auf den Differenzenquotienten liefert

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} \approx f(x)\,,$$

wodurch beim Grenzübergang $h \to 0$ der Ausdruck

$$I'(x) = f(x)$$

erhalten wird. Damit ist I eine Stammfunktion zu f. Weiters gilt dann, dass $I(b)$ die Fläche unter f zwischen a und b ist. Ist nun F eine beliebige weitere Stammfunktion von f, so gibt es laut dem zuvor erarbeiten Satz ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = I(x) + c$. Damit erhält man

$$F(b) - F(a) = (I(b) + c) - (I(a) + c)) = I(b) - I(a) = I(b)\,,$$

da $I(a) = 0$ ist, was durch die Definition von I anschaulich klar ist.

a Gleichheit würde man mit einem passenden $x^* \in (x, x+h)$ wegen der Stetigkeit von f erhalten.

Der Grund, warum nicht zumindest ein bestimmtes Integral über Riemannsummen berechnet wurde, ist der folgende: Schon bei sehr einfachen Funktionen wie $f(x) = x^2$ ist damit ein hoher zeitlicher und rechnerischer Aufwand verbunden, der nur selten in Vorlesungen im Studium betrieben wird. Aus fachlicher Sicht wäre es natürlich sinnvoll, ein Fläche über die Grenzwertdefinition zu bestimmen, um dadurch den Wert des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu verdeutlichen.[53]

Damit man sich unter den Strenge der Beweise z. B. der Substitution etwas vorstellen kann:

Ist $F' = f$ und ist ϕ differenzierbar, so gilt wegen der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,.$$

Integration liefert dann

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t)\,.$$

Im Anschluss daran wurde die »Technikerregel« eingeführt, die wegen $\varphi(t) = x$ und damit $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$ mit anschließender »Multiplikation« mit dt die Formel

$$\int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x}) \cdot \underbrace{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

liefert.

Das Grundverständnis zielte darauf ab, die inneren Ableitungen zu erkennen und die Funktionen passend

53 Sinnvoll wäre es wohl, dazu einen Abschnitt in das Skriptum aufzunehmen und im Rahmen einer »Lese-Aufgabe« in den Brückenkurs einzubauen.

zu wählen, z. B.

$$\int (t^2-2)^2 \cdot 2t \,\mathrm{d}t = \int (\underbrace{t^2-2}_{\varphi(t)})^2 \cdot \underbrace{2t}_{\varphi'(t)} \,\mathrm{d}t = \ldots$$

mit $f(x) = x^2$ erhält man $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ und damit[54]

$$\ldots = F(\varphi(t)) = F(t^2-2) = \tfrac{1}{3}(t^2-2)^3 + C\,.$$

Übungsaufgaben

Folgende Übungsaufgaben waren zu bearbeiten:

- Fläche zwischen zwei Funktionen $\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4}x)$ und x^4-1 bestimmen;
- Stammfunktionen zu einfachen rationalen Funktionen und $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{x-2}{x^2-4x}$ finden;
- Einige Beispiele, die Substitutionsregel oder partielle Integration benötigen, z. B. $e^x\sin(x)$, $x\ln(x)$, $\frac{4x}{3}e^{x^2+1}$, $\cos^2(x)$.
- Ein anspruchsvolleres Beispiel eines bestimmten Integrals zu rationalen Funktionen $\frac{5-x}{1-x^2}$ gegeben, das Partialbruchzerlegung benötigt. Der Hinweis auf die Partialbruchzerlegung wurde gegeben.

Im Wesentlichen waren alle Ideen, die bei diesen Übungsbeispielen benötigt wurden, aus dem Vorlesungsteil bekannt. Hauptschwierigkeit für die Studierenden war trotzdem, zu entscheiden, wann welche Methode zu verwenden ist – was auch rückgemeldet wurde. Offenbar waren die Beispiele aus der Vorlesung bzw. die Beispiele im Skriptum [70] S.157ff nicht ausreichend, den Studierenden den Umgang mit den Techniken in einer Form zu demonstrieren, dass diese Techniken weitgehend unproblematisch und selbstverständlich auf die entsprechenden Aufgaben angewandt werden können. Beim Beispiel $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ hatte nur rund 75% der Studierenden einen sinnvollen Ansatz vorzuweisen, beim Beispiel mit der Partialbruchzerlegung war es nur die Hälfte.[55] Da erfahrungsgemäß auch noch im Lauf des ersten Semesters Probleme mit den Wahl der Methode existieren, verwundert das in der knappen Zeit des Brückenkurs nicht.

54 Es wurde (im Rahmen des didactic contract) abgesprochen, aus ergonomischen Gründen erst beim Ergebnis die sogenannte Integrationskonstante zu ergänzen.

55 Die Partialbruchzerlegung wird sowohl in der *Höheren Mathematik*, als auch in der *Analysis* umfassend behandelt. Dieses Beispiel kann somit als erste Berührung mit der Thematik verstanden werden. Der Anspruch des unmittelbaren Beherrschens dieser Integrationstechnik ist damit nicht notwendig.

12.11. Vektoren und Vektorräume

Das Thema »Vektoren und Vektorräume« wurde aus Zeitgründen (letztes Thema im Brückenkurs) nur gestreift, auch weil für die Lehramtsstudierenden die Lineare Algebra kein Themengebiet des ersten Studienjahres ist. Die Bachelor-Studierenden steigen dagegen (zusätzlich zur *Analysis*) auch mit der *Linearen Algebra* ins Studium ein, vgl. Abschnitt 3.3. Inhaltlich wurden im Kurs de facto nur die Verknüpfungen definiert und an Beispielen im $\mathbb{R}^2$ vorgeführt, damit die Studierenden, die noch nie etwas von Vektoren gehört haben[56], ein erstes, intuitives Verständnis davon haben.

Inhalt	Anmerkung
Spaltenvektor im $\mathbb{R}^n$ mit Komponenten x_i definiert	
Beispiele im $\mathbb{R}^2$ inkl. geometrischer Veranschaulichung	
Addition im $\mathbb{R}^n$ definiert, + Bspe im $\mathbb{R}^2$	
Multiplikation mit Skalar im $\mathbb{R}^n$ eingeführt + Bspe im $\mathbb{R}^2$	
Linearkombination definiert, + Bspe im $\mathbb{R}^2$ inkl. geometrischer Veranschaulichung	

Übungsaufgaben wurden aus Zeitgründen keine gegeben, da verstärkt auf die Integralrechnung Wert gelegt wurde. Das Skriptum [70] S.86ff baut das Thema dagegen recht ausführlich auf – bei einer recht zugänglichen (besonders im Vergleich zu den typischen Lehrbüchern zur Linearen Algebra) Mischung aus Abstraktion, Exaktheit, Verallgemeinerungsfähigkeit und geometrischer Anschaulichkeit.[57]

56 Im Schultyp HAK (Handelsakademie) sind Vektoren kein verpflichtender Lehrinhalt.

57 Der Aufbau im Skriptum ist folgender: Vektoren werden vom $\mathbb{R}^2$ über den $\mathbb{R}^3$ zum $\mathbb{R}^n$ als Tupel von reellen Zahlen eingeführt. Sämtliche Rechenoperationen werden für den $\mathbb{R}^n$ definiert, aber sogleich an Beispielen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ konkretisiert. Im Hinblick auf die abstrakten Strukturen wird versucht, die gruppentheoretische Nomenklatur (z. B. Rolle des Nullvektors) zu vertiefen. Das Distributivgesetz wurde als Satz aus der Definition der Verknüpfungen hergeleitet (und damit nicht als Vektorraumaxiom vorangestellt). Die geometrischen Veranschaulichungen (Vektoren als Pfeile) wurden in ein eigenes Unterkapitel nachgestellt, um die Studierenden zunächst an den anschauungslosen Zugang zu gewöhnen. Ebenen und Geraden werden als besondere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert, schultypische Aufgabenstellungen im Hinblick auf analytische Geometrie wurden ausgelassen, um kein »falsches« Bild dieses Themengebiets zu motivieren.
(Euklidische) Norm sowie (euklidisches) inneres Produkt wurden im Anschluss eingeführt, die üblichen Eigenschaften (z. b. Dreiecksungleichung usw.) zum Teil auch bewiesen. Ziel war die Anschlussfähigkeit im Studium, besonders für interessierte Bachelor-Studierende, damit dann im Lauf des Semesters Definitionen nicht wieder umgelernt werden müssen. Der Zusammenhang des euklidischen inneren Produkts mit dem anschaulichen Winkel wurde über den Kosinussatz hergeleitet. Im $\mathbb{R}^3$ wurde darüber hinaus auch das Kreuzprodukt eingeführt, einige Eigenschaften zitiert. Als interessantes Resultat wurde auch bewiesen, dass durch die Norm von $a \times b$ der Flächeninhalt des dadurch aufgespannten Parallelogramms gegeben ist.
In einem weiteren Kapitel gibt es einen (mathematisch anspruchsvolleren) Ausblick auf abstrakte Strukturen: Vektorraumaxiome und lineare Unabhängigkeit, sowie Lineare Abbildungen in Form von Matrizen. Dieses Kapitel sollte die Studierenden neugierig auf die weiteren Inhalte machen – oder unter Umständen auch als kleines Nachschlagwerk für die ersten Wochen der Lineare Algebra Vorlesung dienen.

Teil IV.

Evaluierung des Brückenkurses

Um es noch pointierter zu sagen: Das Vorhandensein didaktischer Institutionen darf nicht zu der Illusion verführen, Lernschwierigkeiten und Leistungsdefizite könnten oder müssten prinzipiell durch Fördermaßnahmen behoben werden.

Lisa Hefendehl-Hebeker in [2], S.8.

In diesem Teil IV dieser Arbeit werden die Ergebnisse der Evaluierung des Brückenkurses im WS 12/13 dargestellt. Die Wirkung des Brückenkurses wurde auf mehren Ebenen (inhaltlich, methodisch, motivational), aber auch zu mehreren Zeitpunkten (vor, nach dem Kurs, nach dem ersten Semester) verfolgt. Tab. 12.2 zeigt die Maßnahmen, Abb. 12.1 ihre zeitliche Anordnung.

Tab. 12.2.: Maßnahmen zur Evaluierung: BK: Brückenkursteilnehmende, LA: alle Lehramtsstudierenden (1. Semester)

Nr	Maßnahme	wer	Beschreibung
1	P & P-Orientierungstest	BK	Vorwissen, allgemeine Erhebungen
2	schriftl. Abgaben der Übungsaufgaben	BK	Feststellung des Lernfortschritts
3	P & P-Abschlusstest	BK	fachliche Leistungen, Leistungszuwachs
4	P & P-Feedbackbogen	BK	Rückmeldungen zum Brückenkurs
5	Online-Feedbackbogen	LA	Rückmeldungen zum 1. Semester
6	LV-Noten (UGO)	LA	fachliche Leistungen

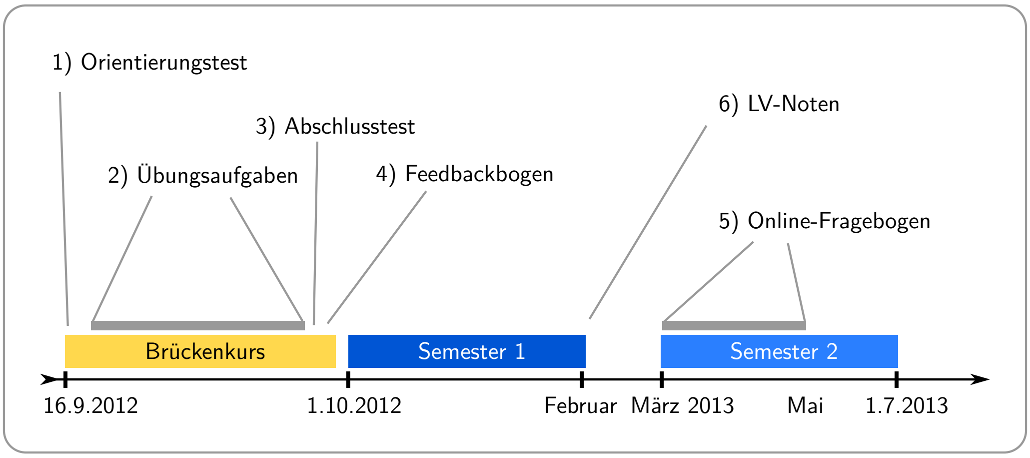


Abb. 12.1.: Zeitliche Übersicht der Maßnahmen

13. Orientierungstest

In der ersten LV-Einheit des Brückenkurses fand ein Orientierungstest (Dauer: 50 Minuten) statt, der für einen positiven Kurs-Abschluss mitgeschrieben werden musste. Hilfsmittel oder Unterlagen waren nicht erlaubt. Der Test wird nachfolgend im Detail vorgestellt sowie eine qualitative bzw. quantitative Auswertung dargestellt.

Der Test hatte im wesentlichen folgende Ziele für den Kursleiter: Neben einer Bedarfserhebung für die Inhalte (durch Selbsteinschätzung der Kursteilnehmenden sowie durch Aufgaben zu grundlegenden Inhalten der Schulmathematik) sollte eine Erhebung der Schulnoten dazu beitragen, abschätzen zu können, von welchem Niveau ausgegangen werden darf. Darüber hinaus sollten Aufgaben zur Rechenfertigkeit (Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Wurzeln) abprüfen, in wie weit diese Fertigkeiten vorausgesetzt werden dürfen. Da der paper-pencil-Test ein diagnostisches Potenzial der mathematischen Leistungen haben sollte, wurden keine geschlossenen Aufgabenformate verwendet. Daneben sollten noch Fragen zur Studienwahl einen Eindruck vermitteln, welche Motivationsgründe (und evtl. *beliefs*) bei den Kurseilnehmenden vorliegen. Daneben hat der Orientierungstest auch naheliegende Ziele für die Kursteilnehmenden: Sie sollten abklären, in wie weit ihr Vorwissen vorhanden ist und auch feststellen, wo noch Lücken sind. Der Orientierungstest findet sich im Anhang D.1.

13.1. Allgemeine Erhebungen

Erhebung der Studien und Schultypen

Es stellte sich heraus, dass die Kursteilnehmenden fast zu je gut einem Viertel den Schultyp Gymnasium, Realgymnasium und HAK besucht haben. Andere Schultypen (HLW, HTL, BAKIP) waren dagegen kaum vertreten.[1] Insbesondere die kleine HTL-Gruppe überrascht, da im Studium durchaus ein größerer Anteil diesbezüglich vertreten ist. Von den 50 Studierenden, die den Kurs abgeschlossen hatten, waren 39 Lehramtsstudierende und 11 Bachelor-Studierende.

Niveauerhebung

Das grundlegende Niveau der Studierenden sollte neben dem Abschneiden bei den Aufgaben des Oriertierungstests auch durch zwei weitere Kenngrößen abgefragt werden:

- Bei der Frage, ob die Studierenden in Mathematik schriftlich oder mündlich die Reifeprüfung abgelegt hatten (»maturiert haben«), zeigt sich folgendes Bild: Drei Viertel der Studierenden haben schriftlich maturiert, knapp die Hälfte mündlich.[2] Eine kleine Minderheit hat weder schriftlich noch mündlich maturiert. Dadurch, dass der Großteil in irgend einer Form maturiert hat, kann davon ausgegangen werden, dass sich diese Kursteilnehmenden in ihrer letzten Schulstufe noch einmal intensiv (nahezu) sämtlichen Gebieten der Oberstufenmathematik gewidmet haben.
- Daneben wurde die durchschnittliche Schulnote in Mathematik in der Oberstufe abgefragt: Es zeigt sich an den Noten, dass die Studierenden ganz klar zum oberen Leistungsniveau[3] in der Schule gehören: Etwa 40% der Studierenden hatten als durchschnittliche Note in der Oberstufe ein *Sehr Gut*, ebenso viele ein *Gut*, der Rest ein *Befriedigend*.[4] Zwischen den Noten von

1 HLW: Höhere Bundeslehranstalt für wirtschaftliche Berufe, HAK: Handelsakademie, BAKIP: Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik, HTL: Höhere Technische Lehranstalt. Gymnasium und Realgymnasium sind bei der AHS zuzuordnen.
2 Ein Teil der Studierenden hat sowohl schriftlich, als auch mündlich maturiert.
3 Das setzt natürlich voraus, dass die Schulnote in jeder Klasse auch tatsächlich die Leistung adäquat misst.
4 Ein Befriedigend hatten nur SchülerInnen aus dem Schultyp Gymnasium.

Lehramtsstudierenden und Bachelorstudierenden im Brückenkurs zeigt sich kaum ein Unterschied. Aufgrund der in Teil I sowie II dieser Arbeit dargestellten Problematiken darf dadurch nicht davon ausgegangen werden, dass gute Noten eine hohe mathematische Kompetenz implizieren.

Bedarfserhebung für Inhalte

Mit der Frage »Wurden diese Themengebiete in der Schule ausreichend behandelt?« sollte ohne großen Aufwand der (besondere) Bedarf für Inhalte abgefragt werden, um im weiteren Kursverlauf evtl. darauf eingehen zu können. Die folgende Tabelle 13.1 zeigt das Ergebnis in Prozent:

Tab. 13.1.: Bedarfserhebung für Brückenkursinhalte beim Orientierungstest (Angaben in %)

In der Schule ausreichend behandelte Themengebiete	Ja	nein
(Aussagen-)Logik	12	84
Komplexe Zahlen	26	72
Vektoren (z. B. Skalares Produkt)	60	38
Ungleichungen (z. B. mit Beträgen)	42	58
Differentialrechnung (z. B. Kettenregel)	90	10
Integralrechnung (z. B. Substitution)	76	20
Folgen (z. B. Monotonie)	48	50
Reihen (z. B. Konvergenz)	26	74

Wie zu erwarten war, wurde das Themengebiet (Aussagen-)Logik an sich durchwegs nicht ausreichend behandelt (vgl. 2.3). Es war von vornherein geplant, dass die erste Einheit gleich nach dem Orientierungstest mit diesem Themengebiet starten sollte.

Das Themengebiet Komplexe Zahlen wurde dagegen etwas überraschend kaum ausreichend behandelt, besonders in der HAK. Das Themengebiet der Vektoren wurde bis auf den Schultyp HAK durchwegs ausreichend behandelt.[5]

Größere Lücken gab es noch beim Thema Ungleichungen sowie bei Folgen und besonders bei Reihen. Dagegen bewerten die Studierenden ihr Vorwissen bei der Differentialrechnung am besten (90% ausreichend behandelt), gefolgt von der Integralrechnung (76 %).

Erhebung der Motivation und Studiengründe

Häufig wird angehenden Lehramtsstudierenden an der Uni Graz zumindest in den letzten Jahren unterstellt, dass sie kein Interesse am Fach haben, sondern sich nur an den guten Jobchancen orientieren. Dieses Vorurteil konnte zumindest für die Brückenkurs-Teilnehmenden in dieser Allgemeinheit widerlegt werden.[6] Die Frage lautete »Entscheidungsgrund für Studienwahl« (49 Nennungen): 57% geben »Interesse« an, bei 16 % war es das Lieblingsfach in der Schule, 14 % wollen Lehrkraft werden, 12 % hatten Spaß an Mathematik in der Schule, der Rest hatte gute Noten oder eine gute Lehrkraft. 6 % gaben die guten Jobaussichten als Grund an.

Bei der offenen Frage »So habe ich mich über das Studium informiert:« zeigte sich folgende Verteilung: 83 % der Studierenden haben sich über das Internet[7] informiert, 25 % durch Beratungsangebote

5 Da im Brückenkurs nur 4 Bachelorstudierende mit dem Schultyp HAK teilgenommen haben, wurde Vektorrechnung nicht sehr ausführlich behandelt, vgl. Abschnitt 12.11.

6 Nichts desto trotz lassen die sehr allgemein gehaltenen Antworten wie »Interesse« kaum eine Einschätzung zu, in wie weit die *beliefs* und die Vorstellungen von Mathematik und dem Studium mit dem tatsächlichen Studium verträglich sind und wie sich die *beliefs* im Laufe des ersten Semesters entwickeln.

7 Bedauerlicherweise wurde nicht näher ausgeführt, welche Webseiten besucht wurden.

(Erstsemestrigenberatung etc.), 16% durch die Lehrkraft, 16 % durch Freunde und Bekannte. Insgesamt ist davon auszugehen, dass die Brückenkursteilnehmenden durch aus gut im Vorfeld informiert waren. Nichtsdestotrotz kann und soll der Brückenkurs die Vorstellung vom Studium konkretisieren.

Teilnahmegrund

Die Frage »Das war der Hauptgrund, warum ich am Brückenkurs teilgenommen habe (inkl. Erwartungen, Hoffnungen, ...)« wurde zwar erst im Fragebogen am Semesterende (vgl. Kapitel 16) gestellt, passt inhaltlich aber besser an den Beginn des Brückenkurses. Die Antworten auf diese Frage lassen sich grob in vier Bereiche gliedern, wovon sich einige natürlich bis zu einem gewissen Grad überschneiden. Im Wesentlichen entsprechen die Motivationen der Teilnahme den Erwartungen des Kursteilers.

- Lücken aus Schule sollen geschlossen werden

  Aussagen wie »Da ich eine Handelsakademie besucht habe und nicht die beste Lehrkraft hatte, war mir klar, dass ich stofflich hinter StudentInnen einer AHS liege.« fallen in diese Kategorie.

- Wiederholung und Auffrischung des Stoffes

  Einige Studierenden gaben Antworten wie »Wiederholen von Inhalten, die in der Schule evtl. schon behandelt wurden, kann nicht schaden!«

- Einblick in das Studium

  Daneben gab es auch Studierende, die einen Einblick in das Mathematik-Studium im Vorfeld erhalten wollten, beispielsweise »Ich hatte mir gehofft, schon mal einen Einblick in das vor mir liegende Studium zu bekommen.«

- Sprung zwischen Schule und Universität ist bekannt und soll vermindert werden.

  Einige Studierenden waren darüber informiert, dass sich die Hochschulmathematik von der Schulmathematik (auch im Lehramtsstudium) unterscheidet und erwarteten sich eine Erleichterung beim Einstieg: »Ich erhoffte mir dadurch, dass der Einstieg in die UNI-Mathematik leichter sein würde – ich wusste bereits, dass es eine Spalte im Bezug auf die unterschiedlichen Niveaus gibt.«

13.2. Analyse der Aufgaben

Im Folgenden werden nun die fünf Aufgaben des Orientierungstestes im Detail vorgestellt sowie die Ergebnisse analysiert und diskutiert:

Bsp 1 Algebraische Rechenkompetenz: Termumformung (Hochzahlen, Brüche, Wurzeln)
Bsp 2 Nullstellen Polynom dritten Grades finden
Bsp 3 (unterbestimmtes) Gleichungssystem lösen (unendlich viele Lösungen)
Bsp 4 Funktionsgraph skizzieren
Bsp 5 eine Funktion Differenzieren und Integrieren

Aufgabe 1: Algebraische Rechenkompetenz

Die erste Aufgabe sollte die algebraische Rechenkompetenz der Kursteilnehmenden abprüfen:

Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{(x^2-8)\cdot(-\frac{1}{3})^2}{3^{-1/2}} : \frac{\sqrt{27}\cdot(x^2-2\sqrt{32}+18)}{x-2\sqrt{2}} = \dots$$

Durch einen Angabefehler in der Aufgabe[8] hat sich der Term nicht wesentlich vereinfachen lassen. Die Ergebnisse sind daher nicht aussagekräftig, da Studierende zum Teil davon ausgegangen sind, dass etwas einfaches herauskommen muss (*didactic contract* der Schule), wodurch sie sich in lange Rechnungen (Ausmultiplizieren) verrannt haben. Nichtsdestotrotz scheinen durchaus algebraische Fertigkeiten verfügbar zu sein.

Aufgabe 2: Nullstellen eines Polynoms 3. Grades

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind alle ganzzahlig: $\mathbb{L} = \{1, 3, -2\}$. Alle Lösungen wären demnach als Teiler des konstanten Gliedes durch Probieren bestimmbar gewesen.

Etwa 60 % der Studierenden haben eine erste Nullstelle durch »Erraten« bestimmt. Die nachfolgende Polynomdivision haben nur mehr 40 % geschafft. Häufiger Fehler war es, den Linearfaktor $(x + x_1)$ statt $(x - x_1)$ abspalten zu wollen. Fast alle Studierenden, die die Polynomdivision geschafft haben, haben auch die quadratische Lösungsformel korrekt verwendet. Der Großteil der Studierenden, die das Beispiel gelöst haben, hat dieses Vorgehen genutzt. Einige wenige Studierende haben die Polynomdivision durch das Horner-Schema (korrekt) berechnet. Eine Person hat sämtliche Nullstellen »erraten«.

Die restlichen 40 % der Studierenden hatte offenbar kein zielführendes Verfahren zur Lösung von Polynomgleichungen dritten Grades. Typische Fehler waren die Umformung zu

$$x \cdot (x^2 - 2x - 5) = -6$$

und nachfolgend falsche Umformungsschritte (z. B. nur links Division durch x; oder Anwendung des Produkt-Null-Satzes, wobei statt -6 einfach 0 geschrieben wurde). Zum Teil wurde die Gleichung auch als Aufforderung für eine Kurvendiskussion gesehen. Die Studierenden gaben sich dann mit dem Hinschreiben von $3x^2 - 4x - 5 = 0$ sowie $6x - 4 = 0$ zufrieden.

Immerhin lässt sich feststellen, dass zumindest 40 % der Brückenkurs-Studierenden vor dem Kurs fähig sind, Polynomgleichungen dritten Grades händisch zu lösen. Allerdings darf man dabei nicht vergessen, dass rund 40 % der Studierenden ein »Sehr Gut« bzw. rund 40 % der Studierenden ein »Gut« als durchschnittliche Note angegeben haben.[9]

Aufgabe 3: Gleichungssystem lösen

Ziel dieser Aufgabe war es, festzustellen, ob die Kursteilnehmenden auch über ein Verständnis für das Lösen von linearen Gleichungssystemen und die Anzahl der Lösungen verfügen. Deswegen wurde absichtlich *kein* eindeutig lösbares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten gewählt.

Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 & \quad (I) \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 & \quad (II) \end{array}$$

8 Es hätte $(x^2 - 2\sqrt{32} + 16)$ statt $(x^2 - 2\sqrt{32} + 18)$ lauten müssen, dann hätte sich viel kürzen lassen.
9 Dadurch stellt sich die Frage, ob solche Aufgaben im Unterricht nicht behandelt wurden oder ob die Lösungsmethode seit Schulende wieder vergessen wurde.

Die Lösungshäufigkeit bei diesem Beispiel war überraschend gering: Nur die wenigsten Studierenden konnten damit umgehen, dass nur zwei Gleichungen in drei Unbekannten gegeben waren. Das verdeutlicht ein Kommentar einer Person: »Das Lösen ist nicht möglich, weil da eine dritte Funktion fehlt!«

Nur eine einzige (!) Person (von 50!) hat es geschafft, alle Lösungen anzugeben (x und z wurden durch den Parameter y ausgedrückt, es wurde sogar die Probe gerechnet). Allerdings wurde die Lösungsmenge nicht konkret angegeben. Nur etwa 20 % der Studierenden haben eine einzige (vermeintliche) Lösung angegeben.

Rund 80 % der Studierenden haben »wild bzw. blind« darauflosgerechnet, offenbar in der Hoffnung, dass sich nach und nach Variablen eliminieren und man dadurch auf die konkrete Lösung kommt. Da beim ersten Eliminierungsschritt nur eine Variable wegfällt, haben diese Studierenden verschiedene Kombinationen verwendet und dadurch mehrere Gleichungen erhalten. Den Studierenden war nicht bewusst, dass sich beim Lösen eines Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen nicht verändern darf. Das zeigt sehr deutlich, wie das in der Schule automatisierte Verfahren, bei dem nicht das gesamte Gleichungssystem angeschrieben wird, den eigentlichen Zweck und das Verständnis des Eliminierens verhindert. Andere Studierende haben sowohl y durch x und auch gleichzeitig x durch y ausgedrückt und diese Gleichungen dann unterstrichen. Das macht in dieser Form noch keinen Sinn.

Nur den wenigsten Studierenden war offenbar bewusst, dass dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzen muss. Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass ein solches Gleichungssystem beim Schneiden zweier (nicht paralleler) Ebenen im $\mathbb{R}^3$ auftritt. Dabei erhält man eine Gerade als Schnittmenge, wodurch eine einparametrige Lösungsmenge herauskommen muss. Das schlechte Abschneiden ist umso drastischer, wenn man bedenkt, dass das »Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen« explizit (zumindest im Lehrplan der AHS) angeführt ist (vgl. Abschnitt 2.3).

Durch diese Aufgabe wurde die bereits im Vorfeld getroffene Entscheidung durch den Orientierungstest bestätigt, das Lösen von linearen Gleichungssystemen (und nicht nur zwei Unbekannte, zwei Gleichungen) in den Brückenkurs aufzunehmen.

Aufgabe 4: Funktionsgraph skizzieren

Dieses Beispiel sollte abprüfen, welches Verständnis die Kursteilnehmenden für die Funktionsvorschrift bzw. den Funktionsgraphen einer Funktion besitzen. Es wurde absichtlich keine Polynomfunktion gewählt, da bei solchen Funktionen davon auszugehen ist, dass die Studierenden eine Kurvendiskussion durchführen (was vermieden werden sollte[10]).

Skizziere die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{für } x > 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Graphen, abschnittsweise definierte Funktionen (fünfte Schulstufe), Potenzfunktionen (und damit Wurzelfunktionen) sowie Verkettungen von Funktionen (sechste Schulstufe) sind im Lehrplan der AHS vorgesehen, vgl. 3.3.2. Dahingehend war dieses Beispiel mit Schulwissen lösbar, was sich allerdings nicht in den Lösungshäufigkeiten widerspiegelt:

Nur drei der 50 Studierenden (6%) haben eine vollständig korrekte Skizze des Funktionsgraphen angegeben, bei der sowohl die Krümmung als auch die Asymptoten bzw. das asymptotische Verhalten der Äste korrekt wiedergegeben wurden. Diese Studierenden haben keine Wertetabelle gemacht.

Rund 50% der Studierenden haben eine Wertetabelle erstellt und dabei je nach x-Wert die passende Funktionsvorschrift gewählt. Rund die Hälfte dieser Studierenden hat es geschafft, eine großteils passende Skizze daraus zu erstellen. Hauptproblem war es, dass Funktionswerte nahe an 3 nicht berücksichtigt wurde und daher der Graph rund um $x = 3$ deutliche Lücken aufwies. Insbesondere scheint die Wertetabelle mit nur wenigen (schlecht gewählten) x-Werten daran hinderlich zu sein, die Asymptoten

10 Ein »Schema F« rechnen zu können ist kaum ein Hinweis auf Verständnis.

zu erkennen. Die Studierenden, die keine weitgehend richtigen Äste gezeichnet haben, sind an der »Interpolation« der Punkte gescheitert: Zum Teil wurde versucht, Geraden durchzuzeichnen, zum Teil wurde eine falsche Krümmung gezeichnet. Auffällig beim $\frac{1}{x-3}$-Ast war, dass dieser Ast bei etlichen Studierenden für $x < 3$ positive Werte annehmen konnte und die x-Achse überschritt.

Bei den restlichen Studierenden (fast 45%) war kein erkennbarer, systematischer Ansatz feststellbar. Insgesamt kann also nicht davon ausgegangen werden, dass Studierende eine Hyperbel oder eine Wurzelfunktion qualitativ zeichnen können. Es scheint, als ob sich die Studierenden nie richtig mit dem Skizzieren von Graphen auseinander gesetzt hätten und sie praktisch keine Hilfsmittel zur Vorstellung dazu haben. Das schlechte Ausfallen dieses Beispiels zeigte umso deutlicher, dass auf ein anschauliches Verständnis von Funktionen bzw. deren Graphen explizit eingegangen werden muss.

Aufgabe 5: Differenzen und Integrieren

Ziel dieser Aufgabe war es, die Rechenkompetenz im Zusammenhang mit dem Differenzieren bzw. Integrieren abzuprüfen.

Bestimme sowohl die erste Ableitung als auch eine Stammfunktion zur Funktion f:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-4)^3}}$$

Welche geometrische Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion?

Es zeigt sich, dass das Berechnen der Ableitung deutlich häufiger geschafft wurde als das Berechnen der Stammfunktion (rund 34 % vs. 12 %). Die Studierenden, die nicht einmal die Ableitung richtig berechnet haben, sind großteils an der Kettenregel bzw. dem Ableiten von $\frac{1}{(x-4)^3}$ gescheitert. Die Studierenden, die das Ableiten erfolgreich zu Ende geführt haben, haben folgende Berechnungswege gewählt:

- Variante A: Der einfachere Weg war es, $f(x)$ auf

  $$(x-4)^{-3/2}$$

  umzuschreiben und danach die Regel $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ anzuwenden, da die innere Ableitung 1 ergibt. Ein analoges Vorgehen war beim Integrieren möglich, was diese Studierenden auch gemacht haben. Zum Teil wurde beim Integrieren explizit noch eine Substitution $z = x - 4$ verwendet.
- Variante B: Anwendung der Ableitungsregel für die Wurzel, Kettenregel sowie Quotientenregel. Diese Studierenden konnten die Rechenregeln für Hochzahlen nicht ausreichend anwenden, um die Funktion zu vereinfachen. Das zeigte sich auch beim Ergebnis der Ableitung: Häufig wurden die Potenzen von $(x-4)$ nicht vereinfacht, wodurch die Studierenden nicht erkannt haben, dass sich fast nur die Hochzahl von $(x-4)$ ändert. Das Beispiel wurde als richtig berechnet gewertet, auch wenn die Potenzen am Ende nicht vereinfacht wurden. Die Mehrheit der Studierenden hat die Variante B gewählt, bei der ohne Umformen direkt bekannte Rechenregeln verwendet werden konnten.[11]

Die Studierenden, die Variante B beim Ableiten verfolgt hatten, konnten die selbe Strategie (nachvollziehbarerweise) nicht auf das Integrieren übertragen, was wohl die geringe Lösungshäufigkeit von 12 % erklärt. Zum Teil wurde auch nur die Wurzel integriert, ohne $\frac{1}{(x-4)^3}$ zu berücksichtigen. Eine Probe (d. h. Stammfunktion ableiten) wurde nie durchgeführt.

11 Den Studierenden darf das Motto »Rechnen statt Denken« unterstellt werden.

Die ergänzende Frage »Welche geometrische Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion?« sollte Aufschluss über das Verständnis der Studierenden liefern. Nur 30 Studierende (60 %) gaben eine Antwort auf diese Frage:

- 44% gaben explizit einen Zusammenhang zwischen der Ableitung und der »Steigung« an. Ein Beispiel einer solchen Antwort ist: »1. Ableitung = Steigung«. Die meisten dieser Antworten waren sehr vage gehalten – es wurde nicht klar, ob die Studierenden tatsächlich über ein tiefgehendes Verständnis über den Ableitungsbegriff verfügten, oder ob sie nur auswendig gelernte Schlagwörter reproduzierten. 6 Studierende (12%) gaben eine Antwort, die als korrekt[12] angesehen werden kann, beispielsweise »1. Ableitung: Steigung der Tangente in einem bestimmten Punkt«.
- Eine Person interpretiert die 1. Ableitung als Änderungsrate. Die restlichen Antworten beziehen sich auf das Rechenverfahren bei der Kurvendiskussion, wo zur Bestimmung der Extremwerte im Intervall-Inneren $f'(x) = 0$ als notwendige Bedingung gesetzt wird. Antworten dieser Art sind »Sie gibt die erste Koordinate der Extremstellen an und Steigung« oder »Die 1. Ableitung der Funktion hilft bei der Berechnung der Extrempunkte/Werte«.

Insgesamt muss kritisch festgehalten werden, dass die Kursteilnehmenden kaum über ein exaktes Verständnis der Ableitung verfügen oder nicht über ein Verständnis für die Notwendigkeit, eine mathematisch exakte, unmissverständliche Antwort zu geben. Die Rechenkompetenzen scheinen zumindest bezüglich des Ableitens etwa bei einem Drittel in zufriedenstellender Form gegeben zu sein – der Rest verfügt über kein ausreichendes Verständnis für die Kettenregel.

13.3. Resümee

Letztendlich fallen alle Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben schlecht aus, siehe Tabelle 13.2. Das war an sich durch Ergebnisse bei Brückenkursen an deutschen Universitäten zu erwarten, stellt trotzdem aber die Qualität des schulischen Unterrichts und der Erstsemestrigen in Frage. SchülerInnen mit einem *Sehr Gut* scheiden besser ab als SchülerInnen mit einem *Gut*. Brückenkursteilnehmende mit einem *Befriedigend* (N=3) als Schulnote konnten keine der Aufgaben lösen.

Tab. 13.2.: Lösungshäufigkeiten der Aufgaben beim Orientierungstest des Brückenkurses

Nr	Inhalt	Lsg.-Häuf. (%)
Bsp 1	Termvereinfachung	(15)
Bsp 2	Nullstellen Polynom 3. Grades finden	36
Bsp 3	(unterbestimmtes) Gleichungssystem lösen	2
Bsp 4	Funktionsgraph skizzieren	6
Bsp 5a	eine Funktion Differenzieren	34
Bsp 5b	eine Funktion Integrieren	12

Nichtsdestotrotz zeigte sich in vielen Fällen eine arbeitsfähige Ausgangsbasis, auf dem die Inhalte des Brückenkurses aufbauen konnten. Daneben kamen Lücken zutage, die der Brückenkurs in Angriff nehmen konnte. Es zeigt sich, dass fast alle der teilnehmenden Studierenden Defizite haben.

12 Als korrekt wird hier eine Antwort angesehen, sobald man sich weitgehend sicher sein kann, dass die Person über ein ausreichend klares, exaktes Verständnis des Begriffes verfügt. Formale Spitzfindigkeiten wurden ignoriert.

14. Abschlusstest

Beim Abschlusstest haben nur mehr 45 Studierende teilgenommen.[1] 50 Minuten standen als Bearbeitungszeit zur Verfügung. Unterlagen und andere Hilfsmittel waren nicht erlaubt.

14.1. Ausgangsüberlegungen

Der Test sollte wieder ein diagnostisches Potenzial beinhalten. Neben weiteren Themengebieten, die beim Orientierungstest noch nicht abgefragt wurden, sollte auch der Lernfortschritt im Brückenkurs untersucht werden – auch im Hinblick auf hochschulnahe Aufgaben. Für die Studierenden sollte der Test Rückmeldungen zum Lernfortschritt und etwaigen noch vorhandenen Lücken zeigen. In der letzten Einheit des Brückenkurses konnte noch auf Probleme eingegangen werden.

Aufnahmefähigkeit der neu gelernten Inhalte

Da rund die Hälfte der Studierenden das Thema »Folgen« in der Schule nicht ausreichend behandelt sah, wurde dieses Thema in einer Kurseinheit samt Hausübung intensiv behandelt. Es sollte mit dem Abschlusstest abgeprüft werden, in wie fern neue Inhalte in so kurzer Zeit (wenige Tage) verarbeitet werden können. Auch das Skizzieren von Funktionen darf in diesem Zusammenhang als ein neu gelernter Inhalt verstanden werden.

Aufnahme der vertieften Inhalte

Neben diesen als neu anzusehenden Inhalte sollte auch untersucht werden, in wie weit prinzipiell aus der Schule bekannte Inhalte im Kurs wieder aufgefrischt und exaktifiziert werden konnten (Umgang mit der Definition des Differentialquotienten). Es sollte untersucht werden, in wie weit es die Studierenden geschafft haben, diese mathematische Exaktheit und ihre Argumentationen innerhalb der zwei Kurswochen aufzunehmen. Da die Rechenkompetenz ein Aspekt des Brückenkurses war, wurden wieder die Beherrschung von Rechenmethoden (Ableiten und Integrieren) abgeprüft. Dieses Beispiel sollte einen Vergleich zum thematisch vergleichbaren Beispiel im Orientierungstest liefern.

14.2. Analyse der Aufgaben

Der Abschlusstest bestand aus folgenden Aufgaben:

Bsp 1 Funktionsgraphen skizzieren
Bsp 2 Folge auf Monotonie und Beschränktheit untersuchen
Bsp 3 Differenzierbarkeit einer rationalen Funktion über den Differentialquotienten nachweisen
Bsp 4 Differenzieren und Integrieren mit den gängigen Rechentechniken

1 Zum Teil wurden terminliche Überschneidungen angegeben.

Aufgabe 1 Funktionsgraphen skizzieren

Diese Aufgabe ist im Zusammenhang mit Aufgabe 4 vom Orientierungstest zu sehen, bei dem ebenfalls ein Funktionsgraph zu skizzieren war.

> Skizziere (qualitativ) die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x^2} \qquad \text{sowie} \qquad g(x) = x + 3 + \frac{1}{x+2}$$
>
> inkl. der jeweiligen Asymptoten. (Eine Wertetabelle ist nicht notwendig.)

Es stellte sich heraus, dass die Funktion für den Großteil der Studierenden ein zu schwieriges Beispiel war. Zwar haben knapp 50% den Sinus richtig gezeichnet, jedoch hat der Großteil dieser Personen den Faktor e^{-x^2} entweder gar nicht berücksichtigt bzw. den Verlauf falsch (z. B. als e^{-x}) skizziert. Nur 2 der 45 (4 %) Testteilnehmenden haben die Funktion f korrekt skizziert.

Die Funktion g haben immerhin 20 % der Studierenden korrekt gezeichnet, die meisten davon haben auch die beiden Asymptoten $x + 3, x = -2$ explizit eingezeichnet. Ein Teil der Studierenden hat an ihrem schulischen Denken aus der Oberstufe festgehalten und bei der Funktion g versucht, eine Wertetabelle zu erstellen. Keine dieser Studierenden haben es geschafft, eine korrekte Skizze anzufertigen. Ein typischer Fehler diesbezüglich war, dass die Funktion g als Gerade gezeichnet wurde.

Studierende, die keine Wertetabelle gezeichnet haben, haben zum Teil nur den Ausdruck $\frac{1}{x+2}$ gezeichnet, aber den Term $x + 3$ ignoriert.

Betrachtet man nur die Funktion g, so bleibt festhalten, dass das Skizzieren im Vergleich zu den 9 % beim Orientierungstest immerhin besser funktioniert hat, aber mit rund 20 % noch vergleichsweise dürftig war. Umso drastischer scheint dieses Ergebnis, weil das Skizzieren von Graphen inkl. Summen- und Produktfunktionen bzw. Hintereinanderausführung intensiv im Kurs behandelt wurde und anhand vieler Beispiele vorgezeigt wurde. Auch einige Hausübungsbeispiele zu diesem Thema mussten von den Studierenden vor dem Abschlusstest behandelt werden.

Aufgabe 2 Folge: Monotonie und Beschränktheit

Beim Themengebiet der Folgen wurde überprüft, in wie weit die Studierenden weitgehend neue Inhalte im Lauf des Brückenkurses aufnehmen konnten:

> Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit:
>
> $$a_n := \frac{n+1}{n} \,.$$

Etwa 60% der Studierenden haben es geschafft, die Definition von »monoton fallend« richtig zu formulieren. 82% davon (Gesamt 51%) haben die Monotonie korrekt gezeigt. 18% der Studierenden haben dagegen angenommen, dass die Folge monoton steigend ist (was allerdings die Berechnung der ersten paar Folgenglieder sofort widerlegt hätte).

Das Thema »Beschränktheit« stellt sich schwieriger heraus – die Studierenden verfügten nicht über ausreichend klare Vorstellungen zu einer passenden oberen bzw. unteren Schranke – und deren Zusammenhang mit einer Schranke allgemein. Das äußerte sich dadurch, dass zum Teil nur eine obere Schranke bestimmt wurde, zum Teil nur eine untere Schranke. Nur 13% 45 Studierenden haben die Definition von Beschränktheit in der im Vorlesungsteil gebrachten Variante[2] formuliert. Insgesamt haben es 20% Studierende geschafft, eine korrekte obere Schranke zu finden (mit Beweis), und nur 13% Studierende eine untere Schranke (mit Beweis).

Es zeigt sich kaum ein Unterschied bei der Monotonie zwischen den Studierenden, die ausreichend Vorwissen zum Thema Folgen beim Orientierungstest angegeben haben, und denen, die das nicht haben. Bei der Beschränktheit schneiden Studierende mit weniger (selbst) attestiertem schulischen Vorwissen besser ab. Es stellt sich diesbezüglich die Frage, ob im schulischen Unterricht bei der ersteren Gruppe *obstacles* aufgebaut wurden, oder ob sich die zweite Gruppe wegen ihres mangelnden Vorwissens umso intensiver mit dem Stoffgebiet im Brückenkurs beschäftigt hat.

Aufgabe 3: Differenzierbarkeit über Differentialquotient nachweisen

Das folgende Beispiel sollte abprüfen, in wie weit die Studierenden bereits mit dem neuen *didactic contract* und einem (für viele) neuen Aufgabentyp zurecht kommen.

> Zeige über die Definition der Ableitung, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar ist.
> $$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Immerhin 73% der Studierenden (33 Studierende) haben die Definition der Differenzierbarkeit (an einer unbestimmt gehaltenen Stelle x_0) richtig formuliert. Ein Drittel dieser Studierenden hat mit x_0 unbestimmt weitergerechnet. Ebenfalls ein Drittel hat bei jedem Schritt das Limes-Symbol angeschrieben, davon haben fast alle den Limes letztendlich richtig berechnet (9 dieser 33 Studierenden, gesamt 20%). Ein Teil der Studierenden scheint zwar die Idee des Nenner-Kürzens im Hinterkopf gehabt zu haben, allerdings scheint in dieser Prüfungssituation das korrekte Bruchrechnen vernachlässigt worden zu sein:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \frac{x-3}{(x-3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

Fehler wie dieser waren nicht ungewöhnlich. Es überrascht, wie viele Studierende es nicht geschafft haben, den Nenner $x - x_0$ zu kürzen, indem auf gemeinsamen Nenner gebracht wird, wenn man bedenkt, dass im Vorlesungsteil diesbezüglich zwei Beispiele vorgerechnet wurden und zwei Beispiele als Übungsaufgaben gegeben wurden. Es scheint, dass das Thema Differenzierbarkeit auf formaler Ebene noch nicht in ausreichender Form gefestigt war.

Immerhin 10 Studierende (22%) haben eine verständnislose Argumentation geführt. Bezogen auf den obigen Fehler wurde etwa geschrieben:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3}$$

ergänzt mit den Worten »... ist differenzierbar, wenn $x \neq 3$«. Es handelt sich dabei um grundlegende Verständnismängel, wo die Studierenden zwar versuchen, formal im neuen *didactic contract* und seinen Begriffen zu arbeiten, allerdings ohne echten Sinn erkennen zu lassen. Insgesamt haben 11 der 45 Studierenden (24%) verständnislos argumentiert, was nach dem Kurs noch viel erscheint.

2 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, genau dann, wenn $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

Aufgabe 4: Differenzieren und Integrieren mit den gängigen Rechentechniken

Diese Aufgabe überprüft, in wie weit die Studierenden ihre rechnerische Fähigkeiten steigern konnten.

Bestimme mit gängigen Rechenregeln etc. sowohl die erste Ableitung als auch eine Stammfunktion zur Funktion f:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{3x+5}\,.$$

Nur rund 29% der Studierenden konnten f' richtig berechnen. Ein Teil der Studierenden kam mit der inneren Ableitung, also $(3x+5)'$ nicht zurecht. Daneben stellt sich bei dieser Aufgabe überraschend heraus, dass der prominent gesetzte Malpunkt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und e^{3x+5} ein Ausgangspunkt für Fehler war. Etliche Studierende haben das als Ausgangsbasis genommen, die Produktregel (fehlerhaft) anzuwenden. Erstaunlicherweise wurde π als Variable wie x aufgefasst, was zu falschen Ergebnissen führt. Offenbar wurde in der Schule bzw. im Kurs zu wenig betont, dass π eine Zahl ist und demnach wie eine gewöhnliche Konstante zu behandeln ist. Lösungsvorschlag: Zur Sensibilisierung dafür empfiehlt es sich, sogenannte Kurvenscharen[3] im Rahmen der Differentialrechnung im Kurs zu behandeln.

33% der Studierenden haben eine Stammfunktion richtig berechnet, von diesen haben das 80% per Substitution gemacht. Im Hinblick auf das schlechtere Abschneiden beim Differenzieren ist das fast verwunderlich und kann ein Hinweis darauf sein, dass der beispielorientierte Zugang beim Integrieren diesbezüglich Wirkung gezeigt hat.

Nachdenklich in mehrfacher Hinsicht stimmt folgende (unkommentierte) Lösung dieser Aufgabe (Schultyp HAK, Note: *Gut*, schriftlich maturiert):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{f} \cdot \underbrace{e^{3x+5}}_{g} \\
f'(x) &= -2\pi \cdot e^{3x+4} \\
f(x) &= \pi^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2\pi \\
g'(x) &= e^{3x+5} \\
F'(x) &= f(x) \\
F(x) &= \frac{\pi}{3} \cdot e^{3x+5} + C
\end{aligned}$$

Neben der unerlaubten Verwendung der schon »verbrauchten« Funktion f ist die Umformung $\frac{\pi}{2} = \pi^{-2}$ sehr problematisch, da es offenbar zu einer Verschmelzung von Brüchen mit Rechenregeln für Hochzahlen gekommen ist. Auch $g'(x) = e^{3x+5}$ zeigt, dass die Kettenregel trotz analoger Beispiel in der Vorlesung nicht verstanden wurde. Ebenfalls unverstanden blieb die Produktregel, die mit $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ verwendet wurde. Es zeigt sich letztendlich, dass bei dieser Person kaum richtiges und verstandenes Grundwissen vorhanden ist.

3 Unter einer Kurvenschar versteht man eine Menge von Funktionen (und deren Graphen), die sich zumindest in einem Parameter unterscheiden, z. B. $f_a(x) = (a+2) \cdot x^2 + 3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

14.3. Resümee

Insgesamt muss festgestellt werden, dass auch die Ergebnisse nach den zwei Brückenkurs-Wochen durchwegs ernüchternd sind. In Tabelle 14.1 sind die Lösungshäufigkeiten (in %) dargestellt.

Tab. 14.1.: Lösungshäufigkeiten der Aufgaben beim Abschlusstest des Brückenkurses

Nr	Inhalt	Lsg.-Häuf. (%)
Bsp 1a	Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x^2}$ skizzieren	4
Bsp 1b	Funktion $g(x) = x + 3 + \frac{1}{x+2}$ skizzieren	20
Bsp 2a	Monotonie der Folge $\frac{n+1}{n}$	49
Bsp 2b	Beschränktheit der Folge	13
Bsp 3	Differenzierbarkeit über Definition	20
Bsp 4a	Ableitung von $\frac{\pi}{2} \cdot e^{3x+5}$-Funktion	29
Bsp 4b	Stammfunktion der $\frac{\pi}{2} \cdot e^{3x+5}$	33

Folgende Feststellungen beim Vergleich von Orientierungstest mit Abschlusstest lassen sich machen:

- Das Skizzieren ist nach dem Brückenkurs zwar besser ausgefallen, trotzdem aber noch schwach.
- Beim Differenzieren im Hinblick auf Anwendung der Rechenregeln lassen sich keine deutlichen Verbesserungen vom Orientierungstest zum Abschlusstest feststellen.
- Beim Integrieren ist die Lösungshäufigkeit gestiegen, was allerdings auch am optisch schwierigen Beispiel beim Orientierungstest liegen kann.

Aus fachlicher Sicht muss damit festgestellt werden, dass nicht alle Studierenden das angestrebte Niveau erreicht haben. Trotzdem stimmen einige korrekte Lösungen optimistisch, dass Studierende Konzepte und Rechenmethoden wiederholen, vertiefen oder nachholen konnten. Der Abschlusstest zeigt, was zu erwarten: Es ist nicht realistisch, dass Studierende bei vielfältigen Defiziten vom geforderten Soll-Zustand diese innerhalb von zwei Wochen Brückenkurs ausgleichen können. Nichtsdestotrotz wurde der Brückenkurs auch aus fachlicher Sicht sehr positiv beurteilt, wie die nächsten Kapitel zeigen.

15. Feedback (Kursende)

Am Ende des Brückenkurses war ein anonymer paper-pencil-Fragebogen abzugeben[1], der die Zufriedenheit der Studierenden mit dem Brückenkurs evaluierte. Fragen des Autors wie

i) Wie gut wurde das Konzept angenommen?

ii) Wie wurde das Niveau eingeschätzt?

iii) Wie zufrieden sind die Studierenden unmittelbar nach dem Kurs?

iv) Wie gut fühlen sich die Studierenden auf das erste Semester vorbereitet

sollten dadurch geklärt werden, um die Wirksamkeit des Kurses und des Konzept aus Sicht der Studierenden zu erfragen. Weiters sollten Kritikpunkte und Verbesserungsvorschläge für die Umsetzung des Kurses für das Studienjahr 2013/14 gesammelt werden. Der vollständige Fragebogen findet sich im Anhang D.3. Von 46 Studierenden liegt der ausgefüllte Fragebogen vor.

Lesehinweis:

Die Einträge in den Tabellen in diesem Kapitel sind jeweils die relative Häufigkeiten in Prozent. Die Werte wurden gerundet. Kein Eintrag in einer Zelle bedeutet »keine Meldungen«. Zur Erklärung der Skalen in diesem Kapitel:

1	2	3	4	5
trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft teilweise zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu

15.1. Vorlesungsteil und behandelte Inhalte

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Studierenden die Behandlung der jeweiligen Inhalte im Vorlesungsteil überwiegend als aureichend eingeschätzt haben. Tab. 15.1 zeigt die genau Aufschlüsselung. Tab. 15.2 zeigt weitere Einschätzungen der Studierenden. Die Stoffmenge im Vorlesungsteil war demnach durchaus angemessen, der Schwierigkeisgrad war zwar eher zu hoch, aber noch gut erträglich, der Ruf nach etwas mehr vorgerechneten Beispielen durch den schulischen *didacitic contract* zu erwarten.

15.2. Übungsblätter und Beispiele

Ein wesentlicher Aspekt des Kurses war die eigenverantwortliche Beschäftigung mit Übungsaufgaben zum Stoff des Vorlesungsteils und zum Teil darüber hinaus. Umso entscheidender ist es, die Studierenden durch passende Aufgabenstellungen zur Bearbeitung zu motivieren. Tabelle 15.3 zeigt die Einschätzungen der Studierenden: Die Aufgaben waren durchwegs interessant, etwas zu schwer (was natürlich auch als passend fordernd interpretiert werden darf und als deutliche Abgrenzung zum schulischen Schwierigkeitsgrad gesehen werden kann). Daneben wurden die Aufgaben als lehrreich eingeschätzt. Der Eintritt in den *didactic contract* der Hochschulmathematik zeigt sich im Empfinden, dass die Aufgaben vom Großteil deutlich anders als in der Schule eingeschätzt wurden.[2]

1 Die Abgabe des Fragebogens zwischen dem vorletzten Kurstag und zum letzten Kurstag war ein formatives Element des Brückenkurses, vgl. Abschnitt 11.4, um die Rücklaufquote hoch zu halten.

2 Etliche der Aufgaben waren durchaus schultauglich und hätten in einer ähnlichen Form aus Schulbüchern der Oberstufe stammen können. Von daher überrascht es, wie deutlich von den Studierenden Unterschiede wahrgenommen wurden.

Tab. 15.1.: Einschätzung, welche der Inhalt im Vorlesungsteil ausreichend behandelt wurden. Angaben in %, N=46; 1: trifft völlig zu; 5: triff gar nicht zu

Ausreichend behandelte Inhalte im VO-Teil	1	2	3	4	5
Mengenlehre	74	17	9		
Logik und mathematische Aussagen ($\wedge, \vee, \ldots$)	65	28	7		
Rechenregeln für Zahlen (Exponenten, ...)	52	30	13	4	
Komplexe Zahlen	26	20	37	13	4
Ungleichungen (inkl. Betrag)	35	24	30	11	
Funktionen (inkl. Skizzieren, ...)	9	39	39	13	
Grenzwerte von Funktionen	15	37	30	11	2
Differentialrechnung	43	33	17	7	
Integralrechnung (z. B. Substitution, ...)	37	37	20	4	2
Folgen (z. B. Monotonie, ...)	37	39	15	9	
Reihen (z. B. Konvergenz, ...)	26	33	33	9	

Tab. 15.2.: Einschätzung der Kursteilnehmenden zur Stoffmenge und den mathematischen Schwerpunkten. Angaben in %, N=46; 1: trifft völlig zu; 5: trifft gar nicht zu

Aussage	1	2	3	4	5
Der Stoff in den 1,5 h war vom Umfang her fassbar.	35	33	20	13	
Der Stoff war vom Schwierigkeitsgrad her fassbar.	20	28	33	17	2
Mehr Beweise wären schön gewesen.	7	13	24	28	26
Mehr vorgerechnete Beispiele wären schön gewesen.	39	26	22	9	4

Tab. 15.3.: Einschätzungen der Kursteilnehmenden zu den Übungsaufgaben. Angaben in %, N=46; 1: trifft völlig zu; 5: trifft gar nicht zu

Aussage	1	2	3	4	5
Die gebrachten Übungsbeispiele waren interessant.	41	39	17	2	
Die gebrachten Übungsbeispiele waren schaffbar.	9	35	39	13	4
Durch die gebrachten Übungsbeispiele habe ich viel dazugelernt.	37	41	17	2	2
Die Aufgabenstellungen waren anders als in der Schule.	89	11			

15.3. Weitere subjektive Einschätzungen

Tabelle 15.4 zeigt weitere Einschätzungen der Studierenden zum Brückenkurs. Das Konzept mit einer Aufteilung in Vorlsesungsteil und Übungsteil wurde sehr positiv angenommen. Die Notwendigkeit des Brückenkursbesuches wird als sehr hoch eingeschätzt. Dass die Mehrheit der Studierenden durch den Brückenkurs neugierig auf Hochschulmathematik geworden ist, ist im Hinblick auf die *beliefs* und einer positiven Einstellung zu neuen Lernerfahrungen als positiv zu bewerten – der Brückenkurs hat diesbezüglich sein Ziel erreicht.

Tab. 15.4.: Weitere kursbezogene Einschätzungen der Kursteilnehmenden. Angaben gerundet in %, N=46, 1: trifft völlig zu; 5: trifft gar nicht zu

Aussage	1	2	3	4	5
Das Konzept des Kurses (Aufteilung in VO-Teil und Übungsteil inkl. Beispielabgaben) war sinnvoll.	80	17	2		
Der Brückenkurs war wirklich notwendig für mich.	70	17	13		
Der Brückenkurs war mathematisch eine echte Bereicherung.	59	26	15		
Der Brückenkurs hat insgesamt meinem Leistungsniveau entsprochen.	13	33	26	22	7
Das Niveau war um Einiges höher als in der Schule.	78	17	2	2	
Ich bin durch den Kurs neugierig auf die Hochschulmathematik.	50	33	15	2	
Ich fühle mich durch den Brückenkurs auf das Studium gut vorbereitet.	24	50	22	2	2

Aus mathematischer Sicht scheinen die Studierenden ihrer Einschätzung nach wirklich profitiert zu haben. Im Umkehrschluss stellt das den schulischen Unterrichts in Frage. Aus mathematischer Sicht ist davon auszugehen, dass der Brückenkurs deutlich konsistenter als der übliche Schulunterricht war und viele tragfähige Ideen für die Hochschulmathematik (z. B. Grenzwerte, Verknüpfungen) vermittelt wurden. Fast notwendigerweise ist damit ein höheres Niveau als in der Schule verbunden.

Du Studierenden fühlen sich durchaus gut auf das Studium vorbereitet. Nur eine kleine Minderheit sieht das nicht so – evtl. haben diese Personen deutliche Defizite an sich erkannt.

15.4. Probleme, Über- und Unterforderung

Da beim Orientierungstest, bei einigen Übungsaufgaben sowie beim Abschlusstest deutlich wurde, dass die Leistungen der Studierenden nicht immer dem angestrebten Niveau entsprochen haben, wurde den Kursteilnehmenden die Chance zu Feedback dazu gegeben. Die Frage lautete: »Wurdest du durch die Übungsbeispiele/Inhalte ab und zu auch frustriert/überfordert? Wenn ja, durch welche (Themengebiete/Aufgabenstellungen) besonders?« Es war ein offenes Antwortenformat, wobei die Antworten bei der Auswertung geclustert wurden.

Es gab keine Meldungen zu *Unterforderung*. Nur 9% gaben an, dass sie kaum *überfordert* wurden. Der Rest gab, überfordert gewesen zu sein: Hauptschwierigkeiten waren ϵ-δ-Grenzwerte (43%), Reihen (33%), Folgen (26%), Integral (13%, Differenzial (11%). 13% gaben allgemeine Überforderung an.

Die Ergebnisse sind nicht überraschend und bestätigten die Einschätzungen aus den Teilen I und II dieser Arbeit. An sich war zu erwarten, dass die Studierenden umso mehr gefordert bzw. überfordert werden, je weiter sich das Thema in die Hochschulmathematik einsteigt oder je weniger Vorwissen vorhanden ist. Bei den oben genannten Themen trifft beides zu.

15.5. Unterschiede: Schul- und Hochschulmathematik

Mit der Frage »Hat sich die Mathematik im Brückenkurs von deiner Schulmathematik unterschieden? Wenn ja, wie?« sollte untersucht werden, in wie weit die Studierenden bereits Anpassungen an den *didactic contract* (und ihre *beliefs*) innerhalb der von zwei Wochen erlebt haben. Bemerkenswert ist, dass alle Studierende (N=46) Unterschiede wahrgenommen haben. Die Antworten lassen sich in folgende Bereiche clustern:

- Brückenkurs-Mathematik ist abstrakter und allgemeinbezogener.

  Nähere Ausführungen diesbezüglich waren zwar nicht oft vorhanden, man darf aber davon ausgehen, dass dieser Eindruck insbesondere durch strukturorientierten Inhalte (Verknüpfungen) sowie die Einführung von neuen Begriffen durch abstrakte Definitionen, anstatt durch konkrete Beispiele. Eine Meldung diesbezüglich war etwa: »In der Schule wurden mehr Beispiele mit Zahlen gerechnet.«

- Brückenkurs-Mathematik war exakter und es wurde eine mathematischere Schreibweise verwendet

  Dieser Unterschied wurde oft genannt, aber auch kaum spezifiziert. Zum Teil wurden die Definitionen angesprochen. Es ist davon auszugehen, dass sich diese Antworten z. B. auf die Quantorenlogische Sprache bezogen haben, etwa im Zusammenhang mit Grenzwerte, Stetigkeit, Folgen usw.

- Im Brückenkurs wurde mehr Stoff, andere Themen sowie ein höheres Tempo vorlegt.

  Aussagen wie »Stoff von 4 Jahren in 2 Wochen« oder »Viel schwerer und es gab kaum Themen, die wir in der Schule so besprochen hatten (wenn überhaupt)« zeigen, dass Lehrende an der Hochschulmathematik aus (fach)mathematischer Sicht nicht zu viel vom schulischen Unterricht und den damit verbunden Fähigkeiten der Studierenden erwarten können. Auch ein höheres Tempo wurde festgestellt, was ein zweischneidiges Schwert ist: Einerseits sollte die Studierenden im Brückenkurs trainieren, gut mitzuschreiben – andererseits sollte sie ausreichend Zeit zum Mitdenken und Verarbeiten der Inhalte haben. Das ist ein schmaler Grad.

- Im Brückenkurs spielten Beweise und Herleitungen eine Rolle – und nicht nur Rechenregeln.

  Aussagen wie diese wurden häufig genannt »In der Schule wurden nie Beweise verlangt, man musste bloß rechnen« sowie »Ja [ich wurde überfordert], weil ich keine Rechenregel bekommen habe, die ich bei jedem Beispiel anwenden kann« oder »In der Schule wir nur nach Formel gerechnet, ohne zu überlegen, woher es kommt« zeigen sehr deutlich, welche nebensächliche Rolle Herleitungen und Beweise im Schulunterricht dieser Studierenden eingenommen haben. Der Brückenkurs konnte diesbezüglich hoffentlich seinen Beitrag leisten, einen neuen, wertvollen Aspekt von Mathematik zu vermitteln, wie das Wort »bloß« beim ersten Kommentar vermuten lässt.

Etwas expliziter als die vorige Frage war die nächste Frage in diesen Zusammenhang: »Hat sich deine Vorstellung von (universitärer) Mathematik durch den Brückenkurs geändert? Wenn ja, wie?«[3]

- 61 % der Studierenden gaben an, dass sich ihre Vorstellung nicht verändert hat. 4% gaben an, dass sich die Vorstellung konkretisiert hat. Aussagen wie »Nein, man stellt sich die Hochschulmathe genau so vor, durch den Kurs bekam man aber eine Einführung, wie man damit umgeht.« fallen in diese Kategorie.
- 24 % der Studierenden gaben an, dass sich die Vorstellung geändert hat. Zum Teil war der Schwierigkeitsgrad eine Begründung, der noch höher war als erwartet. Daneben wurde der höhere Abstraktionsgrad genannt sowie die Theorie-Last. Eine Nennung war beispielsweise »Ja, ich weiß nun, dass die universitäre Mathematik viel abstrakter ist und man die Definitionen können muss.«
- Ein kleiner Teil der Studierenden gab auch an, im Vorfeld keine Vorstellung gehabt zu haben.

[3] Die Frage hat sich im Nachhinein als schlecht formuliert herausgestellt, da negativ-Antworten nicht begründet werden mussten. Besser wäre gewesen: »Hat sich deine Vorstellung von (universitärer) Mathematik durch den Brückenkurs geändert? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht? Beschreibe deine Vorstellung von universitärer Mathematik.«

Insgesamt kann damit festgestellt werden, dass die Kursteilnehmenden mit Absolvieren des Brückenkurses einen realistischen Eindruck von (universitärer) Mathematik vorweisen können. Es darf dadurch erwartet werden, dass die Gefahr von *belief overhangs* kleiner ist als wenn kein Brückenkurs besucht wird.[4]

15.6. Bewertung des Kurses und des Vortragenden

Abschließend ist in Tabelle 15.5 noch die Benotung des Brückenkurses nach Schulnoten dargestellt. Insgesamt ist der Brückenkurs und der Vortragende (sehr) gut angekommen, was sich auch in den offenen Rückmeldungen zeigt (siehe unten). Interessanterweise wird der Lehrende besser beurteilt als der Kurs. Das verdeutlicht die zentrale Rolle des Lehrenden als Person. Nur weil die Lernenden erwachsen sind und der Unterricht an einer Universität stattfindet, beschränken sich Lehrveranstaltungen nicht auf den Inhalt. Das Engagement der Kursteilnehmenden ist als eher durchschnittlich einzuschätzen.

Tab. 15.5.: Benotungen des Brückenkurses durch die Kursteilnehmenden in Schulnoten. Angaben in %, N=45, 1: Sehr Gut, 5: Nicht Genügend

Bewertung in Schulnoten	1	2	3	4	5
Insgesamt gebe ich dem Lehrenden die Schulnote	70	30			
Insgesamt gebe ich dem Brückenkurs die Schulnote	39	50	9	2	
Insgesamt gebe ich meinem eigenen Engagement die Schulnote	15	37	41	7	

15.7. Offenes Feedback

Nach den Fragen zu den Benotungen des Kurses gab es noch offene Fragen, die den 46 Studierenden die Möglichkeiten für weitere Äußerungen gaben. Gerade durch offenes Feedback gibt es immer wieder interessante und überraschende Rückmeldungen. Verbesserungsvorschläge in diesem Rahmen werden in Abschnitt 19.1 diskutiert. Auf die Frage »Das hat mir besonders gut gefallen« haben 89% der Kursteilnehmenden eine Antwort gegeben. Die Antworten dieser 41 Studierenden wurden folgendermaßen geclustert:

- verständliche Erklärungen

  Es kamen 10 Nennungen direkt mit »verständliche« Erklärungen, zwei Meldungen zum guten und übersichtlichen Tafelbild (inkl. Einsatz von Farbkreide). Diese Rückmeldungen waren stark personenbezogen, was bestätigt, dass auch an der Hochschule die Lehrkraft mit ihren fachlichen und fachdidaktischen Fähigkeiten einen starken Einfluss auf die Akzeptanz der Lehrveranstaltungen bei den Studierenden hat.

- Bemühen des Lehrenden und Eingehen auf die Studierenden

  6 Studierende haben das besondere Bemühen des Lehrenden herausgestrichen, den Studierenden die Inhalte zu vermitteln und an deren Lernerfolg interessiert zu sein. 4 Studierende haben das Eingehen auf die Studierenden besonders gelobt. Aussagen wie »der Lehrende hat sich bemüht, jedem die Themen verständlich zu machen« fallen in diese Bereiche.[5]

  Eng damit im Zusammenhang hoben 5 Studierende hervor, dass Fragen immer gerne und gut beantwortet wurden, etwa »jede Frage beantwortet (auch in der Pause :-))«. Das Aufgreifen von Fragen ist ein erster Schritt, die Studierenden bei ihrem Lernvorgang ernst zu nehmen und ihre Probleme zu akzeptieren. Es ist zu erwarten, dass sich das Engagement des Lehrenden in der Motivation und der Einstellung der Studierenden im Positiven äußert.

4 Vor allem dann, wenn die Lehrveranstaltungen des ersten Semesters langsam beginnen und dadurch den Eindruck vermitteln, man würde kaum etwas neues lernen. Vgl. Fußnote 27 in Abschnitt 7.3.2.

5 Solche Rückmeldungen sind nach Erfahrung des Autors an der Uni Graz im Mathematikstudium vergleichsweise selten.

- Übungsbeispiele und Verbesserung

  Fast ein wenig überraschend war, wie gut die Übungsbeispiele und deren Verbesserung den Studierenden gefallen hat. 7 Meldungen wie »Es wurden die geforderten Themen durchgenommen, in denen man Schwierigkeiten hatte. Die Übungsbeispiele wurden am Tag darauf genauestens erklärt.« zeigen die Zufriedenheit damit. Auch aus Sicht der Studierenden ist damit die didaktische Entscheidung mit den Übungsaufgaben und deren Kontrolle in der umgesetzten Form als sinnvoll zu bewerten.

- Rahmenbedingungen und Organisation

  Auch Aspekte des Abhaltungssystems wurden hervorgehoben, etwa die positive Atmosphäre (3 mal), dass keine Noten gegeben wurden (3 mal), die Organisation im Allgemein (3 mal), dass der Kurs abgehalten wurde (3 mal) sowie die »Super Mischung zwischen Theorie, Beispielen und Übungen (kein trockener Unterricht)«. Daneben wurde 4 mal angemerkt, dass durch den Brückenkurs schon vor dem Studium neue Bekanntschaften und Freundschaften geknüpft werden konnten. Das Ziel der sozialen Einbettung darf damit (zumindest bei diesen Studierenden) als erreicht angesehen werden.

- Einblick in das Studium und Themengebiete

  Letztlich wurde auch das (mathematische) Konzept des Kurses hervorgehoben: 5 mal wurden die interessanten Themengebiete erwähnt, ein Person freute sich besonders über die gebrachten Beweise. Daneben gab es 4 Meldungen, dass man durch den Kurs schon einen Einblick ins Studium und die Hochschulmathematik vor dem tatsächlichen Beginn erhalten hat. Die Aussage »Dass wir über die verschiedenen Themen einen komplexeren Überblick als in der Schule bekommen haben.« weist darauf hin, dass das mathematische Konzept aus Wiederholen-Vertiefen-Vorausschauen als schlüssig angesehen werden kann. 3 Studierenden gefiel das anspruchsvolle Niveau, durch das sie gefordert wurden.

15.8. Resümee

Insgesamt waren die Rückmeldungen am Ende des Kurses durchgehend positiv. Der Brückenkursbesuch wurde von der überwiegenden Mehrheit als notwendig eingeschätzt. Zwar wurde von einigen das Niveau als (eher) zu hoch eingeschätzt, allerdings wurde das mathematische Konzept, die Themengebiete und die Methoden (Vorlesungsteil, Übungsteil, Kontrollphase) durchwegs positiv eingeschätzt.

Inhaltliche Schwierigkeiten aus Sicht der Studierenden gab es hauptsächlich beim Thema Grenzwerte und Stetigkeit, aber auch bei Reihen und Folgen.

Die Zufriedenheit mit dem Brückenkurs ist offenbar stark an die Person des Vortragenden gebunden (gute Erklärungen, Eingehen auf Studierende).

Der Brückenkurs hat es geschafft, dass die Studierenden einige Aspekte von Hochschulmathematik (exakte Definitionen, Abstraktion, Herleitungen und Beweise) bewusst erlebt haben – zum Teil scheint es Anpassungen an den *didactic contract* und eine bewusste Abgrenzung von *beliefs* aus der Schule gegeben zu haben. Es ist davon auszugehen, dass die Studierenden am Ende des Brückenkurs eine realistische Vorstellung vom Studium erhalten haben und damit *belief overhangs* weniger wahrscheinlich sind.

16. Evaluierung am Ende des ersten Semesters

Ein anonymer Online-Fragebogen für die Lehramtsstudierenden[1] nach dem ersten Semester sammelte die Erfahrungen bzgl. Studieneinstieg und den damit verbundenen Problemen. Der Fragebogen erging an alle 191 Mathematik-Lehramtsstudierenden, die im WS 12/13 ihr Studien begonnen haben (in diesem Kapitel einfach nur als »Erstsemestrige« bezeichnet). Die Beantwortung dieses Fragebogens war von März 2013 bis Mai 2013 möglich – der Zeitraum also bereits im zweiten Semester angesiedelt. Folgende Forschungsfragen waren im Fokus:

- Wie beurteilen Brückenkursteilnehmende und Nichteilnehmende ihre schulischen Voraussetzungen?
- Unterscheiden sich Brückenkursteilnehmende und Nichtteilnehmende im Lauf des ersten Semesters? Wo liegen die größten Probleme? Stimmen diese Probleme mit den in dieser Arbeit charakterisierten überein?
- Wie beurteilen Brückenkursteilnehmende den Besuch des Brückenkurses im Rückblick auf das erste Semester.

16.1. Aufbau des Fragebogens

Der Fragebogen enthielt Teile, die von allen Studierenden zu beantworten waren, aber auch Teile, die spezifisch für die Nicht-Brückenkursteilnehmenden (z. B. Gründe für den Nicht-Besuch) bzw. die Brückenkursteilnehmenden (z. B. Einschätzung der Notwendigkeit des Kurses nach Absolvieren des ersten Semesters) gestaltet waren. Einige Fragen bezogen sich besonders auf StudienabbrecherInnen oder Studierende mit einer möglichen Absicht diesbezüglich. Der vollständige Fragebogen ist beim Autor erhältlich.[2] Folgende Themenbereiche wurden durch den Fragebogen abgedeckt:

- mathematisches Vorwissen sowie Probleme mathematische Inhalte

  Es wird abgefragt, in wie weit die in Teil I sowie II dieser Arbeit als problematisch charakterisierten Themen tatsächlich als problematisch bezeichnet werden können.

- mathematische Konzepte und Lernformen im Mathematik-Studium

  Wie sieht die Realität der Erstsemestrigen im Umgang mit Theorie-Last oder formalen Notationen aus? Wie viele Studierende haben tatsächlich beim Übertragen von Theorie auf konkretere Beispiele zu kämpfen? Und lassen sich diesbezüglich Hinweise auf Auswirkungen vom Brückenkurs finden?

- Spaß an Mathematik und Motivation im Studium

  Wie sieht es mit dem Spaß an Mathematik in Schule und Studium aus? Wie leicht fällt es den Studierenden, sich mit abstrakteren Inhalten zu beschäftigen? Können die Studierenden ausreichend Zusammenhänge zum Schulstoff herstellen? Und welche Rolle spielt dabei die (realistische?) Vorstellung vom Studium?

- Abbruchgedanken, Abbruchgründe, Studienwahl

  Wie viele Studierende haben während des ersten Semesters an einen Studienabbruch gedacht? Was sind die Gründe? Wie schätzen die Studierenden ihre Studienwahl ein?

1 Einerseits haben nur 11 Bachelor-Studierende (bei rund 100 Bachelor-Erstsemestrigen zusammen mit der Technischen Universität Graz) am Brückenkurs teilgenommen, was kaum repräsentative Aussagen zulässt. Andererseits sind durch die Kooperation mit der TU Graz im Rahmen von NAWI-Graz die Studien-Verhältnisse und Erreichbarkeit komplizierter, da die Studierenden im 1. Semester primär auch nur an der TU Graz studieren können. Etwa 80 der Bachelor-Studierenden haben sich für die TU Graz als »Hauptuniversität« entschieden.

2 Aufgrund seiner Länge wurde er nicht in den Anhang aufgenommen.

- Gründe für den Nichtbesuch des Brückenkurses sowie Bedarf im Nachhinein (nur Nicht-Teilnehmende)

  Was waren die Gründe, warum der Brückenkurs nicht besucht wurde oder werden konnte? Hätten die Studierenden ihrer Ansicht nach vom Brückenkurs profitiert? Wie lässt sich die Zielgruppe in Zukunft besser erreichen?

- Bewertung des Kurses nach Ende des ersten Semesters (nur Brückenkursteilnehmende)

  Wie gut wurde im Nachhinein das Auffrischen des Schulstoffes eingeschätzt, wie passend war der Ausblick ins Studium? Haben die Themenschwerpunkte gepasst? Wird der Brückenkurs auch nach dem ersten Semester als wertvolle Hilfe eingeschätzt? Welche nachträglichen Verbesserungsvorschläge haben die Studierenden, was hat sich als besonders sinnvoll erwiesen?

- sonstige Rückmeldungen zum Studieneinstieg, falls noch offen

  Wie bei den meisten Fragebogen üblich, wurden den Studierenden auch ein Feld für Anmerkungen aller Art zur Verfügung gestellt. Antworten zu diesem Thema werden im jeweiligen Kontext erwähnt bzw. eingebaut.

- Schulnoten, Schultyp und (zu erwartende) Noten der Lehrveranstaltungen des ersten Semesters.

  Bereits in diesem Fragebogen wurden die Noten der Lehrveranstaltungen des ersten Semester abgefragt, um einen Rückschluss auf die leistungsbezogene Zusammensetzung der Fragebogenteilnehmenden zu erhalten.[3]

Lesehinweise:

Sind auf den folgenden Seiten Kommentare von Fragebogenteilnehmenden angeführt, so handelt es sich dabei um Antworten auf offene Fragen oder um Einträge bei Kommentarfeldern, die im Fragebogen vorhanden waren.

Ein Teil der Fragen waren offene Fragen, teilweise gab es eine ja/nein-Skala. Daneben wurde für die Einschätzungen eine vierwertige Skala verwendet:

1	2	3	4
trifft zu	triff eher zu	triff eher nicht zu	trifft nicht zu

16.2. Fragebogen-Reichweite

Insgesamt gab es 93 vollständige Datensätze bei 191 (inländischen) Erstsemestrigen im Mathematik Lehramtsstudium des WS 12/13, was einer Rücklaufquote von etwa 49% entspricht.

Nur 5 der Teilnehmenden hatten laut Fragebogenrückmeldung das Studium zum Zeitpunkt des Fragebogens bereits abgebrochen, der Großteil der offiziellen und inoffiziellen AbbrecherInnen konnte demnach nicht erreicht werden.

Von den 93 ausgefüllten Fragebögen waren 61 Nicht-Brückenkursteilnehmende (67%), die restlichen 32 Studierende (33%) hatten den Brückenkurs besucht.[4] Das ergibt unter den Brückenkursteilnehmenden eine Rücklaufquote von 80%, bei den Nicht-Brückenkursteilnehmenden von etwa 40 %. Im Bezug auf die bei Lehrveranstaltungen beurteilten Studierenden sind die Prozentsätze höher.[5]

Die Umfrage ist daher nicht wirklich repräsentativ – große Teile der StudienabbrecherInnen konnten nicht erreicht werden. Die hohe Rücklaufquote unter den Brückenkursteilnehmenden erlaubt Verallgemeinerungen auf diese Gruppe.

Bei den Nicht-Brückenkursteilnehmenden ist davon auszugehen, dass die Abbrechenden noch größere Probleme hatten als die Nichtabbrechenden.

3 Unabhängig davon werden in Kapitel 17 die offiziellen Noten herangezogen.
4 Zur Erinnerung: Den Brückenkurs haben 50 Studierende abgeschlossen, wobei 11 Bachelor-Studierende waren.
5 Beim Fragebogen wurden auch die zu erwartenden Noten abgefragt, falls vorhanden.

Zur Erleichterung des Verständnisses dieser Auswertung sollte man sich Folgendes merken:

- Nur etwa die Hälfte aller Lehramts-Mathematik-Erstsemestrigen haben den Fragebogen ausgefüllt.
- 2/3 der Fragebogenteilnehmenden besuchten den Brückenkurs nicht. Das waren rund 40% aller Nicht-Teilnehmenden.
- 1/3 der Fragebogenteilnehmenden hatte den Brückenkurs besucht. Das sind rund 80% der Brückenkursteilnehmenden.
- Die Einträge in den Tabellen sind immer gerundete Prozentwerte, die sich auf die jeweilige Gruppe beziehen (d. h. Nicht-Brückenkursteilnehmenden, Teilnehmenden), sofern nicht anders angegeben.

16.3. Schultypen und -noten

Die drei Fragen »Durchschnittliche Mathematik-Note in den letzten beiden Jahren der Oberstufe«, »Schultyp in der Oberstufe« sowie »Geschlecht« waren zwar beim Originalfragebogen ans Ende gestellt, werden aber in der Auswertung an den Beginn gestellt, um die weiteren Auswertungen in einem größeren Kontext im Hinblick auf (schulische) Leistungsfähigkeit sehen zu können.

Rund zwei Drittel der Fragebogenteilnehmenden gaben den Schultyp AHS an. Ein Unterschied zwischen den Kursteilnehmenden und den Nichtteilnehmenden zeigte sich bei den Schultypen HTL (3% zu 18%) und HAK (22% zu 5%).

60% der Fragebogenteilnehmenden gaben die Note *sehr gut* an, rund 30% die Note *gut*, der Rest *befriedigen*d.[6] Auffallend ist, dass die Brückenkursteilnehmenden sogar bessere Noten angaben als die Nichtteilnehmenden (75% Sehr gut vs. 53% Sehr gut). Bei den Befriedigend-Noten zeigt sich kein Unterschied. Folgerungen von den Schulnoten auf die mathematischen Fähigkeiten müssen mit Vorsicht behandelt werden, wie die Ergebnisse des Orientierungstests in Kapitel 13 gezeigt haben.

16.4. Inhaltliches und Fachliches

Vorwissen

Die Einschätzungen der Studierenden zur Frage »Diese mathematischen Inhalte wurden im Nachhinein gesehen in meiner SCHULZEIT ausreichend behandelt« entsprachen weitgehend den Erwartungen: Die Inhalte, die am ausreichendsten behandelt wurden waren Funktionen (70%), Differentialrechnung (69%) sowie Integralrechnung (46%). Die Inhalte, die am wenigsten ausreichend behandelt wurden waren Logik und Formalisieren (11%) sowie Grenzwerte und Stetigkeit (12%). Auffällig ist ein Unterschied zwischen den Brückenkursteilnehmenden und den Nichtteilnehmenden bei der Differentialrechnung (59% vs. 74%). Insgesamt schätzen die Brückenkursteilnehmenden ihr Vorwissen tendenziell schlechter ein – was sich aber nicht an den Schulnoten festmachen lässt.

Inhaltliche Hauptprobleme im 1. Semester

Die Frage »Meine Hauptproblem(e) mit den mathematischen Inhalten im ERSTEN SEMESTER war(en) . . . « zeigte dagegen auch unerwartete Ergebnisse:

Die größten Probleme waren Grenzwerte und Stetigkeit (60%), Logik und Formalisieren (46%) sowie Integralrechnung. Funktionen (28%) und Differentialrechnungen (20%) waren weniger problematisch. Brückenkursteilnehmende hatten erstaunlicherweise mehr Probleme bei Funktionen (38% vs. 23%) und Grenzwerten (66% vs. 56%), obwohl diese Themen im Brückenkurs intensiv behandelt wurden. Trotzdem schneiden sie in den Lehrveranstaltungen (*Höhere Mathematik*) besser ab, in denen diese Inhalte besonders gefragt sind (vgl. Kapitel 17). Eine mögliche Interpretation ist, dass sich Nichtbrückenkursteilnehemnde im

6 Frauen haben bessere Noten als Männer, 64% vs. 54% sehr gut.

Lauf des Semesters nie so intensiv mit den Thematiken beschäftigt haben, dass sie zu Probleme gekommen sind. Daneben kann natürlich auch die Stichprobe der Studierenden ein Grund für diese Ungereimtheiten sein. Dass durch den Brückenkurs bei diesen Inhalten *obstacles auf*gebaut wurden, lässt sich nicht aus den Antworten der Kursteilnehmenden schließen – diese haben die thematische Behandlung im Kurs durchgehend positiv bewertet. Beim Thema Logik und Formalisieren sehen BrückenkursteilnehmerInnen weniger Probleme (34% vs. 51%), obwohl sie geringfügig schlechtere Ausgangsvoraussetzungen feststellten (6% vs. 13% ausreichend in der Schule behandelt). Diesbezüglich scheint der Brückenkurs durchaus eine positive Wirkung hinterlassen zu haben. Bei allen anderen Inhalten gab es kaum Unterschiede.

Probleme mit Charakteristika der Hochschulmathematik

Die Frage »Meine (anfänglichen) Probleme mit den Eigenheiten/Konzepten der Hochschulmathematik waren/sind ...« zeigte die erwarteten Schwierigkeiten beim selbstständigen Beweisen (79%), dem Übertragen von Theorie auf konkrete Aufgaben (60%) sowie dem hohen Abstraktionsgrad (54%). Überraschenderweise kommen Brückenkursteilnehmende schlechter mit dem Abstraktionsgrad (60% vs. 51%) und dem Konzept von Definition–Satz–Beweis (31% vs. 20%)[7] zurecht, dagegen besser mit der Theorielast in Vorlesungen (28% vs. 38%). Die Formalismen und mathematischen Kurzschreibweisen machen nur insgesamt 28% Probleme. Eine Person, die den Brückenkurs nicht besucht hat, meint allerdings dazu:

> »Meiner Meinung nach sind vor allem die genaue Schreibweise und die Notation große Probleme für uns. Auch die für mich komplett anderen Ausdrücke für gewisse mathematische Probleme oder Gegebenheiten stellten eine große Hürde dar. Da wäre sicher Verbesserungsbedarf in der Vorbereitung.«

Lehr-/Lernformen

Die Frage »Meine (anfänglichen) Probleme mit den Lehr-/Lernformen im Studium betrafen/betreffen...« zeigt die zu erwartenden Resultate. Hauptproblem war das »Selbstständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben für Proseminare/Übungen (ohne dass davor viele Beispiele der selben Art vorgezeigt wurden)« (61%)[8], gefolgt von »Frontalvortrag in Vorlesungen (z.B. hohe Informationsdichte, Tempo, große Stoffmenge...« (40%)[9] und »Zeitmanagement, Zeiteinteilung, Zeiteinschätzen, Lernzeiten« (28%). Dazu ein Kommentar einer Nicht-Brückenkurs-Person: »Am schwierigeren war das Mitschreiben und gleichzeitiges Verständnis für das Vorgetragene«.

Der Frontalvortrag bei Vorlesungen wird von Brückenkursteilnehmenden besser verarbeitet (31% vs. 44%). Paradox scheint dagegen die auffallend hohe Abweichung zwischen Brückenkursteilnehmenden und Nichtteilnehmenden beim Zeitmanagements: 38% vs. 23% Studierende mit Problemen. Eine Interpretation dazu ist, dass Brückenkursteilnehmende häufiger erkannt haben, dass die verständnisvolle Bearbeitung von Mathematik sehr zeitaufwendig ist, und sie daher eher Probleme haben, sich ihre Zeit einzuteilen. Das wird dadurch untermauert, dass es Brückenkursteilnehmende eher geschafft haben, Zusammenhänge mit Schulmathematik herzustellen und einen Sinn in abstrakterer, exakterer Mathematik zu finden (siehe unten). Andere Studierende lernen dagegen evtl. oberflächlicher, bearbeiten weniger Aufgaben, wodurch sie nicht in Zeitprobleme kommen.

Das »eigenverantwortliche Lernen« macht nur rund 15% der Studierenden Probleme. Das erscheint wenig im Hinblick auf die hohen Durchfallquoten – bei vergleichsweise guten Noten aus der Schule. Es wäre näher zu untersuchen, ob Studierende zwischen dem »Können« und dem »Wollen« beim eigenverantwortlichen Lernen unterscheiden.

---

7 Das kann evtl. durch den deutlich höheren Frauenanteil beim Brückenkurs erklärt werden (78% vs. 54%). Männer haben insgesamt weniger Probleme mit der Abstraktion als Frauen (40% vs. 62%).
8 Es zeigt sich wieder ein Geschlechterunterschied zwischen Männern und Frauen (49% vs. 69%).
9 Hier zeigt sich ein Geschlechterunterschied in gegensätzlicher Richtung zwischen Männern und Frauen (46% vs. 36%).

16.5. Motivationales

Der Fragebogenabschnitt »Motivationales« bestand aus 6 Items, dargestellt in Tabelle 16.1 dargestellt.

Tab. 16.1.: Fragen zur Kategorie »Motivationales«, Angaben in %; 1: trifft zu; 4: trifft nicht zu

Frage	1	2	3	4
Ich hatte Spaß an Mathematik in der Schule	87	12	1	0
Brückenkurs besucht	91	9		
Brückenkurs nicht besucht	83	13	2	
Ich hatte Spaß an Mathematik im 1. Semester	27	41	28	4
Brückenkurs besucht	25	56	19	
Brückenkurs nicht besucht	28	33	33	7
Mir ist es leicht gefallen, einen Sinn für die exakte(re), abstrakte(re) Mathematik zu finden.	11	33	45	11
Brückenkurs besucht	6	47	38	9
Brückenkurs nicht besucht	13	26	49	11
Mir ist es leicht gefallen, mich zu motivieren, die Übungszettel usw zu bearbeiten.	16	46	33	8
Brückenkurs besucht	22	60	16	3
Brückenkurs nicht besucht	13	39	38	10
Ich habe ausreichend Zusammenhänge zwischen der Mathematik aus der Schule und Mathematik auf der Uni herstellen können.	11	31	35	23
Brückenkurs besucht	16	34	38	13
Brückenkurs nicht besucht	8	30	34	28
Meine Vorstellung vom Mathematik-Studium vor Beginn des WS 12/13 hat sich im Nachhinein als realistisch herausgestellt	28	34	32	5
Brückenkurs besucht	35	35	28	3
Brückenkurs nicht besucht	25	35	34	7

Es zeigt sich sehr deutlich, dass der Großteil der Studierenden Spaß an Mathematik in der *Schule* hatte – was als (vermuteter) Entscheidungsgrund für die Studienwahl zu erwarten war. Das ist aber nicht hinreichend, auch Spaß an Mathematik im *Studium* zu erleben. Brückenkursteilnehmende erleben das durchaus positiver als Nichtteilnehmende.[10] Immerhin rund ein Drittel hatte eher keinen Spaß mehr im ersten Semester. Bereits im ersten Semester ist die Sinnstiftung bzgl. exakterer, abstrakterer Mathematik[11] problematisch, etwa die Hälfte der Studierenden hat Probleme damit – Nichtteilnehmende eher als Brückenkursteilnehmende.[12] Die Motivation für die Bearbeitung der Übungsblätter aufzubringen, fällt Brückenkursteilnehmenden deutlich leichter als den Nichtteilnehmenden – fast die Hälfte der Nichtteilnehmenden hat diesbezüglich Probleme. Brückenkursteilnehmende schaffen es zudem besser, Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen – was durchaus ein Motivationsfaktor sein dürfte. Trotzdem hat etwa die Hälfte der Studierenden Probleme damit – trotz

10 Männer auch deutlich positiver als Frauen.
11 Vermutlich vorrangig Inhalte der *Grundbegriffe der Mathematik VU*, da die *Höhere Mathematik* längst nicht so abstrakt ist.
12 Männer fällt es leichter als Frauen, einen Sinn zu finden.

der Lehrveranstaltungen der *Höheren Mathematik* mit ihrem Calculus-Zugang und dem Fehlen des axiomatischen Zugangs (vgl. Abschnitt 3.3.2).

Zwei Kommentare von Nichtteilnehmenden:

> »Warum muss die Mathematik soo abstrakt sein für AHS-Lehrer, während Haupt- und Volksschullehrer nicht mal den Ansatz davon lernen müssen?! Finde ich schade, dass dafür so viel Energie draufgeht. Und wenn das schon sein muss, dann bitte mit genügend Vorbereitung. Man hört Begrifflichkeiten zum ersten Mal und wenn man dann im PS einen Fehler macht, bekommt man dann keine positive Tafelleistung usw.«

> »Ich denke, man weiß ›spätestens‹ nach dem 1.Semester, ob Mathematik für einen das Richtige ist oder nicht. Und eines finde persönlich ganz wichtig: Es hängt sehr viel vom Vortragenden ab, bzgl. Verständnis, Motivation zur VO zu gehen,. . . «

Bzgl. der Vorstellung vom Mathematik-Studium vor Beginn[13] des WS hatten die Brückenkursteilnehmenden etwas realistischere Erwartungen, obwohl fast ein Drittel (eher) unrealistische Erwartungen hatte.[14] Es bleibt leider weitgehend unklar, wie sich die Studierenden informiert hatten – mehr Einblick in diese Thematik ist wünschenswert. Es gab diesbezüglich kaum Kommentare, sondern eher inhaltsbezogene Aussagen wie »Ich habe gewusst, dass es ein sehr anspruchsvolles Studium ist und dass es mit Sicherheit nicht so ist wie in der Schule, jedoch wurde es ab der Zwischenklausur immer schlimmer und ich habe oft NICHTS verstanden und habe schon öfter über einen Abbruch des Mathestudiums nachgedacht.«

16.6. Abbruchquoten/Gründe

Dass Probleme im ersten Semester Studierende über einen Studienabbruch nachdenken lassen, ist naheliegend. Die Frage »Ich habe (zumindest) daran gedacht, das Studium im Lauf des 1. Semesters abzubrechen.« haben rund 40% mit »ja« beantwortet, Brückenkursteilnehmende tendenziell weniger. Auffallend ist, dass nur 20% der Männer daran gedacht haben, aber 57% der Frauen. Nachfolgend sind etliche Kommentare der Studierenden dargestellt, um einen Einblick in diese Thematik zu geben:

Es seien exemplarisch drei Meldungen (von 11) von Brückenkursteilnehmenden dargestellt:

- »Ich habe daran gedacht, da das Mathematikstudium sehr zeitaufwendig ist. Das Lösen der Übungsblätter nimmt sehr viel Zeit in Anspruch, man muss jede Woche Leistung erbringen (Proseminar + Kreuzliste). Da das Lösen der Aufgaben bei mir sehr viel Zeit in Anspruch nimmt, habe ich mich natürlich auch gefragt, ob mein mathematisches Verständnis ausreichend für das hohe mathematisches Niveau auf der Uni ist.«
- »weil ich anfangs keinen Spaß daran gefunden habe und es verdammt schwer war oder immer noch ist, die mathematische Formulierung und Schreibweisen zu verstehen. Es war und ist sehr deprimierend wenn man nicht alleine auf die Übungsbeispiele draufkommt, was man aus der Schule gewöhnt war.«
- »Es war extremst anstrengend und nach den Zwischenklausuren (beide 5) auch ziemlich demotivierend, denn wenn man meint, den Stoff eigentlich gar nicht so schlecht zu können, und dann bei den Klausuraufgaben nicht wirklich was kann, ist das nicht motivierend«

In ähnliche Richtungen gingen die 16 Meldungen der Nicht-Brückenkursteilnehmenden, etwa

- »Überforderung, da wir in der Schule zu wenig gelernt haben und der Stoff, der nachzuholen ist, würde sich parallel zum Studium nicht ausgehen.«
- »Da ich leider den Brückenkurs nicht besucht hatte, war mir ein konkreter Einblick in die universitäre Mathematik vor Studienbeginn nicht möglich und ich hatte den Zeit und Arbeitsaufwand definitiv unterschätzt.«

---

13 Evtl. war diese Frage für die Brückenkursteilnehmenden nicht eindeutig. Ist *vor* dem Brückenkurs gemeint oder *zwischen* Brückenkurs und Studium? Es ist wohl eher davon auszugehen, dass »vor dem Brückenkurs« naheliegender ist.

14 Männer hatten eher realistische Erwartungen als Frauen.

- »Obwohl ich den Eindruck hatte, den Stoff verstanden zu haben, hatte ich nur sehr wenige Punkte bei den Klausuren... So kamen Selbstzweifel auf.«
- »Zu abstrakt, keine oder eher wenig Verbindung zu Schulmathematik.«
- »Weil es für mich einfach nicht mehr viel mit der Schule zu tun hatte und ich mir nicht vorstellen konnte, dadurch eine gute Lehrerin zu werden.«
- »Weil es ziemlich zeitaufwendig ist, sich immer für die Proseminare/ Übungen vorzubereiten und weil der Stoff ziemlich schnell durchgenommen wird, so dass ich manchmal Probleme hatte, alles mitzulernen bzw. zu verstehen.«

Noch rund 30% der Studierenden sind sich Mitte des zweiten Semesters unsicher, ob sie das Studium noch abbrechen sollen. 78% der Brückenkursteilnehmenden geben an, dass sie auf keine Fall abbrechen werden, bei den Nichtteilnehmenden sind es 60%. Ein Motivationsgrund wird durch folgendes Kommentar deutlich: »Der Traum vom Mathe-Lehrer führt nur über dieses Studium!«.

Trotz häufiger Abbruchgedanken bleibt die Einschätzung zur richtigen Studienwahl der Studierenden überraschend positiv, wie Tabelle 16.2 zeigt. Brückenkursteilnehmende sind deutlich zufriedener als Nichtteilnehmende, Männer tendenziell tendenziell zufriedener als Frauen. Insgesamt scheint es vor allem unter den Nichtteilnehmenden eine weibliche Risikogruppe zu geben, die mit eher weniger realistischen Vorstellungen an die Universität kommt, häufig an einen Studienabbruch denkt und die Studienwahl in Frage stellt. Gezielte Maßnahmen für diese Gruppe vor der Studienwahl scheinen sinnvoll – die Erreichbarkeit der Zielgruppe ist unklar.

Tab. 16.2.: Richtige Studienwahl, Angaben in %, 1: trifft zu, 4: trifft nicht zu

Mathe zu studieren war (im Nachhinein) die richtige Entscheidung für mich	1	2	3	4
Brückenkurs besucht	66	31	0	3
Brückenkurs nicht besucht	44	36	18	2
männliche Fragebogenteilnehmende	63	26	11	0
weibliche Fragebogenteilnehmende	49	40	12	3

16.7. Nichtbesuch des Kurses und Gründe dafür (Nichtteilnehmende)

Die Nichtteilnehmenden wurden befragt, warum sie den Brückenkurs nicht besucht hatten. Nur 13% gaben an, dass sie ihn nicht als notwendig erachtet hatten, 18% gaben die ungünstige Zeit an. 64% der Studierenden gaben an, dass sie nicht rechtzeitig vom Brückenkurs erfahren hatten.[15] Das überrascht umso mehr, da die Studierenden bei der Inskription einen Link zur Beschreibung des Angebots erhalten haben. Es scheint sinnvoll, die Bekanntmachung des Brückenkurs als verpflichtenden Schritt vor der Inskription zu setzen. Es kam auch beim offenen Feedback mehrfach, dass der Informationsfluss nicht passend funktioniert hat (vgl. Abschnitt 19.1).

Von den Nichtteilnehmenden geben immerhin 43% an, dass ein Brückenkurs im Nachhinein gesehen nötig gewesen wäre, das sind 25% der Männer und 58% der Frauen, die am Fragebogen teilgenommen haben. Rechnet man diese Quote (unter Berücksichtigung der Brückenkursteilnehmenden, die den Kurs als notwendig erachtet haben) auf alle Erstsemestrigen hoch, so hätten mindestens 50% ihrer Meinung nach einen Brückenkurs notwendig. Im Studienjahr 2012/13 wären das etwa 95 Studierende gewesen.[16] Kann in Zukunft die Reichweite erhöht werden, so ist von einem deutlich größeren Publikum auszugehen.

Die Nichtteilnehmenden wurden auch gefragt, wo sie im Vergleich zu den Brückenkurs-Besuchenden ihrer Meinung nach die meisten Nachteile hatten. Antworten waren u. A.:

- »Einstieg in das Studium, hatte weniger Kontakte zu anderen Mathematik Studierenden, hatte weniger Erfahrung mit mathematischen Schreibweisen...«
- »Ich hatte eigentlich keine Ahnung, was mich erwartet und war dadurch die ersten Wochen ziemlich stark überfordert!«
- »Waren schon vertraut mit der Form des Unterrichts.«
- »Vor allem an den ersten beiden Monaten des WS 12/13 merkte ich, dass der Brückenkurs nicht schlecht gewesen wäre, da ich länger brauchte, das Maturawissen wieder neu abzurufen und die ganzen Themen zu wiederholen und wieder zu festigen.«
- »Ich hätte nicht bemerkt, dass ich irgendwo Nachteile gehabt hätte, auch wenn wir fast nichts vom Stoff bereits in der Schule durchgemacht hatten, wurde doch in den Vorlesung und im Tutorium alles genau genug erklärt. Es wurde vom Stoff her nicht vorausgesetzt, also hatte ich keine Nachteile.«
- »Es studieren zu viele Studenten Mathematik aus falschen Gründen - nicht weil sie das Fach interessiert sondern damit sie später nicht viel korrigieren müssen oder weil die Jobaussichten gut sind. Diese Studenten werden das Studium sowieso früher oder später hinschmeißen, doch wenn sie Brückenkurse u. Ä. besuchen, wird ihnen erst später klar, dass die Mathematik ohne volles Interesse nicht zu meistern ist und sie verschwenden länger ihre Zeit. Außerdem fangen die Vorlesungen meist bei Null an und es werden ja eh Tutorien etc. für die, die sich hart tun, angeboten. Ich denke, wenn jemand eine Matura hat, kann man von demjenigen auch erwarten, dass er einige mathematische Grundlagen auch ohne Brückenkurs kennt.«

Die Ansichten diesbezüglich sind also durchaus verschieden, abhängig von den Erwartungen ans Studium und der Leistungsfähigkeit und der Lerngeschwindigkeit an sich.

15 Die Maßnahmen, wie der Brückenkurs bekannt gemacht wurde, sind in Abschnitt 9.6 aufgelistet.
16 Außerdem ist davon auszugehen, dass die durch den Fragebogen nicht erreichten Studierenden eine noch größere Risikogruppe darstellen.

16.8. Bewertung des Kurses nach dem ersten Semester (Nur Kursteilnehmende)

Eine Bewertung des Brückenkurses nach dem ersten Semester ermöglicht es, den Studierenden eine realistische Einschätzung zu geben, in wie weit der Kurs tatsächlich eine gute Vorbereitung auf das Studium war.

Auch nach dem ersten Semester wird die »Zusammenfassung von Schulinhalten (z. B. zum Auffrischen bzw. zum Ausgleichen von Defiziten)« als sehr sinnvoll empfunden (72% trifft zu, 25% trifft eher zu). Fast genauso positiv wird der »Vorgriff auf Themengebiete (z.B. Grenzwerte, Stetigkeit, ...) z. B. als Erleichterung für LVen des ersten Semesters« empfunden (72% trifft zu, 19% trifft eher zu). Dagegen war der Brückenkurs eher keine Entscheidungshilfe bei der Studienwahl – dafür ist es im September offenbar schon zu spät.[17] Auf das Skriptum des Kurses und die behandelten Übungsaufgaben wurden von rund der Hälfte im Lauf des ersten Semesters zurückgegriffen. Das Stundenausmaß für die Stoffmenge im Kurs wird nach Ende des ersten Semesters als ausreichender bewertet als direkt nach dem Kurs.[18]

Die Notwendigkeit des Brückenkurses nach dem Ende des ersten Semesters wird ähnlich drastisch eingeschätzt wie nach Ende des Kurses (44% trifft völlig zu, 38% triff eher zu). 19% geben an, dass er eher nicht notwendig war. Auch nach dem ersten Semester wird der Brückenkurs als gute Vorbereitung auf das Studium und das erste Semester gesehen (50% trifft völlig zu, 38% trifft eher zu). Dass der Brückenkurs die Studierenden für abstrakte(re), exakte(re) Mathematik begeistern konnten, finden 22% völlig und 60% eher. Besonders erfreulich ist, wie gut der Brückenkurs ausreichend Zusammenhänge zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik herstellen konnte (44% trifft völlig zu, 47% trifft eher zu). Damit konnten wesentlich Ziele (Sinnstiftung) erreicht werden.

Im Nachhinein wird das Niveau im Vergleich zum ersten Semester deutlich anders bewertet als direkt nach Ende des Kurses. 75% schätzen das Niveau passend ein, 19% als zu niedrig bzw. zu wenig anspruchsvoll. Noch am Ende des Kurses wurde das Niveau als eher zu schwierig eingeschätzt. Insgesamt darf davon ausgegangen werden, dass das Niveau angemessen fordernd war.

Interessant sind die Meldungen auf die Frage »Davon habe ich im Brückenkurs im Nachhinein am meisten profitiert.« Das umfassende, ganzheitliche Konzept hat offenbar für alle Teilnehmenden Passendes beinhaltet. Dazu eine Auswahl der Kommentare:

- »Der erste Einblick war sehr gut. Auch die Vorbereitung auf Rückschläge, Dinge die man nicht gleich versteht etc. war sehr gut, da man so in den ersten Wochen auf der Uni nicht gleich verzweifelte, sondern weitermachte und weiterkämpfte ;-)«
- »Zeichen von Funktionen. Sinnhaftigkeit des Grenzwertes – Unterschied zu Stetigkeit«
- »Unterschied zwischen Stetigkeit, GW [Grenzwert] ϵ-δ-Definition«
- »Lerngruppen! Durch den Brückenkurs wurden Bekanntschaften geschlossen und Lerngruppen gebildet, die heute noch bestehen! Da im Brückenkurs ein sehr hohes Tempo vorgelegt wurde, und man sich daran anpasste, war dann die darauffolgende LV (z. B. *Höhere Mathematik I VO*), die meiner Meinung nach vom voranschreitenden Tempo nicht so schnell war wie der Brückenkurs, grundsätzlich sehr verständlich und in der LV nachvollziehbar.«
- »Erste Einblicke in die Hochschulmathematik, selbstständige Bearbeitung von Übungszetteln, es war im Großen und Ganzen dem ersten Semester sehr ähnlich und somit eine tolle Vorbereitung. Ich habe auch schon erste Kollegen kennengelernt und konnte somit schon in Gruppen lernen. Auch Stoffe wie Vektoren und Einheitskreis habe ich zum ersten Mal gehört und somit war der erste Schock in der VO nicht allzu groß.«
- »Funktionen z. B. $\sin$, $\cos$, $\tan$, e, $\ln$ (wurden bei uns in der Schule nie durchbesprochen)«

17 Mit WS 14/15 plant die Uni Graz ein aufwändigeres Aufnahmeverfahren für Lehramtsstudierende (aller Fächer). Ab WS 15/16 treten dann ohnehin neue Lehramtsstudien im Bachelor-Master-Format in Kooperation mit den Pädagogischen Hochschulen (den bisherigen Ausbildungsstätten für den Elementar- und Primarbereich in Österreich) in Kraft. Ein vorangestellter Brückenkurs ist eine Überlegung wert.

18 Die Studierenden haben sich vermutlich an das universitäre Tempo und die höhere Stoffmenge gewöhnt.

- »Ich hatte schon ein solides Basis-Wissen von den ganzen Themen, die wir dann in den Vorlesungen behandelt haben.«
- »von allem :)«

Abschließend sind noch drei weitere Kommentare von Brückenkursteilnehmenden angeführt:

- »Mir haben die Tipps am Ende des Brücken Kurses für das Studium sehr geholfen. Vielen dank dafür. Und ich durfte so auch viele Liebe Menschen kennenlernen.«
- »Brückenkurs war wirklich hilfreich, vor allem weil man, meiner Meinung nach, nach Abschluss einer HAK viel zu wenige Vorkenntnisse fürs Studium hat. Ich hatte z. B. beim Beginn keinen Plan wie ich cos zeichnen sollte usw. Wirklich ein großes Lob für dein Engagement!«
- »Der Brückenkurs diente als Auffrischungskurs der Mathematik. Da es in meiner HTL in der fünften Klasse keine Mathematik mehr gab, ich deshalb auch nicht maturieren konnte und auch noch ein Jahr Zivildienst vor dem Studium war, hatte man schon wieder Einiges vergessen. Ich bin sehr positiv begeistert vom Brückenkurs, ich konnte dadurch wieder Vieles in Erinnerung rufen. Meiner Meinung ist sehr sauber und exakt erklärt worden und auf Verständnisschwierigkeiten sehr gut eingegangen worden. Man ist aber auf Vieles erst im Studium draufgekommen, was im Brückenkurs gemeint war. Ein besseres Verständnis hat der Brückenkurs auf alle Fälle gebracht! Die Jahrgänge vor mir haben bedauert, dass es zu ihren Zeiten noch keinen Brückenkurs gegeben hat.«

Insgesamt wird deutlich, dass ein Brückenkurs mehr sein kann und – laut den positiven Rückmeldungen – sein soll bzw. muss als das bloße Wiederholen von Schulwissen und das Auffüllen etwaiger Lücken. Neben sozialen Aspekten (Freundschaften und Lerngruppen) kann der motivationale und sinnstiftende Anteil gar nicht hoch genug bewertet werden. Es scheint sehr wichtig, dass die Studierenden das Gefühl haben, dass sich die Universität um einen positiven Studieneinstieg bemüht. Trotz einiger kleinerer Verbesserungsvorschläge (kürzerer Pause etc.) bleiben die Erfahrungen auch nach dem ersten Semester noch sehr positiv. Die Frage »Ich würde den Brückenkurs wieder besuchen« beantworten 94% mit ja, 53% unabhängig von den jeweiligen Vortragenden des Kurses. 6% sind unentschlossen.

17. Zahlen und Leistungen der Erstsemestrigen

In den Kapiteln 15 und 16 wurde die Wirksamkeit des Brückenkurses an subjektiven Einschätzungen der Teilnehmenden gemessen. Dieses Kapitel betrachtet dagegen die Prüfungsleistungen am Ende des ersten Semesters im Lehramtsstudium.[1] Untersucht werden dabei die Abbruchquoten im Studium, die Anmeldezahlen zu den Lehrveranstaltungen, die Anzahl der beurteilten Studierenden je Lehrveranstaltung sowie die Notenverteilungen.

17.1. Abbruchquoten und Anmeldezahlen

Von den 191 Studierenden, die im WS 12/13 ihr Mathematik Lehramtsstudien begonnen hatten, haben bis zum Sommersemester 38 Studierende dieses Studium wieder geschlossen, d. h. offiziell beendet (davon 5 Brückenkursteilnehmende). Die offizielle Abbruchquote beträgt demnach (nur) knapp 20 % bei allen Erstsemestrigen, ca. 13% bezogen auf die Brückenkursteilnehmenden. Diese Quote ist zu niedrig, wenn man aus Erfahrung mit den realen Anmeldezahlen bei Lehrveranstaltungen für das dritte Semester vergleicht, d. h. die reale Abbruchquote ist höher, vgl. Kapitel 5.

> Lesehinweis:
>
> Die jeweiligen Säulen in den folgenden Abbildungen beziehen sich grundsätzlich immer auf die jeweilige Grundgesamtheit: BK besucht (N = 39), BK nicht besucht (N = 152), Erstsemestrige gesamt (ges) (N=191).

Abb. 17.1 zeigt, dass nur etwa 60% aller Erstsemestrigen des WS 12/13 in den für sie zu besuchenden Lehrveranstaltungen laut Musterstudienablauf (positiv oder negativ) *beurteilt* wurden.[2] Neben einem kleinen Anteil an Studierenden, die aufgrund von Überschneidungen einige Lehrveranstaltungen tatsächlich nicht besuchen konnten, ist beim überwiegenden Rest davon auszugehen, dass sich diese Studierenden im Lauf des Semesters noch rechtzeitig abgemeldet haben[3] oder (bei der Vorlesung) nie zur Prüfung angetreten sind.

Studierende, die den Brückenkurs besucht haben, sind deutlich häufiger ausreichend lange bei einer Lehrveranstaltung dabei, bis sie überhaupt erst eine Beurteilung bekommen, als Nichtteilnehmende. Das kann ein Hinweis dafür sein, dass Brückenkursteilnehmende motivierter sind. Die nichtbeurteilten Studierenden können als Hinweis für eine mögliche reale Drop-out-Rat angesehen werden. Aufgrund dieser Quoten ist davon auszugehen, dass etwa ein Drittel der Studierenden innerhalb weniger Wochen abbricht, dass sind auf das Studienjahr 2012/13 (rund 190 Erstsemestige) etwa 60 Studierende. Mit Ende des Sommersemester[4] dürfte ein weiterer Teil abbrechen, was letztlich etwa eine Abbruchquote von 40% entspricht.

1 Ist in diesem Kapitel also von »Erstsemestrigen« die Rede, so sind damit nur die Erstsemestrigen des Lehramtsstudiums gemeint. Analoges gilt für die Brückenkursteilnehmenden. Bachelor-Studierende wurden wegen der geringen Teilnehmenzahl nicht untersucht.
2 Die Daten dazu wurden erst Anfang Juli 2013 erhoben, wodurch Studierende mehrfach Gelegenheit hatten, die Prüfung zur *Höheren Mathematik I VO* zu absolvieren bzw. nachzuholen.
3 Abmeldungen waren noch bis zum 15.11. möglich. Semesterbeginn war der 1. Oktober.
4 Das Beihilfensystem für Studierende in Österreich ist so geregelt, dass es für Studierende vorteilhaft ist, ihr neues Studium erst mit dem dritten Semester zu inskribieren.

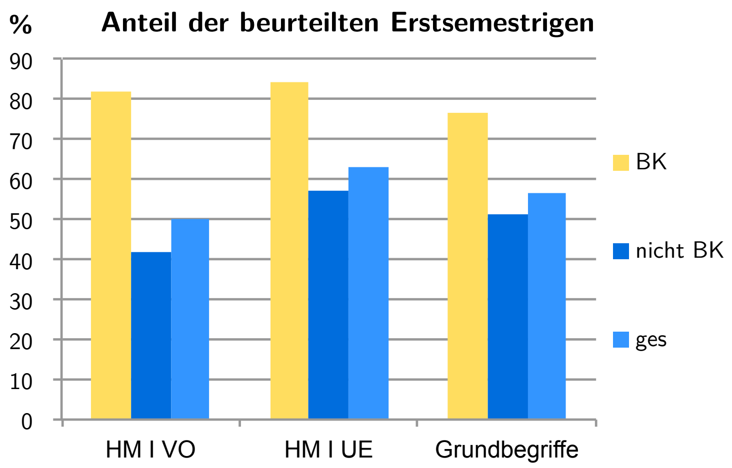


Abb. 17.1.: Prozentsatz aller Erstsemestrigen (WS 12/13), die bei den jeweiligen Lehrveranstaltungen auch (positiv oder negativ) beurteilt wurden.

17.2. Durchfallquoten und Notenverteilung

Abbildung 17.2 zeigt, dass (bezogen auf die jeweilige Grundgesamtheit) Brückenkursteilnehmende auch häufiger *positiv* beurteilt werden als Nichtteilnehmende. Trotzdem ist die Quote besonders bei den *Grundbegriffen der Mathematik VU* mit 20% sehr niedrig, was die Schwierigkeiten der Erstsemestrigen deutlich zeigt. Nimmt man als jeweilige Grundgesamtheit nur die beurteilten Erstsemestrigen (Abbildung 17.3), so fallen die Erfolgsquoten etwas höher aus.

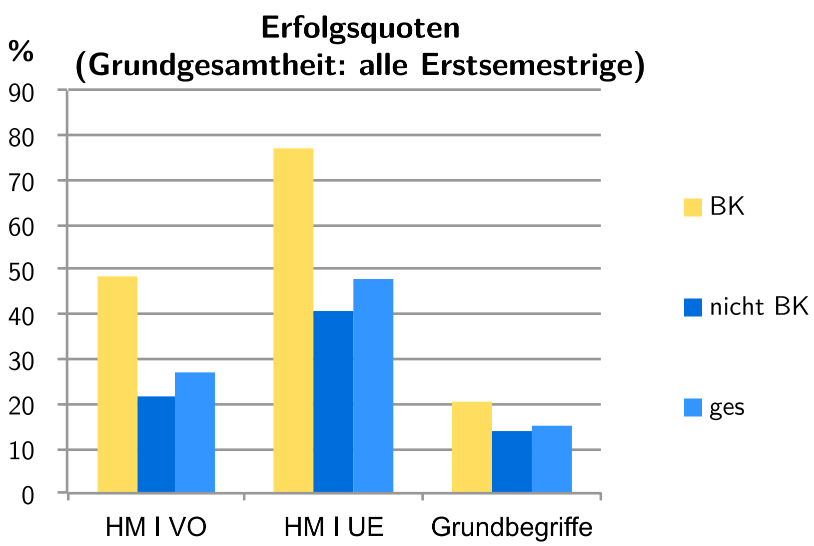


Abb. 17.2.: Prozentsatz aller Erstsemestrigen, die positiv beurteilt wurden (N=191)

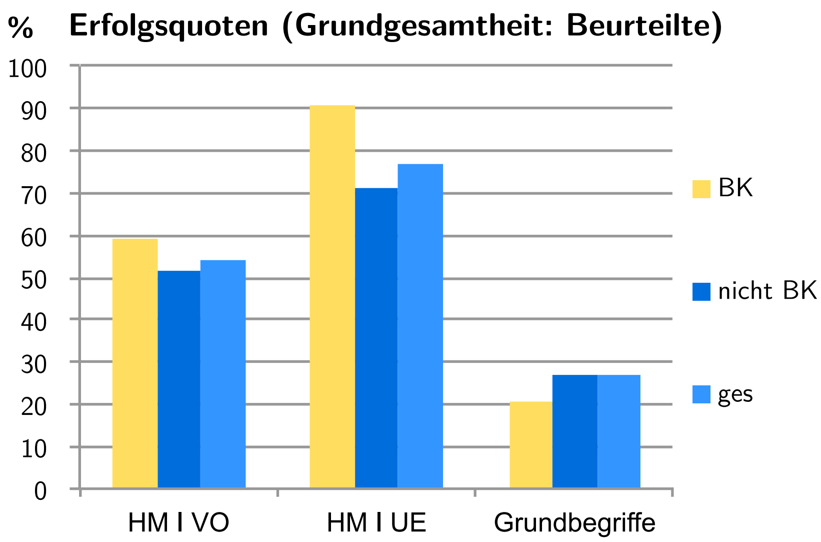


Abb. 17.3.: Prozentsatz aller beurteilten Erstsemestrigen, die positiv beurteilt wurden (N=191)

Bei der *Höheren Mathematik I VO* zeigt Abbildung 17.4, dass die beurteilten Brückenkursteilnehmenden etwas positiver abschneiden als die Nichtteilnehmenden. Höhersemestrige schneiden interessanterweise schlechter ab als Erstsemestrige. Insgesamt haben 55% der beurteilten Studierenden eine negative Note bekommen.

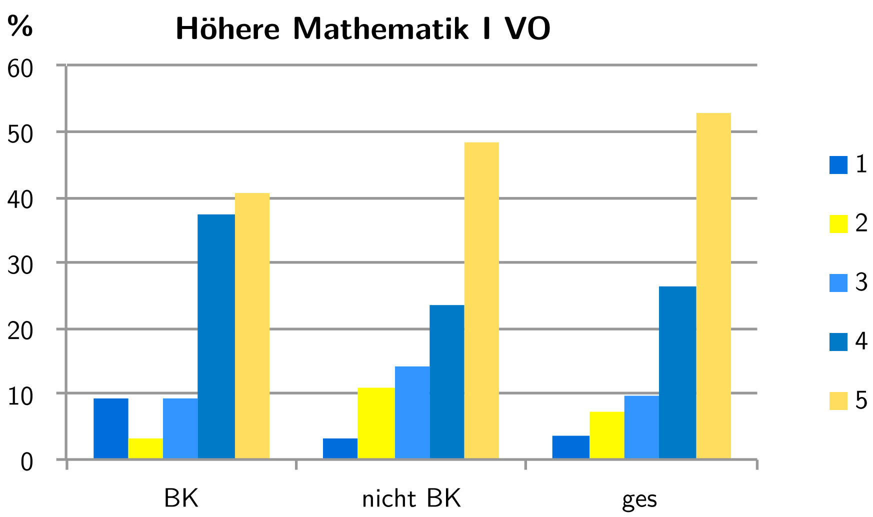


Abb. 17.4.: Notenverteilung (%) der beurteilten Studierenden bei der *Höheren Mathematik I VO* WS 12/13

Bei der *Höheren Mathematik I UE* zeigt Abbildung 17.5, dass die beurteilten Brückenkursteilnehmenden deutlich positiver abschneiden als die Nichtteilnehmenden: Etwa 57 % der Brückenkursteilnehmenden schließen mit der Note 1 (sehr gut) oder 2 (gut) ab – bei den Nichtteilnehmenden sind es etwa 28%. Höhersemestrige schneiden wieder vergleichsweise schlecht ab. Insgesamt haben nur 25% der beurteilten Studierenden eine negative Note bekommen.

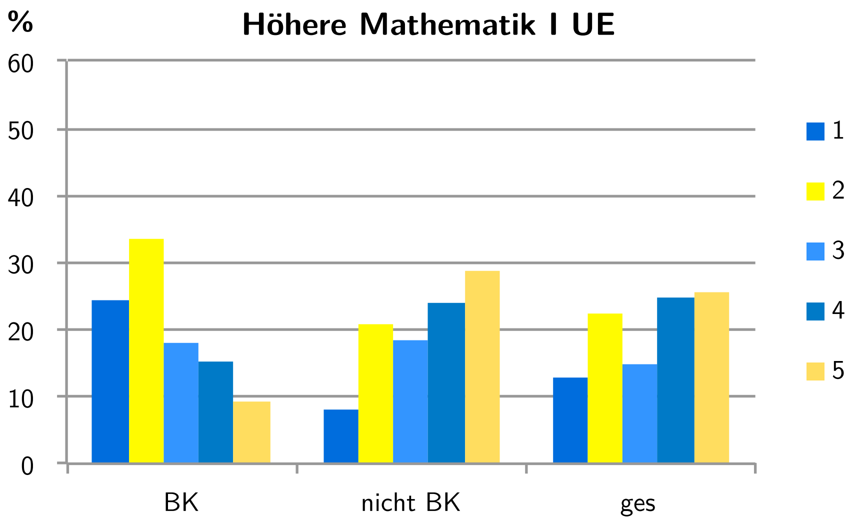


Abb. 17.5.: Notenverteilung (%) der beurteilten Studierenden bei der *Höheren Mathematik I UE* WS 12/13

Im Vergleich zur Vorlesung fällt auf, dass die Noten insgesamt deutlich besser sind, obwohl die Inhalte weitgehend ident sind. Es scheint, dass die Studierenden mit rechenorientierten Aufgaben besser zurecht kommen als mit theoriebezogenen Aufgabenstellungen. Daneben kann sein, dass es den Studierenden schwer fällt, sich auf VO-Prüfungen vorzubereiten, wenn im Vorfeld nicht (wie in der Übung verpflichtend) Übungsaufgaben behandelt wurden, die eine Orientierung für die Prüfung geben.

Bei den *Grundbegriffen der Mahtematik VU* zeigt Abbildung 17.6, dass Brückenkursteilnehmende und Nichtteilnehmende in etwa gleich schlecht abschneiden. Höhersemestrige schneiden tendenziell etwas besser ab. Auch im Studienjahr 2012/13 sind rund 70 % der beurteilten Studierenden negativ, was aufgrund der letzten Jahre nicht ungewöhnlich ist.

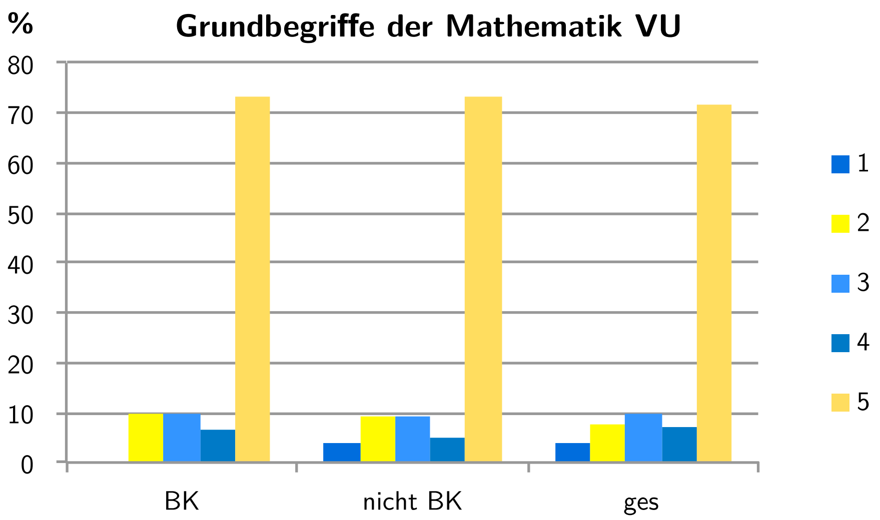


Abb. 17.6.: Notenverteilung (%) der beurteilten Studierenden bei den *Grundbegriffen der Mathematik VU* WS 12/13

17.3. Interpretation der Studienleistungen

Eine Interpretation der zuvor dargestellten Daten im Hinblick auf kausale Zusammenhänge mit dem Besuch des Brückenkurs muss mit Bedacht geschehen. Es kann nicht eingeschätzt werden, in wie weit sich die Gruppen der Kursteilnehmenden und Nichtteilnehmenden schon vor dem Kurs unterschieden haben – und ob sie nicht auch ohne den Kursbesuch im Lauf des ersten Semesters gut oder besser mit dem Studium zurechtgekommen wären.

Nichtsdestotrotz zeigt sich bei den Lehrveranstaltungen der *Höheren Mathematik* (VO und UE), dass die Brückenkursteilnehmenden besser abschneiden als die Nichtteilnehmenden. Das kann dahingehend interpretiert werden, dass das Behandeln der typischen Problemfelder diesbezüglich (Grenzwerte, Stetigkeit usw.) wirksam war und die Kursteilnehmenden dadurch im Laufe des Semesters besser mit diesen Inhalten zurechtkamen. Die niedrige Durchfallquoten bei der *Höheren Mathematik I UE* würden sich mit der adäquate Vorbereitung auf den *didactic contract* (Übungsmodus, Aufgabentypen etc.) durch den Brückenkurs erklären lassen.

Dass es kaum unterschiedliche Leistungen in der Lehrveranstaltung *Grundbegriffe der Mathematik* gibt, lässt sich dadurch erklären, dass ein nur zweiwöchiger Kurs kein grundlegendes, abstraktes Verständnis von formaler Mathematik und den damit rigorosen Beweismethoden bewirken kann – was auch nicht Schwerpunkt des Kurses war.

Insgesamt sind Studierende, die den Brückenkurs besucht haben, besser mit dem Studium zurechtgekommen, haben das Studium weniger häufig abgebrochen, haben bei Lehrveranstaltungen länger durchgehalten und haben Lehrveranstaltungen auch positiver absolviert.

Teil V.

Resümee

18. Zusammenfassung

»Tell me what works in the classroom.«
(Alan H. Schoenfeld unterstellt MathematikerInnen diesen Anspruch
an »research in mathematics education«, [89] S.222)

Diese Arbeit hat Antworten auf die Frage

> Welche Problemfelder zeigen sich beim Einstieg in ein Mathematik-Studium (Lehramt für Höhere Schulen oder Bachelor Fachwissenschaft an der Uni Graz) und wie können diese durch einen Brückenkurs entschärft werden?

gesucht. Ausgehend von einer Analyse der Curricula der Schulen (AHS) und der Mathematik-Studien an der Uni Graz wurden Problemfelder charakterisiert, die im weiteren Verlauf der Arbeit durch zahlreiche Erfahrungen des Autors im Hinblick auf Inhalte, Methoden, Motivationales und Sinnstiftung ergänzt wurden. Daraus wurde ein Konzept für einen zweiwöchigen, ca. 22-stündigen Präsenz-Brückenkurs mit Vorlesungs-, Übungsteil und einem Selbststudienanteil entwickelt. Dieser Kurs wurde im WS 12/13 umgesetzt – 50 Studierende haben daran teilgenommen. Die Rückmeldungen und Erfahrungen sind durchwegs positiv – das Konzept kann als sinnvoll und zielführend bezeichnet werden. Im Folgenden werden Antworten auf die Forschungsfragen gegeben, die in der Einleitung, Kapitel 1, gestellt wurden.

Über welche (schulischen) Voraussetzungen verfügen die angehenden Studierenden laut Papier? Was wird von den Erstsemestrigen im Lauf des ersten Semesters erwartet?

Die Erstsemestrigen weisen durchgehend *sehr gute* bis *gute* Schulnoten in der Oberstufe auf. Allerdings spiegelt sich das (zumindest bei den Brückenkursteilnehmenden) kaum in den Leistungen wider, über die sie laut Lehrplan verfügen sollten. Daneben stellen viele Studierende unzureichend behandelte Inhalte in der Schule fest.

Von den Erstsemsestrigen wird neben einem sofortigen Zurechtkommen mit universitären Lernformen, darunter theorielastiger Frontalvortrag in Vorlesungen und selbstständiges Bearbeitung von Übungsaufgaben, auch erwartet, dass sämtliche aufbauende Inhalte ohne wiederholendes Üben angenommen, verstanden und angewandt werden können. Daneben müssen sie den Ansprüchen akademischer Mathematik (Formalismen, Logik, Beweisen, Abstraktion) innerhalb kurzer Zeit genügen – bei gleichzeitig kaum vorhandenen Vorerfahrungen.

Woraus begründen sich die Probleme der Erstsemestrigen? Welche Problemfelder können charakterisiert werden?

Der Eintritt in ein Studium stellt einen veränderten *didactic contract* mit wesentlichen Verschiebungen (Verantwortung, Selbststudienanteil, Theoriemenge usw.) dar. Der schulische Unterricht bereitet im Allgemein darauf nur unzureichend vor. Akademische Mathematik stellt deutlich andere Anforderungen – die notwendigen Fähigkeiten (Abstraktion, logisches Denken, Zusammenhänge und Transferleistungen herstellen können) müssen sich oft erst entwickeln. Wichtige Ideen werden in der Schulmathematik kaum formal behandelt, die Studierenden verfügen über wenig tragfähiges Vorwissen. Daraus ergeben sich inhaltsbezogene Schwierigkeiten (z. B. Grenzwerte). Das macht es umso schwieriger, einen Sinn in akademischer Mathematik und damit Motivation zu finden. Weiters erschweren falsche Vorstellungen vom Studium (und unpassende *beliefs*) das Zurechtkommen mit den neuen Anforderungen und Inhalten.

Welche dieser Problemfelder können im Rahmen eines Brückenkurses vor dem Studium behandelt werden?

Im Wesentlichen kann und soll ein Brückenkurs sämtliche der festgestellten Problemfelder aufgreifen. Auch wenn man nicht voraussetzen kann, dass alle kurzfristig gelöst werden können, so kann und soll ein Brückenkurs zumindest als Ausgangspunkt für die Studierenden dienen, sich aktiv mit ihren Problemen zu beschäftigen.

Welches Konzept soll ein Brückenkurs haben, um die festgestellten Problemfelder zu entschärfen? Welche Inhalte und Methoden sind dafür zweckmäßig?

Durch das Zusammenkommen von vielfältigen Diskrepanzen ist ein ganzheitliches Konzept notwendig und sinnvoll. Die Wiederholung (und Exaktifizierung) von Schulwissen dient – neben Logik und Mengenlehre – als Ausgangsbasis im Kurs und baut etwaige *obstacles* ab. Darüber hinaus erlaubt der exemplarische Vorgriff auf besonders problembehaftete Inhalte des ersten Semesters, mit steigender Abstraktion (z. B. Verknüpfungen) und den typischen Zugängen der Hochschulmathematik zurecht zu kommen. Inhalte wie Funktionen, Logik und Grenzwerte, aber auch Folgen, Reihen, Differentialrechnung und Integralrechnung bieten sich an. Ein erstes Thematisieren von Definition – Satz – Beweis hilft in den neuen *didactic contract* einzusteigen. Eine Abwechslung bzgl. Niveau, Abstraktionsgrad, Anschaulichkeit und verwendeter Aufgabenstellung (Beweis- und Rechenaufgaben) regt die Studierenden auf vielen Ebenen an. Algebraische Grundlagen auf Schulniveau können weitgehend der Eigenverantwortung der Studierenden überlassen werden.

Methodisch scheint ein theorieorientierter Vorlesungsteil zur Vermittlung des Basiswissens und zur Gewöhnung an den typischen Universitätsalltag sinnvoll zu sein. Beispiele und Herleitungen oder Beweise ergänzen die Theorie im Vorlesungsteil. Ein hoher Selbststudienanteil der Teilnehmenden ist durch das Bearbeiten von Übungsaufgaben anzustreben, wodurch sie bereits Erfahrung mit der selbstständigen Aufgabenbearbeitung sammeln können und erkennen, dass Mathematiklernen ein aktiver Prozess sein muss. Die abgegebenen Übungsaufgaben werden vom Kursleiter durchgesehen und Lösungen zu den Übungsaufgaben in dafür reservierten Einheiten (Übungsteil) vom Kursleiter präsentiert.

Die Methoden wurden durchwegs positiv beurteilt. Mit diesem Konzept kann einE LehrendeR 50 Studierende und mehr betreuen.

Ein Ausmaß von gut 2 Stunden am Tag bei einem 10-tägigen Kurs ist mindestens notwendig, mehr Zeit ist vorteilhaft, um Themen besser zu vertiefen oder größere Lücken aufholen zu können.

Wie lässt sich die Wirksamkeit eines Brückenkurses untersuchen? Welche Auswirkungen zeigen sich unmittelbar nach dem Kurs und am Ende des ersten Semesters?

Einfacher als durch leistungsmessende Kontrollgruppendesigns lassen Evaluierungen mittels Fragebögen sowie qualitative Untersuchungen durchführen. Die Wirksamkeit des Brückenkurses wurde daher mit folgenden Instrumenten gemessen: Orientierungstest und Abschlusstest im Brückenkurs, Fragebogen am Ende des Brückenkurses; sowie für alle Erstsemestrigen ein Fragebogen nach dem ersten Semesters und ein Vergleich der Lehrveranstaltungsnoten.

50 Studierende haben den Brückenkurs im WS 12/13 besucht, davon studierten 39 Lehramt.

Der Vergleich vom Orientierungstest zum Endtest zeigt, dass der Wissenszuwachs innerhalb von 2 Wochen nicht überschätzt werden darf – zumindest, wenn keine Unterlagen bei den Tests erlaubt sind. Auch am Ende des Kurses im Abschlusstest zeigen sich Probleme bei Themen und Niveau, die (laut Lehrplan) eigentlich der Schule zuzumuten sind. Nichtsdestotrotz beurteilen die Studierenden den Kurs sehr positiv, berichten über einen deutlichen Lernzuwachs und ein sinnvolles Konzept. Die noch am Ende des Kurses konstatierte teilweise Überforderung (z. B. Grenzwerte, Stetigkeit, Folgen, Reihen) wird nach dem ersten Semester als passender Schwierigkeitsgrad für die Lehrveranstaltungen eingeschätzt. Der Einfluss des Lehrenden zum positiven Feedback darf nicht unterschätzt werden (Motivation, didaktische Fähigkeiten, fachliche Fähigkeiten, Interesse am Lernerfolg der Studierenden usw.).

Bei den Untersuchungen nach Ende des ersten Semesters wurden nur mehr die Lehramtsstudierenden berücksichtigt, die auch den überwiegenden Teil der Mathematik-Studierenden der Uni Graz darstellen. 93 der nominell 191 Erstsemestrigen im Mathematik-Lehramtsstudium haben nach dem ersten Semester am Fragebogen teilgenommen. Rund 130 Studierende dürften das Studium auch im zweiten Semester noch aktiv betreiben. Der überwiegende Teil der besonders gefährdeten Gruppe der StudienabbrecherInnen hat nicht am Fragebogen teilgenommen – trotz prinzipieller Erreichbarkeit. Es ist davon auszugehen, dass diese Gruppe mit (noch) mehr Problemen zu kämpfen hatte. Unter den Brückenkursteilnehmenden betrug die Rücklaufquote dieses Fragebogens 80%. Nachfolgend sind einige Erkenntnisse dargestellt:

- Über 70% der Brückenkursteilnehmenden sind weiblich, bei den Erstsemestrigen insgesamt sind es etwas über 50%. Männer haben tendenziell schlechtere Schulnoten, aber gleichzeitig bei den meisten Aspekten (z. B. Abstraktion) im ersten Semester weniger Probleme.
- Brückenkursteilnehmende haben geringfügig bessere Schulnoten als Nichteilnehmende, beurteilen ihr schulisches Vorwissen aber weniger ausreichend als Nichtteilnehmende (basierend auf Selbsteinschätzungen).
- Brückenkursteilnehmende geben an, mehr inhaltsbezogene Probleme (etwa mit Funktionen, Grenzwerten) im 1. Semester zu haben – was paradox ist, da sie bei den entsprechenden Lehrveranstaltungen besser abschneiden.
- Brückenkursteilnehmende kommen nicht besser mit den Eigenheiten, Konzepten und Zugängen der Hochschulmathematik (z. B Beweisen, Übertragen von Theorie auf Aufgaben, Abstraktionsgrad usw.) zurecht als Nichtteilnehmende (basierend auf Selbsteinschätzungen). Das zeigt die Grenzen eines zweiwöchigen Kurses.
- Brückenkursteilnehmende haben weniger Probleme mit universitären Lern- und Lehrformen (z. B. Vorlesungen, Übungen) – ausgenommen dem Zeitmanagement (basierend auf Selbsteinschätzungen).
- Brückenkursteilnehmende haben mehr Spaß an Mathematik im ersten Semester als Nichtteilnehmende – beim Spaß an Mathematik in der Schule zeigt sich keine Unterschied (basierend auf Selbsteinschätzungen).
- Brückenkursteilnehmende finden leichter Sinn an abstrakter(er), exakter(er) Mathematik, sind motivierter bei der Bearbeitung von Übungsblättern und können leichter Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herstellen (basierend auf Selbsteinschätzungen).
- Brückenkursteilnehmende beurteilen ihre Studienwahl positiver (basierend auf Selbsteinschätzungen).
- Die Sinnhaftigkeit, das Konzept sowie der Nutzen des Brückenkurses als Vorbereitung auf das erste Semester wird auch nach dem ersten Semester durchgehend sehr positiv beurteilt.
- Die Brückenkursteilnehmenden schneiden bei den Calculus-artigen Lehrveranstaltungen *Höhere Mathematik I VO* und der zugehörigen Übung (Analysis-Inhalte: Funktionen, Grenzwerte, Differentialrechnung, Integralrechnung) besser ab. Bei der rigorosen, abstrakten, beweislastigen Lehrveranstaltung *Grundbegriffe der Mathematik VU* (Logik, Beweisarten, Relationen, Abzählbarkeit) zeigt sich kein Unterschied.

Schlusswort

Es zeigt sich, dass die vielfältigen Probleme des Studieneinstiegs durch einen Brückenkurs behandelt werden können. Zwar lassen sich die tiefliegenden Schwierigkeiten mit Beweisen und Abstraktion nicht beseitigen, die Studierenden werden allerdings darauf sensibilisiert und können entsprechend handeln. Motivationale und sinnstiftende Aspekte dürfen dabei nicht unterschätzt werden – ebenso wenig der Einfluss des Kursleitenden als Person. Der subjektive Beitrag zur Erleichterung des Studieneinstiegs ist offenbar sehr hoch.

Damit kann ein Brückenkurs Mathematik zur Verbesserung der Situation am Studienbeginn beitragen. Das vorliegende Konzept kann daher (nach Anpassung an die gegebenen Umstände und entsprechender Schwerpunktsetzung) auch für andere Universitäten empfohlen werden.

19. Ausblick

In diesem letzten Kapitel wird noch ein Ausblick auf die nächsten Jahre, auf weitere Kurse und die geänderten Rahmenbedingungen an der Uni Graz gegeben. Daneben wird noch kurz über weiterführende Forschung berichtet, die entweder momentan in Arbeit ist oder die aus Sicht der Übergangsproblematik von besonderem Interesse scheint.

19.1. Verbesserungsvorschläge zum abgehaltenen Brückenkurs

Erster und wichtigster Punkt ist die Erhöhung der Reichweite des Kurses bzw. die Verbesserung des Informationsflusses zu den Erstsemestrigen. Das Informationsangebot gehört dahingehend ausgebaut, dass bereits bei der Inskription und Voranmeldung im Internet auf das Angebot hingewiesen wird. Der Fragebogen und die Noten bei den Lehrveranstaltungen haben deutlich gezeigt, dass die wohl größere Risikogruppe weder beim Brückenkurs noch beim abschließenden Fragebogen erreicht werden konnte. Ideal wäre eine Koppelung mit einem Self-Assessment vor der Anmeldung zum Studium. Dahingehend formulierte eine Person, die den Brückenkurs nicht besucht hat, ihren Wunsch:

> »Vielleicht könnte man den Studienanfängern sagen, welches Grundwissen verlangt wird, damit sie den Sommer über diesen Stoff nachlernen können und es dann vielleicht leichter haben. Denn ich mühe mich gerade ab, den eigentlichen Schulstoff nachzulernen. Dabei dachte ich, dass ich wirklich gut bin in Mathe. . . :/«

Ein Aspekt, der (vor allem bei größerer Teilnahmezahl) deutlicher wird, ist die richtige Wahl des Niveaus und des Tempos. Daher ist es umso wichtiger, Strategien zum Herangehen an Übungsaufgaben zu vermitteln. Die Gefahr, dass Erstsemestrige zu stark überfordert werden, kann durch eine größere Anzahl an Übungsaufgaben mit unterschiedlicherem Niveau erreicht werden. Einige Bespiele könnten als »optional« deklariert werden, zu denen es dann z. B. nur schriftliche Musterlösungen gibt.

19.2. Anpassungen an den neuen Lehramtseinstieg (Uni Graz WS 13/14)

Mit WS 13/14 starten an der Uni Graz auch die Lehramtsstudierenden (nach WS 05/06 wieder) mit der rigorosen *Analysis 1* ins Studium. Durch den Wegfall der *Grundbegriffe der Mathematik*, die die Studierenden auf die Grundbegriffe wissenschaftlicher Mathematik vorbereiten hätte sollen (naive Mengenlehre, Beweise, Relationen usw.)[1], kommt damit der *Analysis 1* eine zentrale Rolle zu: Sie muss Analysis-Inhalte und gleichzeitig hochschulmathematische Grundkompetenzen vermitteln. In wie weit diese Grundkompetenzen (Logik, Formalisieren, Beweistechniken) in der realen Umsetzung explizit thematisiert werden, ist fraglich.

Daher scheint ab WS 13/14 ein neuer Schwerpunkt auf den Brückenkurs zuzukommen, und zwar stärker als bisher (vgl. Ziele des Brückenkurses): Das Kennenlernen und (im besten Fall auch schon) Einüben von Beweistechniken. Nur die Vermittlung von Inhalten rund um das Themengebiet der Analysis ist damit (noch) weniger als bisher ausreichend. Es stellt sich die Frage, welche Inhalte zur Vermittlung der Beweiskompetenzen herangezogen werden. Inhalte mit leichter Zugänglichkeit (im Sinne von minimal notwendigem Vorwissen), mathematisches Grundlagenwissen (nützlich für das gesamte weitere Studium) oder Inhalte der Analysis (für eine auch inhaltliche Erleichterung des ersten Semesters) scheinen prädestiniert.

1 Anhand der Durchfallquoten darf der Erfolg hinterfragt werden, vgl. Abschnitt 5.

- Mengenlehre und Funktion

  Die Klassiker unter den einfachen Beweisaufgaben bieten sich durch ihren einfachen Zugang an, etwa die De'Morganschen Regeln für Mengen. Daneben ist eine vertiefte Betrachtung der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv ein hilfreicher Schritt, um den Funktionsbegriff weiterführend zu behandeln. In diesem Zusammenhang bieten sich auch das Arbeiten mit abzählbar-unendlichen Mengen an.

- Teilbarkeit, Modulo-Rechnung, Kongruenz

  Diese Inhalte benötigen kaum Vorwissen, sind zum Teil aber recht abstrakt. Allerdings sind die üblichen Beweise sehr systematisch (direkten Beweis, »brute force«).

- Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

  Diese Inhalte bestechen durch ihren universellen Charakter und im Allgemeinen durch ihre Abstraktion. Daneben bieten sich Beispiele an, bei denen man die Anschauung nutzen kann (z. B. beim Begriff der Partition, der formal sehr viel schwieriger zu handhaben ist als sein anschaulicher Bedeutung vermuten lässt).

- Analysis-Inhalte

  Da die *Analysis 1 VO* mit einem axiomatischen Zugang zu den reellen Zahlen beginnt, können Maßnahmen zum Abbau typischer *obstacles* nütztlich sein:

  »More than 40 % of students entering French universities consider that, if two numbers A and B are closer than $\frac{1}{N}$ for every positive N they are not necessarily equal, just infinitely close.«[3] S.212.

  Das *concept image* vieler Erstsemestrigen liegt demnach näher an den Ideen der non-standard Analysis als direkt an den reellen Zahlen. Daneben stellt [3] S.283 fest: »Generally, the main intellectual constructs and difficulties that students enconter [Anm. des Autors: in calculus/elementary analysis] are concerned, whether explicitly or implicitly, with the concepts of approximation and convergence.« Diese Schwierigkeiten können evtl. im Brückenkurs aufgegriffen werden.

Bei gleichbleibender[2] Stundenzahl im Brückenkurs müssen allerdings Inhalte gestrichen werden, diesbezüglich bietet sich die Integralrechnung an, die in der *Analysis 1* erst am Ende des ersten Semesters bzw. am Beginn des 2. Semesters in der *Analysis 2* behandelt wird – und zwar in Gestalt des Cauchy-Integrals (und nicht des schulischen Riemann-Integrals).

19.3. Weitere Unterstützungsmaßnamen für den Studieneinstieg

Durch die vorangegangenen Abschnitte dieser Arbeit wurde deutlich, dass der Studieneinstieg in einem Mathematik-(Lehramts-)Studium mit zahlreichen Hürden verbunden ist. Es ist nun zunächst eine (bildungs-)politische Frage, wie man mit den (angehenden) Studierenden umgeht: Lässt man nur die nach festgelegten Kriterien am besten geeigneten Studieninteressierten zum Studium zu (Selektion vor dem Studium)? Oder stellt man während des Studiums geeignete Unterstützungsangebote bereit, damit diejenigen Studierenden, die selbst davon überzeugt sind, dass sie das Studium absolvieren können, dies auch schaffen können (Selbstreflexion)?

Die Selektion vor dem Studium muss zum Teil rechtlich verankert sein (was in Österreich noch nicht in diesem Umfang der Fall ist). Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, etwa verbindliche Beratung vor dem Studium, Self-Assessment oder auch Aufnahmeverfahren mit Prüfungen (geplant im Lehramt ab spätestens 2015/16, für Bachelor momentan nicht offiziell geplant). Kombinationen sind ebenfalls denkbar.

2 Natürlich wäre eine Erhöhung der Stundenzahl (etwa ein dreiwöchiger Kurs (3 SSt.) aus fachlicher Sicht wünschenswert, weil man Themen (und Probleme) dadurch intensiver behandeln kann.

Die andere Möglichkeit betrifft die Unterstützung während des Studiums und die eigenverantwortliche Selbstregulation im Studium. In Mathematik-Studien sind verschiedene Unterstützungsmöglichkeiten denkbar, momentan werden an der Uni Graz Tutorien angeboten (vgl. Abschnitt 3.2.3). Solche semesterbegleitenden Maßnahmen lassen sich auch mit anderen Methoden studierendenzentrierter als momentan umsetzen, etwa mit betreutem Arbeiten, Unterstützungsmaterialien oder Hilfestellungen beim Bearbeiten von Aufgaben (vgl. »Mathematik besser verstehen«, [90] S.17ff). Andere Universitäten versuchen mit Schnittstellenmodulen (etwa Uni Hessen, vgl. [91] oder Uni Oldenburg, vgl. [92]) entgegenzuwirken. Im Lehramt gibt es darüber hinaus noch größer angelegte Maßnahmen, die das ganze Studium betreffen (vgl. [13]).

19.4. Ausblick: weiterführende Forschung

19.4.1. Tests mit Kontrollgruppendesign

Einige (wenige) Brückenkurse versuchen mittels Kontrollgruppendesigns die Wirksamkeit zu überprüfen (siehe z. B. [93]. Ein Test-Design dafür kann folgendermaßen aussehen:

Die Brückenkursteilnehmenden werden zufällig in zwei Gruppen eingeteilt, Gruppe A und Gruppe B. Am Beginn des Brückenkurses finden nun Tests statt, um einerseits die Fähigkeiten der Studierenden zu erheben, andererseits auch, um die Tests zu evaluieren. Am Ende des Kurses erhalten die Gruppen den Test der anderen Gruppe. Tab. 19.1 zeigt die Einteilung der Tests.

Tab. 19.1.: Test-Einteilung mit Kontrollgruppendesign

	Gruppe A	Gruppe B	Nichtkursteilnehmende
Test am Kursbeginn	A	B	–
Test am Kursende/Studienbeginn	B	A	A oder B

Durch die Zufallszuteilung zu den Gruppen am Beginn wird davon ausgegangen, dass die Gruppen gleich stark sind – durch die Leistungen kann nun die Schwierigkeit der Tests[3] ermittelt werden. Das wird beim Vergleich der Leistungen am Test am Kursbeginn mit dem Test am Kursende einbezogen. Durch einen Vergleich der Leistungen einer Person bei Test A und B kann auf den Lernzuwachs rückgeschlossen werden.

Die Studierenden, die nicht den Brückenkurs besucht, schreiben einen der Tests ebenfalls (zufällig ausgewählt), um dadurch einen Vergleich zu den Teilnehmenden des Brückenkurses zu erreichen. Dadurch kann ermittelt werden, in wie weit der Kurs seine Zielgruppe – die Studierenden mit Defiziten – erreicht hat.

Das Hauptproblem bei diesen Designs ist einerseits der große Aufwand. Andererseits ist ein ausreichend große Population[4] der Studierenden notwendig, damit die Gruppen A und B annähernd gleich leistungsstark sind. Zusätzlich wird durch ein solches Testdesign zunächst ebenfalls nur der Lernzuwachs durch den Brückenkurs gemessen. Es ist allerdings noch nicht klar, ob dieser Lernzuwachs für eine effektive Verringerung der vielfältigen Probleme am Studienbeginn und im ersten Semester gesorgt hat. Diesbezüglich wären weitere Überprüfungsmaßnahmen nötig.

3 Andere Brückenkurse verwenden völlige Analogie-Aufgaben (gleiche Aufgabenstellung, andere Zahlen) beim Test am Kursende. Damit lassen sich allerdings Trainingseffekte nicht verhindern – was Ergebnisse zugunsten besserer Wirksamkeit eines Kurses verfälschen kann.

4 Sind mehrere Lehrende/Vortragende nötig, entstehen dadurch wieder Einflussfaktoren, die kaum zu vermeiden sind.

19.4.2. Lernstandserhebung in Österreich

Ab dem WS 13/14 ist in den Mathematik-Studien an einigen Universitäten Österreichs eine Lernstandserhebung für Erstsemestrige des Lehramts angedacht. Die Aufgaben decken im Wesentlichen die Grundkompetenzen laut Bildungsstandards / Zentralmatura ab, sind eher auf einer anwendungsorientierten statt innermathematisch-abstrakten Ebene angesiedelt. (Die Bildungsstandards finden sich in [30]).

Damit soll abgeprüft werden, in wie weit bei angehenden Mathematik-Studierenden (des Lehramts) am Studienbeginn noch Schulwissen vorhanden ist. Die Zeit zwischen Schulabschluss beträgt zwischen immerhin zwischen drei Monaten und einem Jahr oder mehr. Darüberhinaus ist ein Multiple-Choice-Fragebogen Teil geplant, der Einstellungen zur Mathematik, aber auch zum Unterrichtsalltag (Rolle von Beweisen, Methoden, usw.) abfragen soll.

Die Lernstandserhebung[5] soll in den nächsten paar Jahren jährlich stattfinden. Es wird sich zeigen, in wie weit sich die Etablierung des kompetenzorientierten Unterrichtens, der Bildungsstandards und der Zentralmatura auf die Leistungen auswirken werden. Anzumerken ist, dass die Aufgaben im Test typische kompetenzorientierte Aufgaben sind.

In Deutschland hat die Aufgabe des Grundkurs–Leistungskurs-Systems sowie die Aufnahme des kompetenzorientierten Unterrichts Auswirkungen gezeigt: Die mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen sind über die Zeit von 2002 bis 2011 abgesunken. Daneben stärken allgemeinbildende Reformen (nur) das untere mathematische Leistungsniveau (vgl. [31]). Damit wird zwar die Breite gestärkt, aber nicht die Spitze, bei der man davon ausgehen kann, dass sie ein Mathematik-(Lehramts-)Studium anstrebt. Es ist daher auch in Österreich fraglich, in wie weit die zukünftigen SchülerInnen den Ansprüchen der Hochschulen genügen. Es stellt sich die Frage, wie die Hochschulen in Zukunft damit umgehen – und welches Niveau im Lehramtsstudium Mathematik zukünftig angestrebt wird.[6]

19.4.3. Untersuchung von beliefs

Der Fragebogen am Ende des Semesters in Kapitel 16 hat deutlich gezeigt, dass die Studierenden Mathematik in der Schule deutlich positiver (im Sinne von »Spaß«) erlebt haben als an der Universität. Daneben zeigt sich deutlich, dass rund die Hälfte der Studierenden Probleme bei der Sinnsuche bei exakterer, abstrakterer Mathematik hatte.

Das wirft Fragen über die *beliefs* auf – was die Studierenden an Schulmathematik begeistert hat, welches Bild sie von Mathematik durch die Schule entwickelt haben – und worin die Unterschiede zu den Antworten auf diese Fragen bzgl. Hochschulmathematik liegen. Eine Untersuchung der *beliefs* sowie eine Untersuchung der*belief overhangs* scheint daher sinnvoll – um Maßnahmen dagegen initiieren zu können. Insbesondere ist es wissenswert, was konkret (Situationen? Inhalte?) die Studierenden zur Änderung ihrer *beliefs* motiviert und wann das tatsächlich passiert (Tage, Wochen, Monate nach Studienbeginn? Nie?). Mit diesem Hintergrundwissen könnte man die Studierenden explizit damit konfrontieren – und eine Anpassung der *beliefs* als positiven Prozess im Sinne einer Weiterentwicklung darstellen anstatt als gezwungene ungewollte Rücksichtslosigkeit seitens der Universität und des Studiums. Gleichzeitig stellt sich die Frage, in wie weit geleitete Reflexion mit den Lehramtsstudierenden dazu beitragen kann, das Studium positiver zu erleben und die eigene Rolle als angehende Lehrkraft (zumindest aus fachlicher Sicht) selbstkritischer zu betrachten.

Neben diesen einstellungsbezogenen Aspekten wurde beim Fragebogen am Semesterende ebenfalls deutlich, welche Schwierigkeiten es mit Lernformen (z. B. Selbstständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben usw.) gab. Wie die AbbrecherInnen damit umgehen, ist zunächst noch unklar. Es fehlen nähere Informationen und darauf aufbauende Konzepte, wie Studierenden dazu angeregt werden könne, Mathematiklernen als aktiven Prozess zu erleben, der (im Allgemeinen) notwendigerweise viel Selbststudium und Beschäftigung mit Aufgaben benötigt. Versuche in dieser Richtung gab es bereits, wobei der Erfolg (in Form von besseren Leistungen) kaum zu verbuchen war [94].

5 Kontaktperson: Bernd Thaller, Uni Graz

6 Ab WS 15/16 ist die Umstellung vom Diplomstudium auf ein Bachelor-Master-System geplant. Zusätzlich wird das Studium in Kooperation mit der Pädagogischen Hochschule (der bisherigen Ausbildungsstätte von ElementarpädagogInnen und Lehrkräften der Mittleren Schulen, also Sekundarstufe I – Gymnasium ausgenommen) stattfinden.

Eine Untersuchung dieser Art müsste mit Studienbeginn starten und im besten Fall zumindest bis zum Ende des ersten Studienjahres dauern. Will man quantitative Erhebungen machen, so ist ein Erkennungsschlüssel nötig, um Studierende (anonym) über mehre Zeitpunkte verfolgen zu können. Erst dadurch kann man etwaige Änderungen nachvollziehen. Qualitative (halbstandardisierte) Interviews können im Vorfeld bei der Entwicklung eines Fragebogens helfen.

Literatur

Literatur

[1] Kümmerer Burkhard. »Wenn du wenig Zeit hast, nimm dir viel davon am Anfang: Ein Einstieg in die Analysis«. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von C Ableitinger, J Kramer und S Prediger. Springer, 2013, S. 135–150.

[2] Lisa Hefendehl-Hebeker. »Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge«. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von C Ableitinger, J Kramer und S Prediger. Springer, 2013, S. 1–16.

[3] Derek Holton, Hrsg. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Bd. 7. Springer, 2001.

[4] Norbert Grünwald. »Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik : Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht«. In: *Global J. of Engng. Educ* 8.3 (2004).

[5] C Ableitinger, J Kramer und S Prediger, Hrsg. *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer, 2013. ISBN: 9783658013592.

[6] Isabelle Bloch und Imene Ghedamsi. »The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and the university: Factors of rupture«. In: *Communication to the Topic Study Group* (2004).

[7] Rolf Biehler, Reinhard Hochmuth, Pascal R. Fischer und Thomas Wassong. »Transition von Schule zu Hochschule in der Mathematik: Probleme und Lösungsansätze«. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (2011).

[8] Martine De Vleeschouwer und Ghislaine Gueudet. *Secondary-Tertiary Transition and Evolutions of Didactic Contract: the example of duality in linear algebra.* 2001.

[9] Katrina Daskalogianni. »Beliefs Overhang: the Transition from School to University«. In: *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 21 (2)*. Bd. 21. July. 2001, S. 97–108.

[10] Aiso Heinze und Meike Grüßing, Hrsg. *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. Waxmann, 2009. ISBN: 3830971885.

[11] David Tall, Hrsg. *Advanced Mathematical Thinking (Mathematics Education Library)*. Bd. 11. Kluwer Academic Publishers, 1991. ISBN: 0792328124.

[12] Ed Dubinsky und Michael A. McDonald. »APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 275–282.

[13] Albrecht Beutelspacher, Gregor Nickel, Susanne Spies und Gabriele Wickel. *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011. ISBN: 3834816485.

[14] Katherine Roegner, Ruedi Seiler und Dagmar Timmreck. »E-xploratives Lernen an der Schnittstelle Schule/Hochschule«. In: *Beitrag zum Tagungsband Mathematische Vor- und Brückenkurse, Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Hrsg. von R. Biehler. Sprin, 2012, S. 1–15.

[15] Sven O. Krumke, Katherine Roegner, Lothar Schüler, Ruedi Seiler und Rudolf Stens. »Eine Chance zur Lösung der Probleme an der Schnittstelle Schule / Hochschule«. In: *Mitteilungen der DMV 20* 20.2 (2012), S. 115–120.

[16] Marc Zimmermann, Christine Bescherer und Spannagel Christian, Hrsg. *Mathematik lehren in der Hochschule*. Franzbecker, 2012. ISBN: 9783881205252.

[17] Rolf Biehler, Reinhard Hochmuth und Wolfram Koepf. »Mathematische Brückenkurse«. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (2010), S. 269–272.

[18] *LMU Brückenkurs - Übersichtsseite*. URL: http://www.math.lmu.de/~didaktik/index.php?ordner=ufer&data=lehre/13/13Brueckenkurs (besucht am 14. Aug. 2013).

[19] *Brückenkurs an der HTW Saarland – Feedback*. URL: http://www.htw-saarland.de/organisation/htwonline/2011/87/bruckenkurse-an-der-htw (besucht am 14. Aug. 2013).

[20] *KDHM (Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Matheamtik) - Startseite*. URL: http://www.khdm.de/startseite/ (besucht am 14. Aug. 2013).

[21] Isabell Bausch, Rolf Biehler, Regina Bruder, Pascal Fischer, Reinhard Hochmuth, Wolfram Koepf, Stephan Schreiber und Thomas Wassong, Hrsg. *Mathematische Vor- und Brückenkurse – Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Springer, 2013.

[22] BMUKK, Hrsg. *Lehrplan Mathematik AHS*. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[23] Wilfried Bos, Martin Bonsen, Jürgen Baumert, Manfred Prenzel, Christoph Selter und Gerd Walther, Hrsg. *TIMSS 2007: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich*. Waxmann Verlag, 2007, S. 192. ISBN: 3830970900.

[24] Uwe-Peter Tietze, Manfred Klika und Hans Wolpers. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1.: Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis.* Vieweg Friedr. + Sohn Ver, 1997, S. 347. ISBN: 3528067667.

[25] Werner Peschek. *Der Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts in der Unterstufe und in der Oberstufe*. 2000. (Besucht am 13. Aug. 2013).

[26] Roland Fischer. »Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft.« In: *Erziehung und Unterricht* 56.Fischer (2003), S. 559–566.

[27] BIFIE. *BIFIE Bildungsstandards*. URL: https://www.bifie.at/bildungsstandards (besucht am 14. Aug. 2013).

[28] BIFIE, Hrsg. *Praxishandbuch für »Mathematik« 8. Schulstufe*. 2. überarbeitete Auflage. Graz: Leykam, 2011. ISBN: 9783701177783.

[29] M. Dangl, R. Fischer, H. Heugl, B. Kröpfl, M. Liebscher, W. Peschek und H.-St. Siller. *Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik*. 2009. URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[30] V. Aue, M. Frebor, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller, G. Vormayr, M. Weiß und E. Willau. *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Hrsg. von BMUKK. 2013. URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[31] Sigrid Blömeke. *Der Übergang von der Schule in die Hochschule - Empirische Erkenntnisse*. Vortrag bei der 2. khdm-Arbeitstagung »Mathematik im Übergang Schule / Hochschule und im ersten Studienjahr« (Universität Paderborn). Feb. 2013.

[32] Aline Robert und Natasha Speer. »Research on the teaching and learning of calculus/elementary anaylis«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 283–300.

[33] BIFIE, Hrsg. *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik - Probeklausur Mai 2013, Teil-1-Aufgaben*. 2013. URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/PK13Mai_MAT_T1_AU.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[34] BIFIE, Hrsg. *Exemplarische Aufgabenstellung SRP Mathematik*. 2011. URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/srp_ma_exemplarische_aufgabenstellungen_2011-12-05.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[35] Konrad Königsberger. *Analysis 2, Band 2*. 5. Aufl. Springer DE, 2004. ISBN: 3540350772.

[36] J. Maaß. *Schreibweisen für Aufgaben bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS*. 2013. URL: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_m_schreibweisen_2013-08-08.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[37] Karl-Franzens-Universität Graz. »Curriculum für das Lehramtsstudium der Unterrichtsfächer Biologie und Umweltkunde, Chemie, Matheamtik, Physik, Geographie und Wirtschaftskunde«. In: *Mitteilungsblatt der Karl-Franzens-Universität Graz* 40.d (2008). URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/wbMitteilungsblaetter.display?pNr=84458 (besucht am 14. Aug. 2013).

[38] Karl-Franzens-Universität Graz. »Curriculum für das Bachelorstudium Mathematik«. In: *Mitteilungsblatt der Karl-Franzens-Universität Graz* 26.a (2012). URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/wbMitteilungsblaetter_neu.display?pNr=6454&pDocNr=357922&pOrgNr=1 (besucht am 14. Aug. 2013).

[39] Karl-Franzens-Universität Graz. »Curriculum für das Bachelor Studium Mathematik an der Karl-Franzens-Universität Graz«. In: *Mitteilungsblatt der Karl-Franzens-Universität Graz* (2007), S. 1–20. URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/wbMitteilungsblaetter.display?pNr=41169 (besucht am 14. Aug. 2013).

[40] Karl-Franzens-Universität Graz. »Curriculum für das Lehramtsstudium der Unterrichtsfächer Biologie und Umweltkunde, Chemie, Matheamtik, Physik, Geographie und Wirtschaftskunde«. In: *Mitteilungsblatt der Karl-Franzens-Universität Graz* 39.c (2013). URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/wbMitteilungsblaetter_neu.display?pNr=9142&pDocNr=527070&pOrgNr=1 (besucht am 14. Aug. 2013).

[41] Ron Larson und Bruce H. Edwards. *Calculus*. Cengage Learning, 2009, S. 1328. ISBN: 0547167024.

[42] Gerd Fischer. *Lineare Algebra: eine Einführung für Studienanfänger*. Springer DE, 2008, S. 384. ISBN: 3834895741.

[43] Claudi Alsina. »Why the professor must be a stimulating teacher«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 3–12.

[44] Karl-Franzens-Universität Graz. »Satzungsteil Studienrechtliche Bestimmungen«. In: *Mitteilungsblatt der Karl-Franzens-Universität Graz* 31a (2013). URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/wbMitteilungsblaetter.display?pNr=473948 (besucht am 14. Aug. 2013).

[45] Klemens Fellner, Harald Fripertinger, Stephen Keeling, Victor Kovtunenko, Evangelos Latos, Richard Perko, Carl Philip Trautmann und Jeremias Yehdegho. *Lehrveranstaltung - Detailansicht: Höhere Mathematik I PS WS 12/13*. 2012. URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/lv.detail?clvnr=305126&sprache=1 (besucht am 14. Aug. 2013).

[46] Stephan Keeling. *Proseminar Höhere Mathematik I Information zur Lehrveranstaltung*. 2012. URL: http://math.uni-graz.at/keeling/hm1_ws12/InfoBlatt.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[47] Kristian Bredies, Harald Fripertinger, Martin Holler, Florian Kainrath, Andres Langer und Propst Georg. *Lehrveranstaltung - Detailansicht: Grundbegriffe der Mathematik VU WS 12/13*. 2012. URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/lv.detail?clvnr=305123&sprache=1 (besucht am 14. Aug. 2013).

[48] Hermann Schichl und Roland Steinbauer. »Einführung in das mathematische Arbeiten«. In: *Mitteilungen der DMV* 17.LEHREN UND LERNEN (2009), S. 244–246.

[49] Klaus Jänich. *Lineare Algebra*. Springer DE, 2008. ISBN: 3540755020.

[50] Guy Brousseau. *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer, 1997. ISBN: 0792345266.

[51] Yves Chevallard. »Opening Plenary Steps Towards a New Epistemology«. In: *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*. Hrsg. von Marianna Bosch. Sant Feliu de Guíxols, Espagne, 2006, S. 21–30.

[52] Robyn Zevenbergen. »Changing contexts in tertiary mathematics: implications for diversity and equity«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 13–26.

[53] Lara Alcock und Adrian Simpson. »The warwick analysis project: practice and theory«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 99–111.

[54] Erich C. Wittmann. *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag, 2002, S. 210. ISBN: 3528583320.

[55] David Tall. »The transition to formal thinking in mathematics«. In: *Mathematics Education Research Journal* 20.2 (Sep. 2008), S. 5–24. ISSN: 1033-2170.

[56] Christian Clason. *Grundbegriffe der Mathematik*. 2010. URL: http://www.uni-graz.at/people/clason/teaching/grundmath10/Grundbegriffe_Skript.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[57] Lisa Hefendehl-Hebeker. *Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule – Gemeinsamkeiten und Unterschiede*. Vortrag bei der 2. khdm-Arbeitstagung »Mathematik im Übergang Schule / Hochschule und im ersten Studienjahr« (Universität Paderborn). 2013.

[58] Annie Selden und John Selden. »Tertiary mathematics education research and its future«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 237–254.

[59] David Tall. »The Psychology of Advanced Mathematical Thinking«. In: *Advanced Mathematical Thinking (Mathematics Education Library)*. Hrsg. von David Tall. Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 3–24.

[60] Bernard Cornu. »Limits«. In: *Advanced Mathematical Thinking (Mathematics Education Library)*. Hrsg. von David Tall. Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 153–166.

[61] Heiko Knospe. »Der Mathematik Eingangstest an Fachhochschulen in Nordrhein Westfalen«. In: *Proceedings des 6. Workshops Mathematik für Ingenieure, Wismarer Frege-Reihe,* Heft 03 (2008), S. 1–7.

[62] Heiko Knospe. »Der Eingangstest Mathematik an Fachhoch- schulen in Nordrhein-Westfalen von 2002 bis 2010«. In: *Proceedings des 9. Workshops Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, Wismarer Frege-Reihe* Heft 02 (2011), S. 8–13.

[63] Jean-Luc Dorier, Hrsg. *On the Teaching of Linear Algebra (Mathematics Education Library)*. Bd. 23. Kluwer Academic Publishers, 2000, S. 290. ISBN: 0792365399.

[64] F. Parlson. »Discontinuities regarding the secondary/university transition: the notion of derivative, as a special case.« In: *Proceedings of the 23rd Converence of the International Group for Psychology of Mathematics.* Hrsg. von O. Zavlavsky. Haifa: Technion Printing Centre, 1999, S. 73–80.

[65] Aline Robert und Rolph Schwarzenberger. »Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level«. In: *Advanced Mathematical Thinking (Mathematics Education Library)*. Hrsg. von David Tall. Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 127–139.

[66] Sigrun Nickel Hg. *Der Bologna-Prozess aus Sicht der Hochschulforschung Analysen und Impulse für die Praxis*. Arbeitspapier Nr. 148. CHE (Centrum für Hochschulentwicklung), 2011. ISBN: 9783941927186.

[67] Jean-Luc Dorier und Anna Sierpinska. »Research on the teaching and learning of linear algebra«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 255–273.

[68] Michele Artigue. »What can we learn from educational research at the university level«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 207–220.

[69] Corrina Hänisch. »Denkformen des formalen Denkens: eine qualitative empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik«. Diss. Universität Aachen, 2011.

[70] Martin Glatz. *Brückenkurs Mathematik*. 2012. URL: http://mathematik.oehunigraz.at/files/2012/07/Br%C3%BCckenkurs-Mathematik-Skriptum-2012-09-16.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[71] Studienvertretung Mathematik. *Umfrage LAK Mathematik SoSe 2011*. 2011. URL: http://mathematik.oehunigraz.at/files/2012/07/Umfrage-LAK-Mathematik-SoSe11.pdf (besucht am 12. Aug. 2013).

[72] Guido Pinkernell und Gilbert Greefrath. »Mathematisches Grundwissen an der Schni tt stelle Schule-Hochschule«. In: *MNU* 64/2 (2011), S. 109–113.

[73] Erhard Cramer. »Schulmathematik und Studierfähigkeit«. In: *Mitteilungen der DMV* 18 (2010), S. 110–114.

[74] Günter M Ziegler. »Mathematikunterricht liefert Antworten : Auf welche Fragen?« In: *Mitteilungen der DMV* 19 (2011), S. 174–178.

[75] Rainer Danckwerts. »Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine ›Schulmathematik vom höheren Standpunkt‹!« In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von C Ableitinger, J Kramer und S Prediger. Springer, 2013, S. 77–94.

[76] Frank K. Lester, Joe Garofalo und Diana Lambdin Kroll. »Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition«. In: *Affect and mathematical problem solving*. Hrsg. von Douglas B. McLeod und Verna M. Adams. Springer New York, 1989, S. 75–88. ISBN: 0387969241.

[77] Arbeitsgruppe HSGYM, Hrsg. *Hochschulreife und Studierfähigkeit*. 2008. URL: http://www.educ.ethz.ch/hsgym/HSGYM_langfassung_kl.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[78] Anita E. Solow, Hrsg. *Preparing for a New Calculus*. The Mathematical Association of America, 1994.

[79] MNU, DMV und GDM, Hrsg. *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik Empfehlungen von DMV , GDM , MNU*. 2008. URL: http://www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen/aktuelle-stellungnahmen/97-s-01-standards-f%C3%BCr-die-lehrerbildung-im-fach-mathematik.html (besucht am 14. Aug. 2013).

[80] Pieber-Seier. »Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik.« In: *Beiträge zum Mathematikunterricht (Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik 2002 in Klagenfurt)* (2002). Hrsg. von W. Peschek, S.395–398.

[81] Thomas Bauer. »Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben«. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von C Ableitinger, J Kramer und S Prediger. Springer, 2013, S. 39–56.

[82] Martin Glatz. *Lehrveranstaltung - Detailansicht: Brückenkurs Mathematik VU WS 12/13*. 2012. URL: https://online.uni-graz.at/kfu_online/lv.detail?clvnr=336199&sprache=1 (besucht am 14. Aug. 2013).

[83] Silke Meiner und Ruedi Seiler. *Abschlussbericht Expertentreffen „Brückenkurs Mathematik“*. 2009.

[84] KTH, Hrsg. *math.se Online Mathematik Brückenkurs 1*. 2009. URL: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/Kurs_als_PDF (besucht am 14. Aug. 2013).

[85] Studienvertretung Mathematik. *Studienleitfaden Mathematik 2012/13*. 2012. URL: http://mathematik.oehunigraz.at/files/2012/07/Leitfaden-mathe-2012-13-web.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[86] *Brückenkurs Mathematik*. 2012. URL: http://www.agnld.uni-potsdam.de/~fuhrmann/bruecke/brueckenkurs_uebungen.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[87] Hartwig Bosse. *Skriptum zum Vorkurs Mathematik*. 2012. URL: http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/dm/personen/bosse/Lehre/Vorkurs/Vorkurs_Mathematik_Skript.pdf (besucht am 14. Aug. 2013).

[88] Eddie M Gray. »Duality , Ambiguity and Flexibility : A Proceptual View of Simple Arithmetic«. In: *The Journal for Research in Mathematics Eduaction* 26.2 (1994), S. 115–141.

[89] Alan H. Schoenfeld. »Purposes and methods of research in mathematics education«. In: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*. Hrsg. von Derek Holton. Springer, 2001, S. 221–236.

[90] Christophh Ableitinger. »Demonstrationsaufgaben im Projekt ›Mathematik besser verstehen‹«. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Hrsg. von C Ableitinger, J Kramer und S Prediger. Springer, 2013, S. 17–38.

[91] Thomas Bauer und Ulrich Partheil. »Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik«. In: *Mathematische Semesterberichte* 56.1 (Dez. 2008), S. 85–103. ISSN: 0720-728X.

[92] Daniel Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen – ein neuer Akzent in der Studieneingangsphase Anforderungen am Studienbeginn*. 2012. (Besucht am 14. Aug. 2013).

[93] Rolf Biehler, Pascal Rolf Fischer, Reinhard Hochmuth und Thomas Wassong. »Designing and Evaluation Blended Learning Bridging Courses in Mathematics«. In: *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszow, Poland*. 2012, S. 1971–1980.

[94] Elisabeth Fischer. *Ergebnisse: Paderborn-Kassel: LIMA-Projekt*. URL: http://www.lima-pb-ks.de/komponenten/evaluationsstudie/ergebnisse.html (besucht am 14. Aug. 2013).

Verzeichnisse

Abbildungen

Tabellen

Anhang

A. Brückenkursbeschreibung

Brückenkurs Mathematik WS 12/13

LV Nr. 621.030
Typ: VU (Vorlesung mit Übung)
2 Semesterwochenstunden

Vortragender: Martin Glatz
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Karl Franzens Universität Graz

Kurzinfo

Beim **»Brückenkurs Mathematik«** (LV Nr. 621.030) handelt es sich um eine Lehrveranstaltung mit immanentem Prüfungscharakter (2 Semesterwochenstunden, VU (Vorlesung mit Übung)). Diese richtet sich primär an **StudienanfängerInnen**, die ihr Mathematik-Studium im Wintersemester 2012/13 beginnen wollen.

Die Lehrveranstaltung soll Studierenden ihren Mathematik-Studieneinstieg erleichtern und kann im Rahmen der Freien Wahlfächer anerkannt werden (1,5 ECTS). Die Lehrveranstaltung findet vom 17. September bis zum 28. September statt – eine **Anmeldung** zur Lehrveranstaltung ist **notwendig.**

Inhalt

1 Abhaltungstermine

Die Lehrveranstaltung findet in der 38. und 39. Kalenderwoche **(17.9 – 28.9.)** im Hörsaal **HS 11.02** (Heinrichstraße 36, EG) statt. Lehrveranstaltungstage sind Montag bis Freitag.

> Mo-Do: jeweils 13:30 – 15:00 (»Vorlesungsteil«) sowie 16:30 – 17:15 (»Übungsteil«)
> Fr: 10:00 – 11:30 (»Vorlesungsteil«) sowie 14:00 – 14:45 (»Übungsteil«)

2 Ziele und Lehrveranstaltungsinhalte

Der Brückenkurs Mathematik soll grundsätzlich einerseits **mathematisches Basiswissen** aus der Schule auffrischen, andererseits auch etwaige Lücken schließen. Schulspezifische Unterschiede in der mathematischen Vorbildung sollen dadurch abgebaut werden.

Das betrifft nicht nur **praktische Rechenkompetenzen** (z. B. Rechenregeln für Potenzen, Produktregel/Kettenregel beim Differenzieren, . . .), sondern auch ein gewisses **Grundverständnis** der zentralsten (Schul-)Themen (Was ist eine Funktion?, . . .) – auch auf einer argumentativen Ebene. Dahingehend werden primär Themen behandelt, die direkt im ersten Semester/Studienjahr für die Mathematik auf universitärem Niveau von Relevanz sind.

Im besten Fall werden **Anknüpfungspunkte für die Hochschulmathematik** sichtbar und auch thematisiert, um den Studierenden **Orientierung** zu geben, was sie vom Mathematik-Studium zu erwarten haben.

Die Umsetzung dieser Ziele erfolgt exemplarisch anhand folgender **Inhalte** (auch angepasst an die Bedürfnisse der LehrveranstaltungsteilnehmerInnen):

- **Mengen:** Was sind Mengen? Definitionsmöglichkeiten. Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ als Beispiele inkl. grundlegender, charakterisierender Eigenschaften (Induktionsprinzip, Gegenzahl, . . .).
- **Rechenregeln für reelle Zahlen/Variablen**: Rechenregeln für Brüche, Rechenregeln für Potenzen (z. B. partielles Wurzelziehen), Term-Umformungen, . . .
- **Vektoren**: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$: geometrische und algebraische Rechenregeln, Anwendungsbeispiele (z. B. Geraden in Parameterform). Ausblick auf Verallgemeinerungen ($\mathbb{R}^n$) sowie Vektorraum-Axiome.
- **Gleichungen** (linear, quadratisch, kubisch) **und Gleichungssysteme** sowie deren Lösbarkeit. Insbesondere praktischer Rechenvorgang.
- **Funktionen:** Grundlegende (exakte) Definition (inkl. »Pfeildiagramme«). Standard-Beispiele ($kx+d, x^2, x^3$ Polynomfunktionen im Allgemeinen, rationale Funktionen wie $1/x$, sowie $e^x, \ln(x)$ und $\sin(x), \cos(x)$ sowie einfachste Verkettungen). Thematisiert werden auch die Definitionsbereiche, Bilder. Graphische Interpretation (Skizzen).
- **Differenzieren und Integrieren:** Ableitungen und Integrale der Grundfunktionen. Produkt-Regel, Quotienten-Regel sowie Kettenregel. Partielle Integration sowie Substitution anhand einfacher Beispiele.

Je nach Bedarf oder verfügbarer Zeit können weitere, studienrelevante Inhalte behandelt werden. Die Schwerpunkte hängen auch von den Bedürfnissen der Studierenden ab.

3 Ablauf

Vorlesungsteil: Vormittags findet grundsätzlich der Vorlesungsteil statt (klassischer Tafelvortrag im Stile einer üblichen Vorlesung). Es erfolgt der Einstieg in das jeweilige Thema. Grundlegende Theorie wird vorgetragen – diese je nach Sinnhaftigkeit an konkreten Beispielen illustriert.

Übungsteil: Die Studierenden erhalten zu jedem Thema Übungszettel als Hausübung. Die Übungszettel dienen der Vertiefung der jeweiligen Stoffgebiete. Insbesondere werden Beispiele behandelt, die auf dem Stoff des Vorlesungsteils aufbauen. Von den Studierenden wird erwartet, dass sie es zu einem guten Teil selbst schaffen, sich die notwendigen Zusammenhänge zu erarbeiten, um korrekte Lösungen zu erhalten. (Insbesondere wird den Studierenden empfohlen, ihr Schulbücher sowie Mitschriften bei der selbstständigen Bearbeitung als Hilfsmaterialien zu verwenden.)

Die von den Studierenden ausgearbeiteten Beispiele müssen abgegeben werden. In der nächsten Übungseinheit (nachmittags am Tag darauf) erhalten die Studierenden dann ihre Beispiele zurück. Diese oder vergleichbare Beispiele werden dann durchbesprochen und etwaige Probleme thematisiert.

Bei beiden Anteilen der Lehrveranstaltung herrscht **Anwesenheitspflicht.**

Zusätzlich zu den Übungsbeispiel-Abgaben gibt es am Beginn der Lehrveranstaltung einen »Orientierungstest« sowie am Ende einen »Abschlusstest«. Der »Orientierungstest« soll einen Überblick über den Wissensstand und die Fähigkeiten der Studierenden geben. Der »Abschlusstest« soll insbesondere den Lernfortschritt sichtbar machen.

4 Beurteilungsschema

Die Lehrveranstaltung hat als Typ VU (Vorlesung mit Übung) sogenannten **immanenten Prüfungscharakter**, also insbesondere Anwesenheitspflicht.

Für das positive Absolvieren (»mit Erfolg teilgenommen«) ist die Erfüllung folgender Kriterien (hinreichend und) notwendig:

- Mitschreiben beim »Orientierungstest« in der ersten Einheit. (Bei Abwesenheit in der ersten Einheit muss nachgeschrieben werden.)
- ≥ 80 % Anwesenheit bei den Lehrveranstaltungseinheiten. (Bei schwerwiegenden Gründen ist es möglich, als Ersatz zusätzliche Beispiele/Ausarbeitungen zu versäumten Themen abzugeben, um fehlende Anwesenheit auszugleichen. Insbesondere gilt das für auswärtige Studierende, die erst ab der letzten Septemberwoche in Graz sind.)
- ≥ 70 % der zu bearbeitenden Übungsbeispiele müssen abgegeben werden. Es muss zumindest ein erkennbarer Versuch einer Lösung vorhanden sein.
- Mitschreiben beim »Abschlusstest« am Ende der Lehrveranstaltung. (Für Studierende, die einen triftigen Grund haben, am geplanten Termin nicht mitschreiben zu können, wird es einen Ersatztermin geben).
- Abgabe des (anonymen) Abschluss-Feedbackbogens am Ende der Lehrveranstaltung (Details werden noch bekanntgeben).

Ist einer oder mehrere dieser Punkte nicht erfüllt, so wird eine negative Beurteilung ausgestellt (»ohne Erfolg teilgenommen«).

B. Brückenkursskript – Vorwort

Vorwort

Aller Anfang ist schwer. So könnte auch das Motto im Mathematik-Studium heißen. Wieso Anfang? Wir alle haben doch bereits in der Schule einen Mathematik-Unterricht genießen dürfen, also demnach über mindestens zwölf Jahre unseres Lebens hinweg mehrere Stunden pro Woche mit Mathematik zu tun gehabt. Das ist richtig – aber auch wieder nicht ganz. Man müsste jetzt klären, was man unter »Mathematik« versteht. Das Rechnen mit Zahlen? Das Anwenden von Formeln, um Gleichungen zu lösen? Auf universitärem Niveau müsste man diese Fragen wohl mit »Nein« beantworten ...

Die Lehrveranstaltung »Brückenkurs Mathematik« (LV Nr. 621.030) soll helfen, die erfahrungsgemäß vergleichsweise große Hürde des Studieneinstiegs in ein (echtes) Mathematik-Studium schaffbarer zu machen. Dieses Skriptum sieht sich eher als eine Nebenbei-Lektüre zur Lehrveranstaltung und deckt viele wesentliche Stoffgebiete der Schulmathematik ab und leitet zur Hochschulmathematik hin. Dieses Skriptum nimmt bereits einige wichtige Charakteristika von Hochschulmathematik und mathematischer Fachliteratur vorweg:

Konzept des Skriptums

- Wir verzichten weitgehend auf an den Haaren herbeigezogenen Zahlenbeispielen.
- Häufig wird zuerst die Theorie erarbeitet und erst dann ein Beispiel dazu gebracht, das die Theorie verwendet. Diese Vorgehensweise benötigt auch eine selbstständigere Art des Lernens, da wir die Verknüpfung der (abstrakten) Theorie mit den Beispielen selbst herstellen müssen.
- Als Vorgriff auf die meisten Lehrveranstaltungen im Studium geht auch dieses Skriptum je nach Themengebiet nach dem Schema Definition – Satz – Beweis vor. Selbstverständlich sind wir aber noch weit weg von einer Strenge, wie sie etwa in einer Analysis- oder Lineare Algebra-Vorlesung praktiziert wird.
- Viele Begriffe sind an sich aus der Schule bekannt oder sollten es sein. In diesem Skriptum sind deswegen aufbauend darauf entweder die Schwerpunkte anders gesetzt oder der Grad der Exaktheit, der Allgemeinheit oder Abstraktion erhöht, um adäquat auf das Studium vorzubereiten. Neues Wissen bzw. exaktere Zugänge an vorhandenes Wissen anzuknüpfen, ist eine Notwendigkeit für verständnisvolles Mathematik-Lernen.
- Ich habe mich bemüht, dort, wo es gute geometrische Veranschaulichungen gibt, passende Grafiken und Skizzen anzufertigen. Das Programm, dass ich dafür verwendet habe, ist Inkscape, ein frei verfügbares Vektor-Grafik-Programm: `http://inkscape.org` Das Dokument wurde übrigens mit dem Textsatz-System LaTeX erzeugt, siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/LaTeX` bzw. `http://www.tug.org/texlive/`.
- Dort, wo es relativ leicht möglich ist oder wo interessante Themengebiete lauern, gibt es immer wieder einmal einen Ausblick in die Hochschulmathematik und ihre Teilgebiete. Solche Kapitel sind gewöhnlich mit »Ausblick« betitelt. Es kann und soll natürlich nicht verlangt werden, dass diese Kapitel auf Anhieb verstanden werden. Vielmehr soll es ein kleiner, motivierender Vorgeschmack sein auf das, was im Mathematik-Studium auf uns wartet. In dieser Hinsicht mag es nützlich sein, dieses Skriptum durchaus auch später im ersten Semester hin und wieder in die Hand zu nehmen und zu schmökern.
- Im Vergleich zu anderen Brückenkursen oder Bücher dieser Art ist das vorliegende Skript speziell für angehende Studierende der Mathematik verfasst. Dahingehend ist es etwas abstrakter und wohl auch exakter. Mir ging es darum, ein realistisches Bild von Mathematik in den (echten) Mathematik-Studien zu vermitteln.

Leseanleitung

Definition xyz.uvw: (Name der Definition)

Definitionen sind einfach Festlegungen von Begriffen, mit denen wir im Folgenden arbeiten. Ich denke, die Exaktheit der Definitionen sollte für den Beginn des ersten Semesters ausreichend sein.

Satz xyz.uvw: (Name des Satzes)

Sätze sind mathematische Aussagen, deren Wahrheitsgehalt von Mathematik-kundigen Personen als richtig festgestellt wurde. Sätze machen mathematische Aussagen über die in Definitionen festgelegten mathematischen Objekte und Begrifflichkeiten. In der Schule würde man je nach Teilgebiet unter Umständen auch »Rechenregeln« dazu sagen.

Beweis

Beweise sind jene Argumentationsketten und logischen Herleitungen, die uns helfen, die Aussagen der Sätze nachzuweisen bzw. zu bestätigen. Beweise verwenden Aussagen und Sätze, die bereits schon zuvor bewiesen wurden. Mathematik ist (auf universitärem Niveau) eine deduktive Wissenschaft, die aus einfachen Objekten und Aussagen immer komplizierte oder neue Aussagen hervorbringt und nachweist. In der Schule würde man dazu vielleicht »Herleitungen« sagen. □

Beispiel xyz.uvw

Entgegen vielen Vorlesungen und Skripten zu anderen Lehrveranstaltungen werden immer wieder vergleichsweise viele Beispiele vorgezeigt. Ich hoffe, die Mühe hat sich gelohnt.

Sämtliche Nummerierung von Definitionen, Sätzen oder Beispielen gehen nach dem Schema Abschnittsnummer.Anzahl. Durch ►xyz wird auf die Seite verwiesen, an der beispielsweise der entsprechende Satz vorkommt. Verlinkungen sind übrigens interaktiv (»anklickbar«). Wir werden außerdem immer wieder griechische Buchstaben für Variablen verwenden. Eine Übersicht des griechischen Alphabets findet sich im Anhang D Griechisches Alphabet ►168.

Falls jemand gegen Ende seines Studiums dieses Skriptum wieder in die Hand nimmt, möchte ich mich bereits jetzt für die Unvollständigkeiten, die Schlampigkeit gewisser Begriffe, Definitionen und Sätze, den nicht völlig konsequenten, logischen Aufbau entschuldigen. Mir war es wichtiger, grobe Zusammenhänge und Ideen sowie eine erste Vorstellung von universitärer Mathematik halbwegs verständlich und schulnah (bzw. schulnäher als in anderen Lehrveranstaltungen üblich) zu vermitteln. Ich hoffe aus mathematischer Sicht, dass es mir trotzdem gelungen ist, auf diesem Niveau eine vergleichsweise schlüssige Mathematik zu betreiben, die Schulwissen wiederholt und darauf aufbaut.

- Teil I beschäftigt sich mit Mengen und insbesondere den Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Teil II beschäftigt sich mit Rechenmethoden für reelle Zahlen und Variablen.
- Teil III behandelt Funktionen, deren Verständnis sehr zentral ist.
- Teil IV gibt einen Überblick über Vektoren und Vektorräume.
- Teil V fasst die Themen Gleichungen, Gleichungssysteme sowie Ungleichungen zusammen.
- Teil VI befasst sich mit Differential- und Integralrechnung.
- In Teil VII, dem Anhang, gibt es noch kurze Beiträge zu Folgen und Reihen.

Damit wünsche ich viel Spaß beim Lesen, Schmökern und Tüfteln,

Martin Glatz

Martin Glatz
Winkl-Boden, September 2012

C. Übungsblätter

Auf den nächsten Seiten finden sich die gesamten Übungsaufgaben zum Kurs, in der Reihenfolge, wie sie im Kurs ausgegeben wurden.

1 Übungsblatt

Beispiel 1.1

Seien $M := \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ und $N := \{2, 3, 5, 8, 10\}$ gegeben. Bestimme $N \cup M$, $N \cap M$, $N \setminus M$ sowie $M \setminus N$. (Vgl. Skriptum 1.5 Mengenoperationen ab Seite 7.)

Beispiel 1.2

Seien die (reellen) Intervalle (vgl. Definition 1., Seite 6 im Skriptum) I_1, I_2, I_3, I_4 gegeben. Bestimme $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$, $I_3 \cap I_4$ und $I_3 \cap I_4$ sowie $I_1 \setminus I_4$.

$$= I_1 := (-\infty, 3) \qquad I_2 := (3, +\infty) \qquad I_3 := (-\infty, 3] \qquad I_4 := [2, 3)$$

Gib auch geeignete Skizzen der Mengen auf der reellen Zahlengeraden an.

Beispiel 1.3

Seien die Intervalle I_1, I_2, I_3 gegeben. Bestimme die Mengen $I_1 \times I_2, I_2 \times I_3, I_1 \times \mathbb{R}$.

$$I_1 := (0, \infty) \qquad I_2 := (3, 4] \qquad I_3 := [-2, 4]$$

Gibt auch geeignete Skizzen in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ (also in einem x-y-Koordinatensystem) an.

Beispiel 1.4

Sei p eine mathematische Aussage. Dann bezeichnen wir mit $\neg p$ die sogenannte Negation von p, also jene Aussage, die wahr ist, wenn p falsch ist und falsch ist, wenn p wahr ist:

p	$\neg p$
W	F
F	W

Sei nun p die Aussage: »Es regnet« und q die Aussage »Die Sonne scheint«. Formalisiere folgende Aussagen (d. h. gib sie in mathematischer Kurzschreibweise an):

a) »Es regnet und die Sonne scheint«
b) »Wenn die Sonne scheint, dann regnet es nicht«
c) »Es regnet oder es scheint die Sonne«
d) »Entweder regnet es, oder es scheint die Sonne.«

Beispiel 1.5

Erstelle eine Wahrheitstafel (vgl. ab Seite 4 im Skriptum) mit den Aussagen p, q für die Aussage $\neg(p \wedge q)$ und $\neg(p \vee q)$ sowie für $\neg p \wedge \neg q$ und $\neg p \vee \neg q$. Was fällt dir auf?

Beispiel 1.6

Bestimme eine Wahrheitstafel für die Aussage $\neg(p \Rightarrow q)$ und vergleiche mit $\neg p \vee q$. Gib eine verbale Erklärung deiner Erkenntnis.

2 Übungsblatt

Von den 8 Übungsbeispielen sind nur 6 (=100 %) auszuwählen. Wer mehr machen möchte, darf selbstverständlich mehr machen. Beispiel 2.8. ist auf jeden Fall zu bearbeiten.

Beispiel 2.1

Wir überlegen uns eine geometrische Interpretation der ganzen Zahlen: Wir betrachten die Zahlengerade. $z \in \mathbb{Z}$ stellen wir dann als jenen Pfeil dar, der von 0 bis zur Zahl z geht.

a) Wie können wir dann zwei Zahlen addieren?
b) Wie finden wir dann die Gegenzahl von z?
c) Wie können wir dann zwei die Rechnung $z_1 - z_2$ darstellen?

Beispiel 2.2

Sein $z \in \mathbb{Z}$. Die Zahl z heißt gerade, wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass

$$z = 2m$$

ist. Die Zahl z heißt ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass

$$z = 2k + 1$$

ist. Zeige:

a) Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer gerade. Mathematisch hingeschrieben: z gerade $\Rightarrow$ z^2 gerade.
b) Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade. Kurz: z ungerade $\Rightarrow z^2$ ungerade

Beispiel 2.3

Sei $M := \{a, b\}$. Wir betrachten folgende Verknüpfung $\circ$ auf M. Wir legen fest:

$$a \circ a := a \qquad a \circ b := b \qquad b \circ b := a \qquad b \circ a := b$$

Wir können dann eine sogenannte Verknüpfungstabelle machen, wobei der Eintrag in einer Zelle der Tabelle jeweils »Zeile $\circ$ Spalte« ist:

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

a) Berechne für folgende Ausdrücke das Verknüpfungsergebnis und begründe dabei jeden Schritt:

$$(a \circ a) \circ b = ?$$

$$(a \circ b) \circ a = ?$$

b) Ist die Gleichung

$$a \circ (a \circ b) = (b \circ a) \circ a$$

eine wahre Aussage?
c) Untersuche die Verknüpfung $\circ$ auf Kommutativität.
d) Welche besondere Rolle nimmt das Element a ein und warum? (vgl. Skriptum S. 16 ff, Körper)
e) Was ist das inverse Element bzgl. $\circ$ zum Element b?

Beispiel 2.4

Wir betrachten folgende Verknüpfung auf der Menge $M := \{0, 1\}$.

$\circ$	0	1
0	1	1
1	1	0

Ist die Verknüpfung $\circ$ assoziativ? Also ist gilt für alle $a, b, c \in M$:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad ?$$

Beispiel 2.5

Zeige die Gültigkeit der binomischen Formel

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Du darfst dabei verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein Körper (Siehe Satz 5.1 Seite 20 und Def. 4.3 auf Seite 17). Ein Hinweis: Es ist zunächst nicht offensichtlich, dass z. B. $a + a = 2a$ ist. Das ist mit der Gleichung $a = 1 \cdot a$, der Rechenregel $1 + 1 = 2$ sowie den Rechengesetzen (z. B. Distributiv-Gesetz) erst zu zeigen. Notiere insbesondere bei jedem Schritt, welche Rechenregel im Körper (siehe S. 17) du verwendet hast.

Beispiel 2.6

Es seien $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -1 - 4i, z_3 = 8i$ gegeben. Berechne

$$z_1 + z_2, z_1 \cdot z_3, \frac{z_1}{z_2} \; .$$

Gilt die Ungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad ?$$

Siehe Skriptum Seite 23, Kapitel 6: Komplexe Zahlen.

Beispiel 2.7

Berechne:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} &= ? \\ \sqrt{\sqrt{a^{2/3}}} &= ? \\ \sqrt{36a^4b^4} : \sqrt{4a^2} &= ? \\ \frac{\sqrt[6]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[8]{y^6 \cdot \sqrt[9]{y^2}}} &= ? \end{aligned}$$

Beispiel 2.8

Die Menge der (reellen) quadratischen 2×2-Matrizen ist gegeben durch:

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mid x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispielsweise wäre etwa die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Element von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Seien A und B zwei Matrizen mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} .$$

Wir definieren dann das Matrizen-Produkt AB (»A mal B«) durch

$$AB := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{11} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeige, dass die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Rolle des neutralen Elements übernimmt, also dass

$$AI = IA = A$$

ist für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Berechne dann CD sowie DC mit

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ist die Matrizenmultiplikation kommutativ? Ist die Matrizenmultiplikation kommutativ, wenn wir nur Matrizen der Form

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} .$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ zulassen?

c) Wir definieren die sogenannte Nullmatrix $\mathbf{0}$ als die Matrix, die nur Nullen enthält:

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass dann der sogenannte Produkt-Null-Satz für Matrizen nicht gilt, also dass für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Implikation

$$AB = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0}$$

nicht erfüllt ist.

3 Übungsblatt

Es sind wieder nur 6 der Beispiele zu machen. Mehr ist natürlich immer willkommen. Beispiel 1 ist ein Pflichtbeispiel.

Beispiel 3.1

Wir betrachten die Verknüpfung auf der Menge $M = \{a, b\}$ aus Bsp 2.2. Statt $\circ$ schreiben wir nun $+$ für diese Verknüpfung.

Sei V die Menge, die alle wohldefinierten Funktionen von M nach M enthält. Wie viele Elemente (also Funktionen von M nach M) enthält die Menge V?

Seien nun $f : M \to M$ gegeben durch $f(a) := a$ und $f(b) := b$ sowie $g : M \to M$ mit $g(a) = b$ und $g(b) = b$.

Bestimme dann die Funktion $f + g$.

Bestimme dann die Funktion $f \circ g$ sowie $g \circ f$, wobei das Zeichen $\circ$ nun die Hintereinanderausführung von Funktionen bezeichnet. Siehe Skriptum S.51, Kapitel 11.4 Verkettung von Funktionen: Hintereinanderausführung.

Beispiel 3.2

Skizzere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x+2)^2+4$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x^2+2x-4$. Bestimme jeweils die Koordinaten des Scheitels der Parabel.

Beispiel 3.3

Skizziere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Beispiel 3.4

Skizziere die Funktion $\ln(x-1)$ sowie $e^{(x^2)}$, wo die Funktionen definiert sind.

Beispiel 3.5

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1} \cdot x$$

Skizzere qualitativ einige Funktionen f_n. Was passiert, wenn n immer größer wird?

Beispiel 3.6

Skizziere die Funktionen $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2$$

Was ist der größtmögliche, sinnvolle reelle Definitionsbereich D_f?

Skizziere die Funktion $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Was ist der größtmögliche, sinnvolle reelle Definitionsbereich D_g?

Beispiel 3.7

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 4$ gegeben und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$. Bestimme jeweils die Funktionen $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ sowie $f \circ g : D_2 \to \mathbb{R}$. Was ist jeweils der größte, sinnvolle reelle Definitionsbereich D_1 bzw. D_2?

Beispiel 3.8

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(a + ib) = a - ib$ für $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Zeige oder widerlege (also Gegenbeispiel angeben):

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad & f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad & f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \end{aligned}$$

Welche Rechenregeln ergeben sich dann mit der Schreibweise $f(z) = \overline{z}$?

Beispiel 3.9

Sei $X := \{0, 1, 2\}$ und $Y := \{a, 3, b\}$ und sei $f : X \to Y$ durch folgende Wertetabelle definiert:

x	$f(x)$
0	a
1	b
2	3

Ist f invertierbar? Wenn ja, gib die Umkehrfunktion f^{-1} an.

4 Übungsblatt

6 der Beispiele sind zu versuchen. Pflichtaufgaben sind Bsp 4.2, 4.4, 4.6 sowie 4.8. Werden mehr Aufgaben gemacht, werden diese natürlich berücksichtigt.

Beispiel 4.1

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := n^2 - 4$ gegeben. Berechne die ersten 4 Folgenglieder der Folge. Untersuche die Folge auf Monotonie. Ist die Folge beschränkt?

Beispiel 4.2

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ gegeben. Ist die Folge beschränkt? Ist die Folge monoton? (Eine Skizze kann helfen.)

Hat die Folge einen Grenzwert? Wenn ja, dann zeige per Definition des Grenzwertes (Definition B.2 im Skript auf Seite 164), dass die Folge wirklich den (vermuteten) Grenzwert besitzt.

Beispiel 4.3

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. $a_0 := 1$, $a_1 := 1$ und für $n \geq 2$ definieren wir

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} .$$

Berechne die ersten 5 Folgenglieder. Ist die Folge monoton/beschränkt? (Anschauliche Argumentation reicht.)

Beispiel 4.4

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n + 1} ,$$

indem du Rechenregeln für konvergente Folgen verwendest (siehe Satz B.1 auf Seite 165 im Skript).

Beispiel 4.5

Es sei die Folge $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ gegeben. Untersuche die Folge auf Beschränktheit und Monotonie. Welchen Grenzwert hat die Folge (Satz B.1 im Skript auf S. 165 verwenden)?

Beispiel 4.6

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \ldots = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n} = ?$$

Tipp zur zweiten: Versuche auf die Form $\sum q^k$ mit einem $0 < q < 1$ zu kommen.

Beispiel 4.7

Berechne den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} .$$

Tipp: Gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$$

mit passenden $a, b \in \mathbb{R}$? Betrachte dann die n-te Partialsumme und verwende dann z. B. Rechenregeln für Summen, um eine geschlossene Formel für S_n zu finden.

Beispiel 4.8

Löse die Ungleichung

$$\frac{x+2}{x-2} \geq 4$$

Beispiel 4.9

Löse die Ungleichung

$$(x-3) \cdot (x^2-1) > 0$$

Beispiel 4.10

Löse die Ungleichung

$$|4x+2| \geq 3$$

5 Übungsblatt

Löse folgende linearen Gleichungssysteme. Folgende Fälle sind dabei möglich: keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen (vgl. Skript Seite 121, Kap 27.1).

Die Lösungen am Montag in der LV werden mithilfe des sogenannten Gauß-Algorithmus präsentiert, da man dabei viel weniger schreiben muss. Daher bitte Kap 27.2 sowie 27.4 im Skriptum (ab S. 122 bzw. 124) durcharbeiten, um Verständnisprobleme am Montag zu minimieren.

Beispiel 5.1

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 10 & \text{(I)} \\ -x & + & y & = & 2 & \text{(II)} \end{array}$$

Beispiel 5.2

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcll} 3x & + & 5y & = & -1 & \text{(I)} \\ 2x & - & y & = & 2 & \text{(II)} \\ 4x & - & 2y & = & 0 & \text{(III)} \end{array}$$

Beispiel 5.3

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & y & + & 2z & = & 1 & \text{(I)} \\ & & 2y & + & z & = & 2 & \text{(II)} \\ -x & + & 2y & + & z & = & -1 & \text{(III)} \end{array}$$

Beispiel 5.4

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 3y & + & z & = & 10 & \text{(I)} \\ x & - & y & + & 2z & = & 7 & \text{(II)} \end{array}$$

Beispiel 5.5

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 5 & \text{(I)} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \text{(II)} \\ 2x_1 & & & & & + & 2x_4 & = & 4 & \text{(III)} \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & = & -1 & \text{(IV)} \end{array}$$

6 Übungsblatt

Wenn mit den mühsamen ϵ-δ-Definitionen gearbeitet werden soll, ist das explizit in den Beispielen erwähnt. Es sind dieses Mal alle Beispiel zu machen.

Beispiel 6.1

Finde die Umkehrfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$$

Skizziere zusätzlich die Funktion f mitsamt ihren Asymptoten. (Tipp: Vgl. Bsp 14.3 auf Seite 70 im Skript). Zum Berechnen der Umkehrfunktion siehe Kap 12.3 »Invertierbarkeit und Umkehrfunktion« ab Seite 55 im Skript.

Beispiel 6.2

Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Grenzwert besitzt:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x - 1)^2}$$

Tipp: Binomische Formeln

Beispiel 6.3

Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4 - 3 \cdot |x - 2|}{x - 2}$$

einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ hat. Skizze! (Tipp: Fallunterscheidung machen, um den Betrag aufzulösen.)

Beispiel 6.4

Zeige, dass jede konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, indem du die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit verwendest (siehe auch Kap. 13.4, ab Seite 63). Eine Funktion heißt konstant, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt $f(x) = c$.

Tipp: Kannst du δ unabhängig von ϵ wählen, etwa $\delta = 1$?

Beispiel 6.5

Zeige mit Hilfe der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit (siehe auch Kap. 13.4, ab Seite 63 und inkl. Bsp 13.6), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x - 1$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig ist.

Beispiel 6.6

Argumentiere über den Satz 13.2 (Seite 62 im Skript), dass jede Polynomfunktion 2. Grades (also $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, indem du f in geeignete Bestandteile zerlegst. Du darfst dabei auch verwenden, dass die Funktion $f(x) = x$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

7 Übungsblatt

Beispiel 7.5 und 7.6 sind freiwillige Zusatzbeispiele.

Beispiel 7.1

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Möglicherweise kann folgende Formel für $n \in \mathbb{N}$ helfen:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k \,.$$

Beispiel 7.2

Zeige über die Definition der Differenzierbarkeit, dass $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist. Was passiert an der Stelle $x_0 = 0$?

Beispiel 7.3

Finde eine Formel für die Ableitung von n-te Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Hinweis: Berechne die ersten paar Ableitungen und versuche ein Gesetz zu finden. Evtl. kann die sogenannte n-Faktorielle, also $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ helfen. Ein exakter Beweis mit vollständiger Induktion ist nicht nötig.

Beispiel 7.4

Finde eine Formel für die Ableitung von $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und $h(x) = \ln\bigl(f(x)\bigr)$, wobei $f(x) > 0$ eine differenzierbare Funktion ist.

Beispiel 7.5

Finde mit Hilfe der Gleichung

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

und der Kettenregel eine Formel, in der die erste Ableitung der Umkehrfunktion vom Funktionswert $f(x) = y$ abhängt, also $(f^{-1})'(y) = ?$.

Finde damit und unter Kenntnis der Ableitung der e-Funktion die Formel

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \,.$$

Beispiel 7.6

Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^3 & \text{für} x > 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$ Ist die Funktion dort zwei mal differenzierbar?

8 Übungsblatt

Beispiel 8.1

Berechne den Inhalt der Fläche, der von den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie den Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzt wird. $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$, $g(x) = x^4 - 1$.

Beispiel 8.2

Finde je eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4x} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{1}{1-x}$$

Beispiel 8.3

$$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = ?$$

Beispiel 8.4

$$\int x \cdot \ln(x)\,dx = ?$$

Beispiel 8.5

$$\int \frac{4x}{3} \cdot e^{x^2+1}\,dx = ?$$

Beispiel 8.6

$$\int \cos^2(x)\,dx = ?$$

Beispiel 8.7

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{5-x}{1-x^2}\,dx = ?$$

Tipp: Partialbruchzerlegung (Vlg. Bsp 4.7): Zerlege den Nenner in Faktoren ...

D. Tests und Fragebögen

D.1. Orientierungstest

Matrikelnummer:

Nachname: Vorname:

Studienwahl:	☐ Bachelor	☐ LAK
Schule: ☐ HAK ☐ BAKIP ☐ HTL ☐ Gymnasium	☐ Realgymnasium	
Ich habe in Mathematik maturiert:	☐ schriftl.	☐ mündl.
Durchschnittliche Note in Mathematik in der Oberstufe (einkreisen)	1 2 3 4 5	
Wurden diese Themengebiete in der Schule ausreichend behandelt?	Ja	Nein
(Aussagen-)Logik	☐	☐
Komplexe Zahlen	☐	☐
Vektoren (z. B. Skalares Produkt)	☐	☐
Ungleichungen (z. B. mit Beträgen)	☐	☐
Differentialrechnung (z. B. Kettenregel)	☐	☐
Integralrechnung (z. B. Substitution)	☐	☐
Folgen (z. B. Monotonie)	☐	☐
Reihen (z. B. Konvergenz)	☐	☐

(A) So habe ich mich über das Studium informiert:

(B) Entscheidungsgrund für die Studienwahl:

(1) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{(x^2-8)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{3^{-1/2}} : \frac{\sqrt{27}\cdot(2x^2-2\sqrt{32}+18)}{x-2\sqrt{2}} = \ldots$$

(2) Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^3-2x^2-5x+6=0\,.$$

(3) Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 & \quad (\mathrm{I}) \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 & \quad (\mathrm{II}) \end{array}$$

(4) Skizziere die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & \text{für } x>3\\ \frac{1}{x-3} & \text{für } x<3\end{cases}$$

(5) Bestimme sowohl die erste Ableitung als auch eine Stammfunktion zur Funktion f:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{(x-4)^3}}$$

Welche geometrische Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion?

D.2. Abschlusstest

Gruppe A

Matrikelnummer:

Nachname: Vorname:

(1) Skizziere (qualitativ) die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x^2} \qquad \text{sowie} \qquad g(x) = x + 3 + \frac{1}{x+2}$$

inkl. der jeweiligen Asymptoten. (Eine Wertetabelle ist nicht notwendig.)

(2) Untersuche die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n := \frac{n+1}{n} \,.$$

(3) Zeige über die Definition der Ableitung, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar ist.

$$f(x) = \frac{1}{x} \,.$$

(4) Bestimme mit gängigen Rechenregeln etc. sowohl die erste Ableitung als auch eine Stammfunktion zur Funktion f:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{3x+5} \,.$$

D.3. Feedbackbogen-Kursende

Zutreffendes bitte ankreuzen! Wenn bei den offenen Fragen (Seite 2) zu wenig Platz ist, dann bitte auf der Hinterseite weiterschreiben (und die Frage-Nr) angeben. Legende:

1	2	3	4	5
trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft teilweise zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu

1 Vorlesungsteil

Folgende Inhalte wurden im Vorlesungsteil ausreichend behandelt:	1	2	3	4	5
Mengenlehre	☐	☐	☐	☐	☐
Logik und mathematische Aussagen ($\wedge, \vee, \ldots$)	☐	☐	☐	☐	☐
Rechenregeln für Zahlen (Exponenten, ...)	☐	☐	☐	☐	☐
Komplexe Zahlen	☐	☐	☐	☐	☐
Ungleichungen (inkl. Betrag)	☐	☐	☐	☐	☐
Funktionen (inkl. Skizzieren, ...)	☐	☐	☐	☐	☐
Grenzwerte von Funktionen	☐	☐	☐	☐	☐
Differentialrechnung	☐	☐	☐	☐	☐
Integralrechnung (z. B. Substitution, ...)	☐	☐	☐	☐	☐
Folgen (z. B. Monotonie, ...)	☐	☐	☐	☐	☐
Reihen (z. B. Konvergenz, ...)	☐	☐	☐	☐	☐

	1	2	3	4	5
Der Stoff in den 1,5 h war vom Umfang her fassbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Stoff war vom Schwierigkeitsgrad her fassbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Mehr Beweise wären schön gewesen.	☐	☐	☐	☐	☐
Mehr vorgerechnete Beispiele wären schön gewesen.	☐	☐	☐	☐	☐

2 Übungsblätter und Beispiele

	1	2	3	4	5
Die gebrachten Übungsbeispiele waren interessant.	☐	☐	☐	☐	☐
Die gebrachten Übungsbeispiele waren schaffbar.	☐	☐	☐	☐	☐
Durch die gebrachten Übungsbeispiele habe ich viel dazugelernt.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Aufgabenstellungen waren anders als in der Schule.	☐	☐	☐	☐	☐
	☐	☐	☐	☐	☐

3 Subjektive Einschätzungen

	1	2	3	4	5
Das Konzept des Kurses (Aufteilung in VO-Teil und Übungsteil inkl. Beispielabgaben) war sinnvoll.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs war wirklich notwendig für mich.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs war mathematisch eine echte Bereicherung.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Brückenkurs hat insgesamt meinem Leistungsniveau entsprochen.	☐	☐	☐	☐	☐
Das Niveau war um Einiges höher als in der Schule.	☐	☐	☐	☐	☐
Ich bin durch den Kurs neugierig auf die Hochschulmathematik.	☐	☐	☐	☐	☐
Ich fühle mich durch den Brückenkurs auf das Studium gut vorbereitet.	☐	☐	☐	☐	☐

→

A) Wurdest du durch die Übungsbeispiele/Inhalte ab und zu auch frustriert/überfordert? Wenn ja, durch welche (Themengebiete/Aufgabenstellungen) besonders?

B) Hat sich die Mathematik im Brückenkurs von deiner Schulmathematik unterschieden? Wenn ja, wie?

C) Hat sich deine Vorstellung von (universitärer) Mathematik durch den Brückenkurs geändert? Wenn ja, wie?

4 Resümee:

	1	2	3	4	5
Insgesamt gebe ich dem Lehrenden die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐
Insgesamt gebe ich dem Brückenkurs die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐
Insgesamt gebe ich meinem eigenen Engagement die Schulnote	☐	☐	☐	☐	☐

X) Das hat mir besonders gut gefallen:

Y) Das hat mir weniger gut gefallen (inkl. Verbesserungsvorschläge):

Z) Das möchte ich noch loswerden: