

**Seminararbeit zum
»Seminar aus Reiner Mathematik«:**

**Symmetrische Matrizen,
Eigenvektoren & Eigenwerte
von Graphen**

**Martin Glatz
Matr. Nr. 0712957**

WS 11/12

Inhalt

0	Einleitung	3
1	Symmetrische Matrizen	4
1.1	Lemma (8.4.1): Orthogonalität von Eigenvektoren	4
1.2	Lemma (8.4.2): Eigenwerte sind reell	4
1.3	Lemma (8.4.3): Invarianz des orthogonalen Komplements	4
1.4	Lemma (8.4.4): Invarianter Unterraum und Eigenvektor	5
1.5	Lemma (8.4.5): Orthonormalbasis aus Eigenvektoren	5
1.6	Korollar (8.4.6): Diagonalisierbarkeit	6
2	Eigenvektoren (Kapitel 8.5)	7
2.1	Grundlegende Definitionen	7
2.2	Adjazenzmatrix	7
2.2.1	Adjazenzmatrix als linearer Operator	7
2.2.2	Die Funktionen aus $\mathbb{R}^{V(X)}$ als Spaltenvektoren	8
2.2.3	Eigenvektoren/-werte von A	9
2.3	Beispiele	9
2.3.1	Peterson-Graph	9
2.3.2	Eigenwerte vom Zyklus C_n	10
2.4	Lemmata und Folgerungen	11
2.4.1	Regulärer Graph mit Grad k	11
2.4.2	Lemma (8.5.1): Eigenwerte und -vektoren vom Komplement	12
2.4.3	Semireguläre, bipartite Graphen und auf Bipartitionen konstante Funktionen	13
3	Positiv Semidefinite Matrizen (Kapitel 8.6)	16
3.1	Ergebnisse aus der Linearen Algebra	16
3.1.1	Definitionen	16
3.1.2	Charakterisierung 1: Eigenwerte	16
3.1.3	Charakterisierung 2: Zerlegung	16
3.2	Lemmata bzgl. Graphen	17
3.2.1	Lemma (8.6.2): Größe der Eigenwerte vom Kantengraph	17
3.2.2	Lemma (8.6.3): Größe der Eigenwerte von induzierten Teilgraphen	17

0 Einleitung

Die folgende Seminararbeit wurde im Rahmen der Lehrveranstaltung Nr. 621.224 **Seminar aus (Reiner Mathematik)** (SE) im WS 11/12 an der KFU Graz geschrieben. Sie beschäftigt sich mit Graphentheorie, genauer: mit Graphentheorie im Zusammenhang mit Matrizen, insbesondere mit deren Eigenvektoren und Eigenwerten.

Als Literatur diente das Buch **Algebraic Graph Theory** von Chris Godsil und Gordon Royle, erschienen 2001 im Springer Verlag. Als Grundlage für die Ausarbeitung diente der Inhalt von Seite 169 (Kapitel 8.4 »Symmetric Matrices«) bis inkl. Seite 175 (exkl. Kapitel 8.7 »Subharmonic Functions«). Die Nummerierung in Klammer bei z. B. Kapitel-Überschriften bezieht sich immer auf die Nummerierung im Buch.

Inhalte der Seminararbeit im Detail:

- In Kapitel 1 [Symmetrische Matrizen](#) werden Aussagen über symmetrische Matrizen (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit etc.) aus der Linearen Algebra mit Beweisen behandelt. Der Beweis von [1.6 Korollar \(8.4.6\): Diagonalisierbarkeit](#) ist im Buch nicht enthalten und stammt von mir. Für dieses Kapitel sind noch keine Kenntnisse der Graphentheorie erforderlich.
- In Kapitel 2 [Eigenvektoren \(Kapitel 8.5\)](#) wird auf Eigenvektoren im Zusammenhang mit Graphen, nämlich insbesondere der Adjazenzmatrix (Nachbarschaftsmatrix), eingegangen. Neben Beispielen werden auch einige Lemmata und Folgerungen gebracht.
- In Kapitel 3 [Positiv Semidefinite Matrizen \(Kapitel 8.6\)](#) werden zunächst noch Aussagen aus der Linearen Algebra zu diesem Stoffgebiet gebracht. Unter Verwendung dieser Resultate werden Aussagen über die Größe von Eigenwerten von Kantengraphen und induzierten Graphen gebracht und selbstverständlich auch bewiesen.

Viel Spaß beim Lesen und Schmökern wünscht der Autor



(Martin Glatz)

Matr. Nr. 0712957
martin.glatz@edu.uni-graz.at bzw.
martin.glatz_winkl-boden@gmx.at

1 Symmetrische Matrizen

Zuerst ein Überblick über einige wichtige Resultate aus der linearen Algebra über symmetrische Matrizen:

1.1 Lemma (8.4.1): Orthogonalität von Eigenvektoren

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix. Sind v und w zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten, so gilt $v \perp w$.

Beweis:

Es gelte also $Av = \lambda v$ mit $Aw = \mu w$ mit $\lambda \neq \mu$.

Betrachte nun den Ausdruck $v^T Aw$. Es gilt einerseits $v^T(Aw) = v^T(\mu w) = \mu v^T w$ und andererseits $(v^T A)w = (v^T A^T)w = (Av)^T w = (\lambda v)^T w = \lambda v^T w$. Also gilt:

$$\mu v^T w = \lambda v^T w \quad \text{bzw.} \quad (\mu - \lambda)v^T w = 0$$

Da $\mu - \lambda \neq 0$, weil $\mu \neq \lambda$ ist, muss $v^T w = 0$ gelten, was heißt, dass v orthogonal auf w steht, also $v \perp w$.

1.2 Lemma (8.4.2): Eigenwerte sind reell

Die Eigenwerte einer reellen, symmetrischen Matrix sind reell.

Beweis:

Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, also $Av = \lambda v$. Dann folgt (konjugieren), dass $A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{(\lambda v)} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Somit ist \bar{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Weiters gilt, dass

$$v^T \bar{v} = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \bar{v}_j = \sum_{j=1}^n |v_j|^2 > 0,$$

weil v als Eigenvektor ungleich dem Nullvektor ist. D. h. v und \bar{v} stehen nicht orthogonal aufeinander, weswegen sie zum selben Eigenwert (laut dem vorigen Lemma) gehören müssen, also $\lambda = \bar{\lambda}$, was heißt, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

1.3 Lemma (8.4.3): Invarianz des orthogonalen Komplements

Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix.

Wenn U ein A -invarianter Unterraum des \mathbb{R}^n ist, dann ist das orthogonale Komplement U^\perp auch A -invariant.

Erinnerung: U heißt A -invariant, wenn für alle $u \in U$ gilt, dass $Au \in U$ ist. Das orthogonale Komplement U^\perp enthält alle Vektoren des \mathbb{R}^n , die auf alle Vektoren von U orthogonal stehen, also

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U : u^T v = 0\}$$

Beweis:

Für zwei beliebige Vektoren u und v gilt:

$$v^T A u = (v^T A^T) v = (A v)^T u$$

Ist nun $u \in U$ und $v \in U^\perp$, dann folgt aus der oberen Gleichung, dass

$$0 = v^T (A u) = (A v)^T u,$$

da $A u$ wieder aus U ist (linkes »=«). Somit ist $A v \in U^\perp$, da $A v$ auf u orthogonal steht für alle $u \in U$.

1.4 Lemma (8.4.4): Invarianter Unterraum und Eigenvektor

Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix. Ist U nun ein nichtleerer, A -invarianter Unterraum des \mathbb{R}^n , so enthält U einen reellen Eigenvektor von A .

Beweis:

R sei eine Matrix, deren Spalten aus Vektoren bestehen, die eine orthonormale Basis u_1, \dots, u_m von U bilden. Da U als A -invariant vorausgesetzt ist, gilt, dass $A u_j = \sum_{k=1}^m \beta_{kj} \cdot u_k$, also

$$A R = R B$$

mit $(B)_{kj} = \beta_{kj}$ und B ist eine $m \times m$ -Matrix. Wird nun R^T von links multipliziert, so gilt

$$R^T (A R) = R^T (R B) = (R^T R) B = I B = B$$

Daraus folgt

$$B^T = (R^T A R)^T = R^T A^T (R^T)^T = R^T A R = B$$

weswegen B symmetrisch ist (und reell). Da jede symmetrische Matrix (zumindest) einen Eigenwert hat – und dieser Eigenwert reell ist (vgl. [Lemma \(8.4.2\): Eigenwerte sind reell 1.2](#)) – können wir einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem passenden, reellen Eigenvektor v von B wählen. Somit gilt

$$A R v = R B v = R \lambda v = \lambda R v$$

Da die Spalten von R linear unabhängig sind und $v = (v_1, \dots, v_m)^T \neq \vec{0}$ ist, ist $U \ni R v = \sum_{k=1}^m v_k \cdot u_k \neq \vec{0}$. Also ist $R v$ ein Eigenvektor von A , der im Unterraum U enthalten ist, zum Eigenwert λ .

1.5 Lemma (8.4.5): Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

Sei A eine symmetrische, reelle $n \times n$ -Matrix. Dann hat \mathbb{R}^n eine Orthonormal-Basis (kurz ONB) aus Eigenvektoren von A .

Beweis:

Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Menge mit orthonormierten Eigenvektoren von A , wobei $m < n$ gelte. Sei M der Unterraum, der von diesen (lineare unabhängigen) Vektoren aufgespannt wird. Da A

zumindest einen Eigenvektor hat, gilt $m \geq 1$. M ist A -invariant, da für $v = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot v_k \in M$ gilt, dass

$$Av = A\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot v_k\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot Av_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda_k \cdot v_k$$

wieder eine Linearkombination der v_k ist und somit $Av \in M$ ist. Da M A -invariant ist, ist M^\perp auch A -invariant (vgl. 1.3 Lemma (8.4.3): Invarianz des orthogonalen Komplements). M^\perp enthält laut 1.4 Lemma (8.4.4): Invarianter Unterraum und Eigenvektor nun einen (normierten) Eigenvektor v_{m+1} der eben noch nicht in M enthalten ist. Somit ist die Menge $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ eine orthonormale Menge mit $m + 1$ Eigenvektoren von A .

Durch Induktion über m kann nun diese Menge zu einer Basis von \mathbb{R}^n ergänzt werden.

1.6 Korollar (8.4.6): Diagonalisierbarkeit

Ist A eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix, so existieren Matrizen L und D derart, dass $L^T L = L L^T = I$ und $L A L^T = D$ ist, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A ist.

Beweis:

Definiere L derart, dass die Zeilen von L aus Vektoren einer Orthonormalbasis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von A bestehen.

$$L = \left(\begin{array}{c} \overline{v_1^T} \\ \vdots \\ \overline{v_n^T} \end{array} \right) \quad \text{bzw.} \quad L^T = \left(v_1 \mid \cdots \mid v_n \right)$$

Wir stellen fest: $v_i^T v_j = 0$, falls $i \neq j$, sonst 1.

$$L L^T = \left(\begin{array}{c} \overline{v_1^T} \\ \vdots \\ \overline{v_n^T} \end{array} \right) \left(v_1 \mid \cdots \mid v_n \right) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

Anders formuliert: Zeilen und Spalten der beiden Matrizen stehen orthogonal aufeinander, wenn der Index verschieden ist.

Da L Zeilenrang n hat (da die Zeilen linear unabhängig sind), ist L invertierbar. Betrachte nun die folgende Gleichung und verwende die oben erhaltene Erkenntnis, dass $L L^T = I$ ist:

$$L(L^T L) = (L L^T)L = I L = L$$

»Kürzen« liefert dann $L^T L = I$.

Gilt $Av_j = \lambda_j v_j$, so erhalten wir

$$A L^T = A \left(v_1 \mid \cdots \mid v_n \right) = \left(\lambda_1 v_1 \mid \cdots \mid \lambda_n v_n \right) = \left(v_1 \mid \cdots \mid v_n \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = L^T D.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit L von links liefert dann

$$L A L^T = L(A L^T) = L(L^T D) = (L L^T) D = I D = D$$

2 Eigenvektoren (Kapitel 8.5)

2.1 Grundlegende Definitionen

Wir erinnern uns, was Eigenvektoren sind:

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Ein Vektor $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ heißt Eigenvektor von f , wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$f(v) = \lambda v$$

λ heißt dann Eigenwert (eigenvalue) zum Eigenvektor (eigenvector) v .

Auf Matrixschreibweise bezogen: $V = \mathbb{K}^n$, A sei eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{K} . $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{\vec{0}\}$ heißt Eigenvektor von A , wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$Av = \lambda v$$

Oder anders ausgedrückt: $Av - \lambda v = \vec{0}$ bzw. $(A - \lambda I)v = \vec{0}$.

2.2 Adjazenzmatrix

Im Zusammenhang mit Graphen spielen Matrizen (und ihre Eigenwerte) eine Rolle, nämlich z. B. bei der sogenannten Adjazenzmatrix $A(X)$ eines Graphen X . Wir erinnern uns kurz an die Definition einer Adjazenzmatrix:

Sei X ein Graph (ohne Loops) und $V(X)$ seine (endliche) Knotenmenge. ObdA können wir $V(X)$ als Teilmenge der natürlichen Zahlen beginnend ab 1 auffassen, also $V(X) = \{1, \dots, n\}$ mit einem passenden $n \in \mathbb{N}$, nämlich $n = |V(X)|$. Sei nun $A(X) =: A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, also eine $n \times n$ -Matrix. Dann ist

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \sim j, \text{ also Knoten } i \text{ benachbart (adjazent) mit Knoten } j \\ 0 & i \not\sim j, \text{ also Knoten } i \text{ nicht benachbart mit Knoten } j \end{cases}$$

Die Adjazenzmatrix A ist also eine quadratische, symmetrische ($n \times n$)-Matrix und kann somit als lineare Funktion aufgefasst werden. Die eine Möglichkeit wäre, dass durch die Matrix A Vektoren aus dem \mathbb{R}^n wieder in den \mathbb{R}^n abgebildet werden.

2.2.1 Adjazenzmatrix als linearer Operator

Andererseits sind aber die Zeilen und Spalten von A durch die Elemente von $V(X)$ indiziert, d. h. durchnummeriert. Somit können wir A als sogenannten linearen Operator auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{V(X)}$ betrachten, wobei dieser Vektorraum definiert ist durch

$$\mathbb{R}^{V(X)} := \{f : V(X) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Funktion}\},$$

also $\mathbb{R}^{V(X)}$ ist die Menge aller Funktionen von der Knotenmenge $V(X)$ in die reellen Zahlen. Schreiben wir der Einfachheit¹ halber für die Menge $V(X) = \{1, \dots, n\}$, so hat jedes $f \in \mathbb{R}^{V(X)}$ grundsätzlich folgendes Aussehen:

$$f : V(X) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \begin{array}{l} 1 \mapsto f(1) \\ 2 \mapsto f(2) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n \mapsto f(n) \end{array}$$

Allerdings ist es auch üblich, durch die eindeutige Nummerierung die Bildwerte als geordnetes Tupel aufzufassen, wodurch wir f z. B. als Spaltenvektor $\vec{f} = (f(1), \dots, f(n))^T$ notieren können.²

Exkurs: Hier noch ein wenig Hintergrundwissen zum Vektorraum $\mathbb{R}^{V(X)}$:

Seien $f, g \in \mathbb{R}^{V(X)}$, dann ist die Summe $f + g \in \mathbb{R}^{V(X)}$ definiert durch $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ für alle $v \in V(X)$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda f \in \mathbb{R}^{V(X)}$ definiert durch $(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$ für alle $v \in V(X)$. Der Nullvektor $\vec{0}$ dieses Vektorraums ist die Nullfunktion, also die Funktion, die alle $v \in V(X)$ auf 0 abbildet.

Definiere $f_i : V(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt: Der Funktionswert an der Stelle i sei 1, an den übrigen Stellen 0. Die Menge der Funktionen f_1, \dots, f_n ist dann linear unabhängig und ein Erzeugendensystem, also somit ein Basis von $\mathbb{R}^{V(X)}$. Somit ist $\mathbb{R}^{V(X)}$ ein reeller, n -dimensionaler Vektorraum und daher isomorph zum \mathbb{R}^n .

Wie oben bereits angeschnitten betrachten wir nun die Adjazenzmatrix A als linearen Operator auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{V(X)}$ (über \mathbb{R}), und zwar folgendermaßen:

$$A : \mathbb{R}^{V(X)} \rightarrow \mathbb{R}^{V(X)}, \quad f \mapsto Af$$

wobei Af als Funktion von $V(X)$ nach \mathbb{R} wie folgt definiert ist:

$$\forall i \in V(X) : (Af)(i) := \sum_{j \in V(X)} a_{ij} \cdot f(j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f(j)$$

2.2.2 Die Funktionen aus $\mathbb{R}^{V(X)}$ als Spaltenvektoren

Fassen wir sowohl die Funktion f als Spaltenvektor $\vec{f} = (f(1), \dots, f(n))^T$ und die Funktion Af als Spaltenvektor $\vec{Af} = ((Af)(1), \dots, (Af)(n))^T$ auf, so gilt:

$$A \vec{f} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot f(j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \cdot f(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Af)(1) \\ \vdots \\ (Af)(n) \end{pmatrix} = \vec{Af}$$

Da die Einträge der Matrix A nur aus Nullen oder Einsen bestehen, vereinfachen sich die Summen weitgehend. Innerhalb der i -ten Zeile steht genau dann 1, wenn der j -te Knoten ein Nachbar ist,

¹Diese Vereinfachung möchten wir im Folgenden weitgehend konsistent durchhalten.

²Man vergleiche das mit der Schreibweise von Folgen $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die ja eigentlich als Funktion von $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert sind, mit $a(n) = a_n$.

sonst 0. Somit gilt:

$$(Af)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f(j) = \sum_{i \sim j} f(j),$$

was bedeutet, dass der Funktionswert von Af an der Stelle i erhalten wird, wenn all jene $f(j)$ aufsummiert werden, wo der Knoten j zum Knoten i adjazent (benachbart) ist. In anderen Worten: $(Af)(i)$ ist die Summe der Werte von f an jenen Stellen, die zu i benachbart sind.

2.2.3 Eigenvektoren/-werte von A

Als lineare Funktion betrachtet können wir auch Eigenwerte und Eigenvektoren (d.h. gewissermaßen »Eigenfunktionen«) von A suchen. Ganz analog zur obigen Definition gilt:

$f \in \mathbb{R}^{V(X)}$ ($f \neq \vec{0}$, f also nicht die Nullfunktion) ist ein Eigenvektor von $A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $Af = \lambda f$. (Wir sagen dann auch, dass f ein Eigenvektor vom Graphen X ist.)

D.h. für alle $i \in V(X)$ gilt:

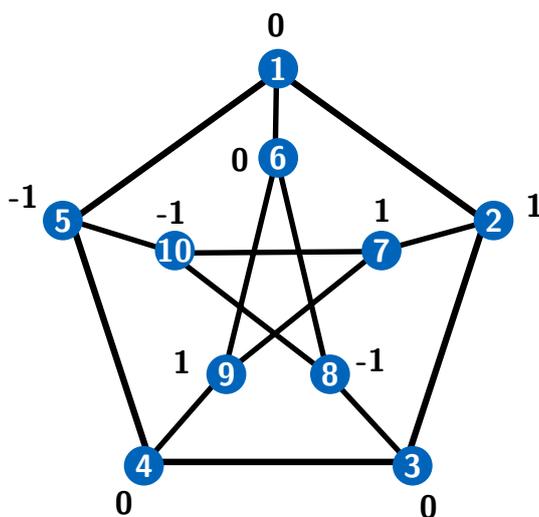
$$Af(i) = \sum_{i \sim j} f(j) = \lambda f(i) =: (\lambda f)(i)$$

Das ist auch eine hinreichende Bedingung. In Worten bedeutet das: Die Summe der Funktionswerte von f an den Nachbarn von i ist ein λ -faches des Funktionswertes an der Stelle i .

2.3 Beispiele

2.3.1 Peterson-Graph

Die nachfolgende Grafik zeigt den sogenannten Petersongraph. In den Knotenpunkten ist der Name des Knotens (Nummerierung) eingetragen. Neben jedem Knoten $i \in \{1, \dots, 10\}$ steht der jeweilige Wert $f(i)$ eines speziellen Eigenvektors f .



Nun betrachten wir die Funktion $f : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(u) = \tau^u$.

- Für alle $u \in \{1, n-2\} = V(C_n)$ gilt:

$$\begin{aligned}(Af)(u) &= \sum_{v \sim u} f(v) = f(u-1) + f(u+1) = \\ &= \tau^{u-1} + \tau^{u+1} = \tau^u(\tau^{-1} + \tau^1) = (\tau^{-1} + \tau)f(u)\end{aligned}$$

- Für $u = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}(Af)(0) &= \sum_{v \sim 0} f(v) = f(n-1) + f(1) = \tau^{n-1} + \tau^1 = \\ &= \tau^n \tau^{-1} + \tau^1 = (\tau^{-1} + \tau) \cdot 1 = (\tau^{-1} + \tau) \cdot f(0)\end{aligned}$$

- Für $u = n-1$ gilt:

$$\begin{aligned}(Af)(n-1) &= \sum_{v \sim n-1} f(v) = f(n-2) + f(0) = \tau^{n-2} + \tau^0 = \tau^{n-1} \tau^{-1} + \tau^n = \\ &= \tau^{n-1} \tau^{-1} + \tau^{n-1} \tau = (\tau^{-1} + \tau) \tau^{n-1} = (\tau^{-1} + \tau) f(n-1)\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt: Für alle $u \in V(C_n)$ gilt: $f(u) = (\tau^{-1} + \tau)f(u)$, weswegen f ein Eigenvektor zum Eigenwert $\tau^{-1} + \tau$ ist. Man beachte, dass $\tau^{-1} + \tau$ immer reell ist.

Das sieht man z.B. mit Hilfe der sogenannten Euler'schen Formeln, denn $\tau^{-1} + \tau = (e^{i2\pi \frac{k}{n}})^{-1} + e^{i2\pi \frac{k}{n}} = e^{-i2\pi \frac{k}{n}} + e^{i2\pi \frac{k}{n}} = \cos(-2\pi \frac{k}{n}) + i \cdot \sin(-2\pi \frac{k}{n}) + \cos(2\pi \frac{k}{n}) + i \cdot \sin(2\pi \frac{k}{n}) = \cos(2\pi \frac{k}{n}) - i \cdot \sin(2\pi \frac{k}{n}) + \cos(2\pi \frac{k}{n}) + i \cdot \sin(2\pi \frac{k}{n}) = 2 \cos(2\pi \frac{k}{n}) \in \mathbb{R}$

Da es insgesamt n verschiedene Einheitswurzeln gibt, gibt es auch n verschiedene Möglichkeiten für die Eigenwerte λ_k , nämlich

$$\lambda_k := 2 \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right), \text{ mit } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Man beachte weiters den Fall $k = 0$, also $\tau = 1$ bzw. $\lambda_0 = 2$: Der zugehörige Eigenvektor ist die Funktion $f : V(C_n) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(u) = 1$ für alle $u \in V(C_n)$, also in Vektorschreibweise $f = (1, \dots, 1)^T$. Im Buch wird diese besondere Funktion mit $\mathbf{1}$ bezeichnet. Durch die Struktur der Matrix (Zeilensumme immer gleich 2) ist es klar, dass dieser Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, da f von rechts zur Matrix A multipliziert alle Elemente einer Zeile aufsummiert. Die Summe der j -ten Zeile der Matrix A entspricht der Anzahl der Nachbarn des j -ten Knoten. Somit haben alle Knoten gleich viele Nachbarn, wenn alle Zeilensummen gleich sind.

2.4 Lemmata und Folgerungen

2.4.1 Regulärer Graph mit Grad k

Wir erinnern uns an das Beispiel mit dem Zyklus C_n von zuvor: C_n ist nämlich ein Graph, wo jeder Knoten genau zwei Nachbarn hat. Außerdem haben wir festgestellt, dass 2 ein Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{1}$ war. Diese Erkenntnis lässt sich verallgemeinern, denn es gilt:

$\mathbf{1}$ ist ein Eigenvektor vom Graphen X zum Eigenwert $k \Leftrightarrow X$ ist regulär mit Valenz k .

Erinnerung: Ein Graph heißt regulär mit Valenz (bzw. Grad) k , wenn alle Knoten des Graphen genau k Nachbarn haben.

Beweis:

$A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ ist gleichbedeutend damit, dass alle Zeilensummen von A gleich k sind. Das wiederum ist gleichbedeutend damit, dass genau k mal ein 1 in jeder Zeile vorkommt (da die Matrixeinträge nur 0 oder 1 sind). Diese Aussage ist aber gleichbedeutend damit, dass jeder Knoten genau k Nachbarn hat, weil jeder Zeile genau ein Knoten zugeordnet ist.

2.4.2 Lemma (8.5.1): Eigenwerte und -vektoren vom Komplement

Sei X ein k -regulärer Graph mit n Knoten und den Eigenwerten $k, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Dann gilt: X und sein Komplement \bar{X} haben die selben Eigenvektoren. Die Eigenwerte von \bar{X} sind dann gegeben durch $n - k - 1, -1 - \lambda_2, \dots, -1 - \lambda_n$

Erinnerung: Unter dem Komplement (auch Komplementgraph oder komplementärer Graph) \bar{X} eines Graphen X verstehen wir denjenigen Graphen, der die selbe Knotenmenge besitzt (also $V(\bar{X}) = V(X)$), bei dem aber zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn sie es im Graphen X nicht waren und umgekehrt.

Beweis:

Die Adjazenzmatrix $A(\bar{X})$ hat eine Hauptdiagonale nur besetzt mit 0, da vorausgesetzt wird, dass der Graph keine Loops hat. An den übrigen Stellen hat $A(\bar{X})$ genau dann 1, wenn $A(X)$ eine 0 hatte (da jetzt die Knoten genau dann benachbart sind, wenn sie es vorher nicht waren) und 0, wenn $A(X)$ eine 1 hatte (da jetzt die Knoten genau dann nicht benachbart sind, wenn sie es vorher waren).

J bezeichne nun die $n \times n$ -Matrix mit allen Einträgen gleich 1 (\Rightarrow alle Zeilensummen gleich n), I bezeichne die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Dann lässt sich $A(\bar{X})$ folgendermaßen darstellen:

$$A(\bar{X}) = J - I - A(X)$$

Die Matrix I wird abgezogen, um die Nullen auf der Hauptdiagonale zu erreichen, die Matrix $A(X)$ wird abgezogen, um die restlichen Einträge passend zu gestalten.

Da Adjazenzmatrizen symmetrisch sind, gibt es zu den n reellen Eigenwerten (die nicht notwendigerweise alle verschieden sein müssen) n normierte Eigenvektoren, die orthogonal aufeinander stehen und eine Basis bilden.

Sei $\{\mathbf{1}, u_2, \dots, u_n\}$ also eine Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren von $A(X)$.

- Wir berechnen nun das Bild von $\mathbf{1}$ unter der Matrix $A(\bar{X})$:

$$A(\bar{X})\mathbf{1} = (J - I - A(X))\mathbf{1} = J\mathbf{1} - I\mathbf{1} - A(X)\mathbf{1} = n\mathbf{1} - \mathbf{1} - k\mathbf{1} = (n - k - 1)\mathbf{1}$$

Somit ist $\mathbf{1}$ ein Eigenvektor von $A(\bar{X})$ zum Eigenwert $n - k - 1$.

- Für $2 \leq i \leq n$ gilt: $u_i \perp \mathbf{1}$, also $(1, \dots, 1)^T \cdot u_i = 0$. Damit folgt:

$$A(\bar{X})u_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} u_i - Iu_i - A(X)u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - u_i - \lambda_i u_i = (-1 - \lambda_i)u_i$$

Somit ist u_i ein Eigenvektor von $A(\bar{X})$ zum Eigenwert $-1 - \lambda_i$.

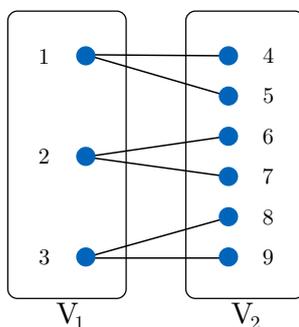
2.4.3 Semireguläre, bipartite Graphen und auf Bipartitionen konstante Funktionen

Nun wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels noch Eigenwerte und Eigenvektoren von semiregulären, bipartiten Graphen suchen – und auch finden :-)

Sei also X ein semiregulärer, bipartiter Graph mit Bipartition $V(X) = V_1 \dot{\cup} V_2$. Die natürliche Zahl k bezeichne den Grad eines jeden Knoten in V_1 , $l \in \mathbb{N}$ den Grad in V_2 .

Erinnerung: X heißt semiregulärer, bipartiter Graph, wenn sich die Knotenmenge so (disjunkt) zweiteilen lässt, dass jede Kante immer je einen Knoten aus je einer dieser Mengen hat (=bipartit). Zusätzlich müssen je alle Knoten aus derselben Menge die gleiche Valenz haben (=semiregulär).

Beispiel: $V(X) := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $V(X) = V_1 \dot{\cup} V_2$ mit $V_1 := \{1, 2, 3\}$, $V_2 := \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. X sei wie folgt definiert:



Dann gilt: $k = 2$, $l = 1$

Wir betrachten nun eine (ansonsten beliebige) Funktion f , die konstant auf den beiden Teilen der Bipartition ist, also es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt: $\forall v_1 \in V_1 : f(v_1) = c_1$ und $\forall v_2 \in V_2 : f(v_2) = c_2$.

Vereinfacht gesagt: Falls die n Knoten in $V(X)$ so geordnet werden, dass zuerst alle n_1 Knoten von V_1 vorkommen und dann alle n_2 Knoten von V_2 , so enthält der n bzw. $n_1 + n_2$ komponentige Vektor f zuerst n_1 -mal den Eintrag c_1 und dann n_2 -mal den Eintrag c_2 , also $f = (c_1, \dots, c_1 | c_2, \dots, c_2)^T$. Mit dieser Vereinfachung erhält die Matrix A eine Blockstruktur, nämlich

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_1 & B \\ \hline B^T & \mathbf{0}_2 \end{array} \right),$$

wobei $\mathbf{0}_1$ eine $(n_1 \times n_1)$ -Matrix mit nur 0-Einträgen ist, $\mathbf{0}_2$ eine $(n_2 \times n_2)$ -Matrix mit nur 0-Einträgen, da diese Matrizen beschreiben, dass die Knoten von V_1 nicht untereinander benachbart sind und die Knoten von V_2 ebenfalls nicht. B ist dagegen eine $n_1 \times n_2$ -Matrix, die jeweils Zeilensumme k und Spaltensumme l hat, weil sie die Benachbarung der Knoten aus V_1 mit V_2 beschreibt.

Fortsetzung des vorigen Beispiels:

Bezogen auf das vorige konkrete Beispiel erhalten wir folgende Adjazenzmatrix:

$$A(X) = \left(\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & 1 & 1 & \\ & 0 & & & 1 & 1 \\ & & 0 & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 0 & & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & 1 & & & 0 \\ & & & & 1 & & 0 \end{array} \right)$$

Man beachte die Blockstruktur und die jeweiligen Zeilensummen.

Interessanterweise erzeugt A aus so einer Funktion f eine Funktion Af , die wieder auf den zwei Teilen der Bipartition konstant ist (mit den Konstanten d_1 und d_2), denn für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt:

$$(Af)(v_1) := \sum_{v \sim v_1} f(v) = kc_2,$$

da v_1 genau k Nachbarn hat und diese nur in V_2 liegen und für alle $v \in V_2$ gilt, dass $f(v) = c_2$. Ganz analog gilt auch

$$(Af)(v_2) := \sum_{v \sim v_2} f(v) = lc_1.$$

In Matrizenschreibweise bedeutet das

$$Af = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{0}_1 & B \\ \hline B^T & \mathbf{0}_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kc_2 \\ \vdots \\ kc_2 \\ lc_1 \\ \vdots \\ lc_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun mit M die Menge dieser konstanten Funktionen bezeichnen, so gilt somit für jedes $f \in M$, dass Af wieder ein Element dieser Menge ist. Zudem ist die Summe zweier Funktionen f und g und ein λ -faches von f wieder aus dieser Menge, denn

$$f + g = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} \in M \quad \text{sowie} \quad \lambda f = \lambda \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_1 \\ \lambda c_2 \\ \vdots \\ \lambda c_2 \end{pmatrix} \in M.$$

Insgesamt ist daher M ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{V(X)}$, der zudem noch A -invariant ist. M muss daher (laut 1.4 Lemma (8.4.4): Invarianter Unterraum und Eigenvektor) einen Eigenvektor besitzen:

Sei $f \in M$ nun so ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$

$$\lambda c_1 = \lambda f(v_1) = (Af)(v_1) = kc_2,$$

und

$$\lambda c_2 = \lambda f(v_2) = (Af)(v_2) = lc_1$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$Af = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_1 & B \\ \hline B^T & \mathbf{0}_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kc_2 \\ \vdots \\ kc_2 \\ lc_1 \\ \vdots \\ lc_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_1 \\ \lambda c_2 \\ \vdots \\ \lambda c_2 \end{pmatrix} = \lambda f.$$

Man beachte, dass bei so einem Eigenvektor f weder c_1 noch c_2 gleich 0 sein können.

Denn angenommen, c_1 wäre 0, dann folgt aus $lc_2 = \lambda c_1 \Leftrightarrow lc_2 = 0$, dass dann c_2 ebenfalls 0 ist. Somit wäre dann aber f der Nullvektor, was der Definition eines Eigenvektors widerspricht. Die Überlegung, warum c_2 ebenfalls nicht 0 sein kann, geht analog.

Somit dürfen die beiden Gleichungen

$$\lambda c_2 = lc_1 \quad \text{und} \quad \lambda c_1 = kc_2$$

miteinander multipliziert werden und wir erhalten

$$\lambda^2 c_1 c_2 = kl c_1 c_2.$$

Kürzen durch $c_1 c_2$ ist erlaubt (da $c_1 c_2 \neq 0$) und liefert nun $\lambda^2 = kl$ und somit $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{kl}$. Die Gleichungen oben liefert auch eine Bedingung, wie c_2 von c_1 abhängt, nämlich jeweils

$$c_2 = \frac{\lambda_i}{k} c_1.$$

Somit kann c_1 jeweils als (ein) frei wählbarer Parameter aufgefasst werden, wodurch wir zu jedem λ_i nun den Eigenraum $W_i \subset \mathbb{R}^{V(X)}$ angeben können, nämlich

$$W_i = \{f \in \mathbb{R}^{V(X)} \mid \exists c_1 \in \mathbb{R} : \forall v_1 \in V_1 : f(v_1) = c_1 \text{ und } \forall v_2 \in V_2 : f(v_2) = \frac{\lambda}{k} c_1\}.$$

Wählen wir z. B. $c_1 = 1$, so ist die Funktion

$$f_i : V(X) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } v \in V_1 \\ \lambda_i/k & \text{für } v \in V_2 \end{cases}$$

jeweils ein Basisvektor von W_i . Insgesamt gilt dann $M = W_1 \oplus W_2 = [f_1, f_2]$, also ist M demnach ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{V(X)}$ mit einer möglichen Basis $\{f_1, f_2\}$.

3 Positiv Semidefinite Matrizen (Kapitel 8.6)

3.1 Ergebnisse aus der Linearen Algebra

3.1.1 Definitionen

Eine reelle, symmetrische Matrix A heißt positiv semidefinit, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$v^T A v \geq 0.$$

Eine positiv semidefinite Matrix heißt positiv definit, wenn $v^T A v = 0$ nur falls $v = \vec{0}$. (Man beachte, dass eine positiv semidefinite Matrix A genau dann echt positiv definit ist, wenn A invertierbar ist.)

3.1.2 Charakterisierung 1: Eigenwerte

Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ so gilt

$$v^T A v = v^T (\lambda v) = \lambda v^T v$$

Da $v^T v > 0$ für $v \neq \vec{0}$, hängt das Vorzeichen dieses Ausdrucks von λ ab. A ist als genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A größer oder gleich 0 sind. (Das ist eine hinreichende und notwendige Bedingung, da es bekanntlich eine Basis von \mathbb{R}^n aus Eigenvektoren von A gibt.)

3.1.3 Charakterisierung 2: Zerlegung

Lässt sich A mit einer Matrix B schreiben als $A = B^T B$, so gilt

$$v^T A v = v^T (B^T B) v = (v^T B^T)(B v) = (B v)^T (B v) \geq 0,$$

und somit ist A positiv semidefinit.

Beispiel: Die Gram-Matrix G der Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ist eine $m \times m$ -Matrix, wobei $G_{ij} = v_i^T v_j$. Somit lässt sich G darstellen als Matrixprodukt, nämlich $G = B^T B$, wobei B jene Matrix ist, die die Vektoren v_j als Spalten hat. Somit ist G positiv semidefinit.

Umgekehrt: Ist A eine positiv semidefinite (und somit reelle, symmetrische) Matrix, so gibt es eine Matrix B sodass gilt $A = B^T B$.

Beweis:

Da A symmetrisch ist, gibt es eine Matrix L mit $L^T L = L L^T = I$, sodass

$$A = L^T D L,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten von A auf der Diagonale. Da A positiv semidefinit ist, sind diese Eigenwerte größer gleich 0, und wir können $D = \sqrt{D} \sqrt{D}$ schreiben.

Die Matrix $C := \sqrt{D}$ hat somit die Wurzeln der Eigenwerte auf der Diagonalen. Definiere nun $B = L^T C L$. Diese Matrix ist symmetrisch, da $(L^T C L)^T = L^T C^T (L^T)^T = L^T C L$. Weiters gilt

$$BB = (L^T C L)(L^T C L) = L^T C (L L^T) C L = L^T C^2 L = L^T D L = A$$

Wegen der Symmetrie von B gilt somit auch $B^T B = BB = A$, was zu zeigen war.

3.2 Lemmata bzgl. Graphen

Im Folgenden bezeichne $\lambda_{\min}(X)$ bzw. $\lambda_{\max}(X)$ den kleinsten bzw. größten Eigenwert vom Graphen X bzw. seiner Adjazenzmatrix $A(X)$.

3.2.1 Lemma (8.6.2): Größe der Eigenwerte vom Kantengraph

Ist L der Kantengraph von X , dann gilt: $\lambda_{\min}(L) \geq -2$.

Erinnerung: Der Kantengraph L eines Graphen X ist jener Graph, bei dem die Knoten zu Kanten werden und umgekehrt. D.h. zwei Knoten $u_1, u_2 \in V(L)$ von L sind benachbart, wenn die $u_1, u_2 \in E(X)$ inzident sind (also als Kanten gemeinsame Knoten haben).

Beweis:

Aus dem vorigen Seminarvortrag kennen wir die folgende Formel:

$$A(L) + 2I = B^T B,$$

wobei B die Inzidenzmatrix von X bezeichnet.

Erinnerung: Die Inzidenzmatrix $B = (b_{ij})_{i \in V(X), j \in E(X)}$ hat folgende Einträge: $b_{ij} = 1$, wenn der Knoten i bei der Kante j angrenzt, und sonst 0.

Weil $B^T B$ positiv semidefinit ist, sind sämtliche Eigenwerte λ von $B^T B$ größer oder gleich 0. Sei nun v ein Eigenvektor dieser Matrix zu so einem λ , dann folgt, dass v auch ein Eigenvektor der Matrix $A(L) = B^T B - 2I$ ist, da

$$A(L)v = (B^T B - 2I)v = B^T Bv - 2Iv = \lambda v - 2v = (\lambda - 2)v$$

Somit hat die Matrix $A(L)$ nur Eigenwerte $\lambda - 2 \geq 0 - 2 = -2$.

3.2.2 Lemma (8.6.3): Größe der Eigenwerte von induzierten Teilgraphen

Sei Y ein induzierter Teilgraph vom Graphen X . Dann gilt:

$$\lambda_{\min}(X) \leq \lambda_{\min}(Y) \leq \lambda_{\max}(Y) \leq \lambda_{\max}(X)$$

Erinnerung: Ein induzierter Teilgraph Y vom Graphen X hat als Knotenmenge $V(Y)$ eine Teilmenge von $V(X)$, also $|V(Y)| = m \leq n = |V(X)|$. Weiters muss gelten: Zwei Knoten $u, v \in V(Y)$ sind genau dann benachbart im Graphen Y , wenn sie es im Graphen X waren.

Beweis:

- Wir zeigen $\lambda_{\max}(Y) \leq \lambda_{\max}(X)$:

$A := A(X)$ sei die Adjazenzmatrix von X , $\lambda := \lambda_{\max}(X)$. Die Matrix A hat als symmetrische Matrix nur reelle Eigenwerte, die kleiner oder gleich λ sind. Die (ebenfalls) symmetrische Matrix $\lambda \cdot I - A$ hat demnach nur Eigenwerte, die größer gleich 0 sind (ist also positiv semidefinit), weil:

Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu \leq \lambda$. Dann folgt, v ist auch ein Eigenvektor von $\lambda \cdot I - A$ zum Eigenwert $\lambda - \mu \geq 0$, da $(\lambda \cdot I - A)v = \lambda \cdot Iv - Av = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu)v$.

Sei nun f ein (ansonsten beliebiger) Vektor derart, dass $f(u) = 0$ für alle $u \in V(X) \setminus V(Y)$, also f ist 0 auf den Knoten von X , die nicht im Graph Y enthalten sind. f_Y bezeichne die Einschränkung von f auf $V(Y)$, also $f_Y : V(Y) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(u)$.

Vereinfachung: Um den Beweis anschaulicher zu machen, macht es Sinn, die Knoten in $V(X)$ so anzuordnen, dass z. B. zuerst all jene Knoten kommen, die in $V(Y)$ enthalten sind, und danach jene Knoten, die nicht in $V(Y)$ enthalten sind. Da $V(Y)$ genau m Elemente hat, können wir somit unser f schreiben als

$$f = \begin{pmatrix} f_Y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch diese Vereinfachung bekommt dann die Adjazenzmatrix von X eine Blockstruktur, in der die Adjazenzmatrix von Y direkt enthalten ist:

$$A(X) = \left(\begin{array}{c|c} A(Y) & B \\ \hline B^T & A(Z) \end{array} \right).$$

Der Block $A(Z)$ entspricht der Adjazenzmatrix des induzierten Teilgraphes Z von X , der die Knoten von $V(Y)$ nicht enthält, also $V(Z) = V(X) \setminus V(Y)$. Die Blöcke B und B^T enthalten jene Einträge, die beschreiben, ob Knoten aus $V(Z)$ mit Knoten aus $V(Y)$ benachbart sind.

Da $\lambda \cdot I - A$ eine positiv semidefinite Matrix ist, gilt für unser zuvor ausgewähltes f :

$$0 \leq f^T (\lambda \cdot I - A) f = f_Y^T (\lambda \cdot I_Y - A(Y)) f_Y$$

Mit der Vereinfachung ist dieser Zusammenhang leichter ersichtlich, denn einerseits gilt

$$\begin{aligned} f^T A f &= \begin{pmatrix} f_Y^T & | & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(Y) & | & B \\ \hline B^T & | & A(Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_Y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_Y^T & | & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(Y) f_Y + B \mathbf{0} \\ \hline B^T f_Y + A(Z) \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_Y^T & | & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(Y) f_Y \\ \hline B^T f_Y \end{pmatrix} = \\ &= f_Y^T A(Y) f_Y + \mathbf{0}^T B^T f_Y = f_Y^T A(Y) f_Y \end{aligned}$$

und

$$f^T(\lambda \cdot I)f = \begin{pmatrix} f_Y^T & | & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} I_Y & | & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & | & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_Y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \dots = f_Y^T(\lambda \cdot I_Y)f_Y,$$

wodurch gilt, dass

$$\begin{aligned} (0 \leq) \quad f^T(\lambda \cdot I - A)f &= f^T((\lambda \cdot I)f - Af) = f^T(\lambda \cdot I)f - f^T Af = \\ &= f_Y^T(\lambda \cdot I_Y)f_Y - f_Y A(Y)f_Y = \dots = \\ &= f_Y^T(\lambda \cdot I - A(Y))f_Y. \end{aligned}$$

Da mit geeigneter Wahl von $f \in \mathbb{R}^{V(X)}$ durch die Einschränkung auf Y bzw. $V(Y)$ jedes Element aus $\mathbb{R}^{V(Y)}$ erhalten wird, folgern wir aus der obigen Ungleichung, dass auch $\lambda \cdot I_Y - A(Y)$ positiv semidefinit ist, also alle Eigenwerte nicht negativ sind. Durch den analogen Zusammenhang der Eigenwerte von $\lambda \cdot I - A$ mit A können wir nun aus dem Zusammenhang von $\lambda \cdot I_Y - A(Y)$ mit $A(Y)$ folgern, dass für alle Eigenwerte μ von $A(Y)$ gilt, dass $\lambda - \mu \geq 0$ erfüllt ist, also $\lambda_{\max}(X) = \lambda \geq \lambda_{\max}(Y)$

- Wir zeigen $\lambda_{\min}(Y) \leq \lambda_{\max}(Y)$:

Das ist durch die Definition klar, da das Minimum einer Menge, nämlich der Menge der Eigenvektoren von $A(Y)$, immer kleiner gleich dem Maximum derselben Menge ist.

- Wir zeigen $\lambda_{\min}(X) \leq \lambda_{\min}(Y)$:

Betrachte nun die Matrix $A - \lambda_{\min}(X)$, die wieder nur nicht negative Eigenwerte hat und somit positiv definit ist und führe die Überlegung von 1. analog durch.