

# Seminararbeit Wellen im Fagott

Michael Kniely, Stefan Rosenberger

Betreuer: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Klemens Fellner

10. Dezember 2011



Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen  
Universität Graz

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundgleichungen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Die Lösung nach Brown</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Transfermatrizen</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Approximation von <math>Z, Y, \Gamma</math> und <math>\zeta</math></b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Formeln für die Implementierung</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Implementierung und Ergebnisse</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>19</b>

In dieser Arbeit wird beschrieben wie man das Verhalten von Schallwellen in einem Fagott mathematisch beschreiben kann. Dafür wird zuerst ein Modell von Differentialgleichungen in einem Zylinder beschrieben, welches dann in ein lineares Gleichungssystem umformuliert wird, das sich leichter simulieren lässt.

## 1 Grundgleichungen

Betrachte das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial \delta}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - (\gamma - 1) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\alpha}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} \right] \quad (4)$$

$$\delta = \sigma + \tau. \quad (5)$$

In diesen Gleichungen enthalten und verwendet:

- Die Gleichungen sind in Zylinderkoordinaten geschrieben mit einem Radius  $r$  (und im Modell normiert  $|r| \leq 1$ ).
- Um das System zu vereinfachen wurde bereits vorausgesetzt, dass das System radialsymmetrisch ist. Also findet sich keine Abhängigkeit eines Radialwinkels  $\varphi$ .
- Falls man Reibungseffekte berücksichtigen möchte muss ein Geschwindigkeitsfeld  $v_r$  betrachtet werden. Dies ist notwendig wenn man beachtet, dass der Einfluss von Reibung am Rand größer ist als in der Mitte des Rohrs.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang des Rohres (Zylinders) ist mit  $v_z$  bezeichnet.
- $\alpha$  beschreibt eine Konstante in der Größenordnung von  $10^{-3}$ . Diese tritt auf wenn man den langen Zylinder des Fagotts in kleine Zylinder *schneidet*.
- $\tau$  beschreibt die Temperaturabweichung.
- $\delta$  beschreibt die Druckabweichung.
- $\sigma$  ist mit  $\sigma = \tau + \gamma$  gegeben.
- $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität der Luft bei konstantem Druck und konstantem Volumen.
- Die Konstante  $Pr$  ist die **Prandtl-Zahl**, diese ist eine dimensionslose Kennzahl von Gasen (oder Flüssigkeiten). Sie ist definiert als das Verhältnis zwischen kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit (nach [Wikipedia (2011)]):

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}.$$

Hierbei sind  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität,  $\eta$  die dynamische Viskosität des Gases,  $\nu$  die kinematische Viskosität des Gases und  $a$  die Temperaturleitfähigkeit.

- Es wird angenommen, dass  $\delta = \delta(z)$  gilt (als Konsequenz des idealen Gasgesetz 5).

Um die Lösung dieser Differentialgleichung zu finden ist es natürlich notwendig Randbedingungen zu fixieren. In diesem Modell werden die *einfachsten* Randbedingungen angenommen:

$$\left. \begin{array}{l} v_r = 0 \\ v_z = 0 \\ \tau = 0 \end{array} \right\} \text{für } r = 1$$

Die Einschränkung an  $v_r$  ist offensichtlich sinnvoll, denn der Zylinder wird als festes Bauteil angenommen (alle kleinen Ausdehnungen werden vernachlässigt) womit keine radiale Ausbreitung vorkommt. Das die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Richtung des Zylinders  $v_z = 0$  ist, ist sicher eine Abweichung von der realen Situation. Wenn man jedoch annimmt dass die Stoffe am Übergang stark aneinander haften (Zylinder und Gas) so würde  $v_z = 0$  in erster Näherung dem entsprechen. (Anmerkung: Das Modell ist kontinuierlich beschrieben, und die Realität ist eine diskrete Anordnung von Molekülen, was zwangsweise zu einer Abweichung führt.)

Auch die Randbedingung für die Temperaturabweichung  $\tau = 0$  muss begründet werden:

*„Die Wärmekapazität der Wand ist viel größer, als die der Luft, und somit übertragen sich wellenbedingte Temperaturschwankungen nur verschwindend auf die Wand.“ [Fellner (1998)]*

## 2 Die Lösung nach Brown

In diesem Abschnitt ist es das Ziel die Gleichungen 3 und 4 (mithilfe von Randbedingungen und den restlichen Gleichungen) so umzuschreiben, dass wir Gleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial \delta}{\partial z}(z) = -Z(\omega)v_z(z) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}(z) = -Y(\omega)\delta(z) \quad (7)$$

bekommen. Dafür betrachte folgende Vereinfachungen bzw. Annahmen:

- Eine Mittelung, welche später für die Beseitigung der radialen Abhängigkeit verwendet wird:

$$\bar{f} = \frac{\int_0^1 r f(r) dr}{\int_0^1 r dr} = 2 \int_0^1 r f(r) dr. \quad (8)$$

- Die zu betrachtende Problemstellung stammt aus der Musik, daher werden nur zeitlich periodische Lösungen (mit einer Kreisfrequenz  $\omega$ ) gesucht. Aus diesem Grund ist es sinnvoll die Zeitableitungen der auftretenden Größen zu eliminieren. Betrachte hierfür folgende (komplexe) Beschreibung

$$\begin{aligned} v_z(r, z, t) = v_z(r, z)e^{i\omega t} &\implies \frac{\partial v_z(r, z, t)}{\partial t} = i\omega v_z(r, z) \\ \delta(z, t) = \delta(z)e^{i\omega t} &\implies \frac{\partial \delta(z, t)}{\partial t} = i\omega \delta(z) \\ \tau(r, z, t) = \tau(r, z)e^{i\omega t} &\implies \frac{\partial \tau(r, z, t)}{\partial t} = i\omega \tau(r, z) \end{aligned}$$

### Bestimmen von $Z$

Durch die oben eingeführten Vereinfachungen kann die achsiale Navier Stokes Gleichung 3 zu einer Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung umgeformt werden. Es gilt

$$i\omega v_z + \frac{\partial \delta}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

womit man

$$r^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial v_z}{\partial r} + r^2 \frac{\omega}{i\alpha} \left[ v_z + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \delta}{\partial z} \right] = 0. \quad (9)$$

erhält.

- Wie bereits erwähnt hängt  $\delta$  nur von  $z$  ab womit für

$$y(r, z) =: v_z + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \delta}{\partial z}$$

gilt, dass

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

- Weiters kann man  $r$  durch

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \\ dx &= dr \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \end{aligned}$$

substituieren.

Dadurch lässt sich die Gleichung 9 auf die Standardgestalt der Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung bringen.

$$x^2 \frac{\partial^2 y(x, z)}{\partial x^2} + x \frac{\partial y(x, z)}{\partial x} + x^2 y = 0$$

$$y(x) = A(z) J_0(x)$$

$$v_z(r, z) + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \delta}{\partial z} = A(z) J_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right),$$

wobei  $J_0$  die Besselfunktion 0-ter Ordnung ist. Die Lösung der Bessel Differentialgleichung findet sich in vielen Büchern, um einen Verweis für weiterführende Literatur anzugeben nenne ich hier

<http://page.math.tu-berlin.de/ferus/ING/ITPDG.pdf>.

Mit der Wahl der Randbedingung für  $r = 1$  gilt, dass  $v_z(1, z) = 0$  ist, daher folgt unmittelbar, dass

$$\frac{\partial \delta}{\partial z} = i\omega A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right).$$

Damit lässt sich

$$v_z(r, z) = A(z) \left( J_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) - J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) \right)$$

folgern. Mit der Mittlung von 8 folgt nun die radial unabhängige Formulierung:

$$\begin{aligned} \bar{v}_z &= 2 \int_0^1 r A(z) \left( J_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) - J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) \right) dr \\ &= -2 \int_0^1 r A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) dr + 2 \int_0^1 r A(z) J_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) dr \\ &\text{mit } \left[ \begin{array}{l} r = x \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \quad ; \quad dr = dx \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \\ r = 1 \rightarrow x = \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \quad ; \quad r = 0 \rightarrow x = 0 \end{array} \right] \\ &= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) + 2A(z) \int_0^{\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}} x \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} J_0(x) \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} dx \\ &= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) + 2 \frac{i\alpha}{\omega} A(z) \int_0^{\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}} J_0(x) x dx \end{aligned}$$

Nun gilt für die Besselfunktionen, dass

$$\int_0^a J_0(x) x dx = \sqrt{a^2} J_1(\sqrt{a^2}).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \bar{v}_z &= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) + 2 \frac{i\alpha}{\omega} A(z) J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \\ &= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) + 2 \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} A(z) J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Mit 6 folgt dann

$$-\frac{1}{\bar{v}_z} \frac{\partial \delta}{\partial z} = Z(\omega) = \frac{-i\omega J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)}{-J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right) + 2 \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)} = i\omega \left( 1 - 2 \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \frac{J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)}{J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)} \right)^{-1}$$

Nun lässt sich die Gleichung wieder auf dimensionsbehaftete Größen zurückführen:

$$-\frac{c_0 L_0}{p_0} \frac{1}{\bar{v}_z} \frac{\partial \delta}{\partial z} = -\frac{L_0}{c_0 \rho_0} \frac{1}{\bar{v}_z} \frac{\partial \delta}{\partial z} = i\omega t_0 \left( 1 - 2 \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \frac{J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)}{J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}} \right)} \right)^{-1}$$

und

$$Z(\omega) = i\omega\rho_0 \left( 1 - 2\sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}\right)} \right)^{-1}. \quad (10)$$

## Bestimmen von $Y$

Das Bestimmen der Funktion  $Y$  funktioniert beinahe analog zur Bestimmung von  $Z$ .

- Mit dem Ansatz der komplexen Schreibweise folgt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta - \tau) = i\omega(\delta - \tau).$$

Setzt man nun  $\beta = \frac{\alpha}{Pr}$ , so folgt mit 4, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial t} - (\gamma - 1)\frac{\partial\sigma}{\partial t} &= i\omega\tau - i\omega(\gamma - 1)(\delta - \tau) = i\omega(\gamma\tau - (\gamma - 1)\delta) = \beta \left[ \frac{\partial^2\tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r} \right] \\ \implies \frac{\partial^2\tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r} - \frac{i\omega}{\beta}(\gamma\tau - (\gamma - 1)\delta) &= 0 \\ \implies r^2\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2} + r\frac{\partial\tau}{\partial r} + r^2\frac{\omega\gamma}{i\beta} \left( \tau - \frac{(\gamma - 1)\delta}{\gamma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

womit wiederum eine Besselsche Differentialgleichung gefunden ist.

- Setzt man nun

$$y(r, z) = \tau - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\delta$$

so folgt

$$y(r, z) = \tau - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\delta.$$

Mit der Substitution

$$x = r\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \quad \text{und} \quad dx = dr\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}}$$

folgt

$$\left( \frac{i\beta}{\gamma\omega} x^2 \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\gamma\omega}{i\beta} + \left( \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} x \right) \frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} + x^2 y = 0$$

womit man

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y = 0$$

erhält.

- Setzt man

$$\begin{aligned} \delta(z) &= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \\ \tau(r, z) &= A(z) \left( J_0 \left( r \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) - J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \right) \end{aligned}$$

so erhält man

$$A(z) J_0 \left( r \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) = \tau(r, z) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \delta(z) = y(r, z),$$

und das ist die Bessellösung.

- Analog zur Berechnung von  $\bar{v}_z$  folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
\bar{\tau} &= 2 \int_0^1 r A(z) \left( J_0 \left( r \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) - J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \right) dr \\
&= -2 \int_0^1 r A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) dr + 2 \int_0^1 r A(z) J_0 \left( r \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) dr \\
&\text{mit } \left[ \begin{array}{l} r = x \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \quad ; \quad dr = dx \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \\ r = 1 \rightarrow x = \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \quad ; \quad r = 0 \rightarrow x = 0 \end{array} \right] \\
&= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) + 2A(z) \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}}} x \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} J_0(x) \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} dx \\
&= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) + 2 \frac{i\beta}{\gamma\omega} A(z) \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}}} J_0(x) x dx \\
&= -A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) + 2 \frac{i\beta}{\gamma\omega} A(z) J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \\
&= -A(z) \left( J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) - 2 \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \right)
\end{aligned}$$

- Es gilt

$$\overline{\left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right)} = \int_0^1 r \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) dr = \int_0^1 r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) dr = [r v_r]_0^1 = 0$$

denn  $v_1 = 0$ . Dann folgt mit der Gleichung 1 dass

$$0 = \overline{\left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)} = \overline{\left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)} = \overline{\left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}$$

womit man

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = i\omega(-\delta + \bar{\tau})$$

erhält. Fasst man das zusammen, so folgt

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = i\omega \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) - A(z) \left( J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) - 2 \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right) \right)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} A(z) J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)} \\
&= i\omega \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \frac{J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)}{J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)} \right) \\
&= \frac{i\omega}{\gamma} \left( 1 + 2(\gamma-1) \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \frac{J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)}{J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)} \right)
\end{aligned}$$

Erneut lässt sich das System auf dimensionsbehaftete Größen zurückführen. Mit  $p_0 = c_0^2 \rho_0$  folgt

$$Y(\omega) = \frac{i\omega}{c_0^2 \rho_0} \left( 1 + 2(\gamma-1) \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \frac{J_1 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)}{J_0 \left( \sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}} \right)} \right). \quad (11)$$

### 3 Transfermatrizen

In diesem Abschnitt wird eine lineare Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit der beiden Enden der Röhre hergeleitet, diese lässt sich wiederum in eine frequenzabhängige  $2 \times 2$  Matrix darstellen.

Analog zur Diplomarbeit [Fellner (1998)] werden zuerst die Variablen für Druck und Geschwindigkeit umbenannt:

$$\delta \longrightarrow p ; v_z \longrightarrow u.$$

Im letzten Kapitel wurden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z}(z) &= -Z(\omega)u(z) \\ \frac{\partial u}{\partial z}(z) &= -Y(\omega)p(z) \end{aligned}$$

beschrieben, wobei  $Y, Z$  durch 10 und 11 gegeben sind. Es folgt unmittelbar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(z) = -Z(\omega) \frac{\partial u}{\partial z}(z) = Z(\omega)Y(\omega)p(z). \quad (12)$$

#### Lösen der Differentialgleichung

Zum Lösen werden zwei Notationen verwendet

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &=: \sqrt{Z(\omega)Y(\omega)} \\ \zeta(\omega) &=: \sqrt{\frac{Z(\omega)}{Y(\omega)}} \end{aligned}$$

Es wird ein exponentieller Ansatz für die Lösung (der Wellengleichung) verwendet, damit folgt

$$\begin{aligned} p(z) &= Ae^{\Gamma z} + Be^{-\Gamma z} \\ \frac{\partial p}{\partial z}(z) &= A\Gamma e^{\Gamma z} - B\Gamma e^{-\Gamma z} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(z) &= A\Gamma^2 e^{\Gamma z} + B\Gamma^2 e^{-\Gamma z} = Z(\omega)Y(\omega)p(z) \end{aligned}$$

Um den Druckverlauf durch den Zylinder zu betrachten, benötigt man Randbedingungen  $p_0$  und  $u_0$  bei  $z = 0$ . Das Ziel der Rechnung ist natürlich die Berechnung von Druck und Geschwindigkeit am anderen Ende des Zylinders bei  $z = L$ , welche mit  $p_1$  und  $u_1$  bezeichnet werden. Angenommen  $p_0$  und  $u_0$  sind gegeben, dann folgt

$$\begin{aligned} p_0 &= p(0) = A + B \\ u_0 &= u(0) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial p}{\partial z}(0) = -\frac{\Gamma}{Z}(A - B) = -\sqrt{\frac{Y}{Z}}(A - B) = -\frac{1}{\zeta}(A - B). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem löst sich mit

$$\begin{aligned} B = \zeta u_0 + A &\implies p_0 = 2A + \zeta u_0 \implies A = \frac{1}{2}(p_0 - \zeta u_0) \\ \implies B &= \zeta u_0 + \frac{1}{2}(p_0 - \zeta u_0) = \frac{1}{2}(p_0 + u_0). \end{aligned}$$

Somit folgt die Lösung des Randwertproblems durch

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{2}(p_0 - \zeta u_0)e^{\Gamma z} + \frac{1}{2}(p_0 + u_0) = p_0 \left( \frac{e^{\Gamma z} + e^{-\Gamma z}}{2} \right) - \zeta u_0 \left( \frac{e^{\Gamma z} - e^{-\Gamma z}}{2} \right) \\ &= p_0 \cosh(\Gamma z) - \zeta u_0 \sinh(\Gamma z) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} u(z) &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Gamma}{Z} (p_0 \sinh(\Gamma z) - \zeta u_0 \cosh(\Gamma z)) = -\frac{1}{\zeta} (p_0 \sinh(\Gamma z) - \zeta u_0 \cosh(\Gamma z)) \\ &= -\frac{1}{\zeta} p_0 \sinh(\Gamma z) + u_0 \cosh(\Gamma z). \end{aligned}$$

Damit erhält man nun den Druck und die Geschwindigkeit am Ende des Zylinders mit

$$\begin{aligned} p_1 &= p(L) = p_0 \cosh(\Gamma L) - \zeta u_0 \sinh(\Gamma L) \\ u_1 &= u(L) = -\frac{1}{\zeta} p_0 \sinh(\Gamma L) + u_0 \cosh(\Gamma L). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma L) & -\zeta \sinh(\Gamma L) \\ -\frac{1}{\zeta} \sinh(\Gamma L) & \cosh(\Gamma L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

womit ein linearer Zusammenhang von Druck und Geschwindigkeit an beiden Enden des Zylinders gefunden ist. Die darin auftretende Matrix nennt sich **Transfermatrix**.

Die Determinante dieser Transfermatrix ist gegeben durch

$$\det \left( \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma L) & -\zeta \sinh(\Gamma L) \\ -\frac{1}{\zeta} \sinh(\Gamma L) & \cosh(\Gamma L) \end{bmatrix} \right) = \cosh^2(\Gamma L) - \sinh^2(\Gamma L) = 1$$

womit sich die Matrix leicht invertieren lässt

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma L) & \zeta \sinh(\Gamma L) \\ \frac{1}{\zeta} \sinh(\Gamma L) & \cosh(\Gamma L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Formulierung ist von Interesse, weil bei der Berechnung eines bestimmten Tons bekannt ist, welche Welle aus dem Fagott herauskommt und das Verhältnis aus Druck und Geschwindigkeit bestimmt werden soll, das nötig ist um den Ton zu erzeugen.

Nun kann man noch die Teilchengeschwindigkeit  $u$  durch den Teilchenfluss  $U = Su$  ersetzen, wobei  $S$  die Querschnittsfläche des Zylinders ist. Damit ergibt sich die Formulierung

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma L) & \frac{\zeta}{S} \sinh(\Gamma L) \\ \frac{S}{\zeta} \sinh(\Gamma L) & \cosh(\Gamma L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ U_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

## 4 Approximation von $Z, Y, \Gamma$ und $\zeta$

Für die Approximation werden die dimensionslosen Argumente

$$r_v = a \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{\mu}} \approx 632.8 \sqrt{f} (1 - 0.0029 \Delta T)$$

$$r_t = a \sqrt{\frac{C_p \omega \rho_0}{\kappa}} \approx 532.2 \sqrt{f} (1 - 0.0031 \Delta T) =: \nu r_v$$

verwendet, wobei

- $a$  der Rohrradius,
- $\mu$  der sogenannte Viskositätsparameter,
- $\kappa$  der Wärmeleitkoeffizient und
- $\Delta T$  die Abweichung der tatsächlichen Temperatur von der Bezugstemperatur  $300K$  ist. (Die Abweichung ist im Bereich der Zimmertemperatur näherungsweise gültig.)

Für die Besselfunktionen gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{J_1(z)}{z J_0(z)} = 0$$

womit für die Terme (aus 10 und 11)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( 1 - 2 \sqrt{\frac{i\alpha}{\omega}} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\omega}{i\alpha}}\right)} \right)^{-1} = 1$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left( 1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{i\beta}{\gamma\omega}} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}}\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\gamma\omega}{i\beta}}\right)} \right) = 1$$

gilt, und wir daher für kleine  $\alpha$  und  $\beta$  genähert schreiben können

$$Z_0 \approx i\rho_0\omega$$

$$Y_0 \approx \frac{i\omega}{c_0^2\rho_0}$$

Damit folgt auch

$$\Gamma_0 = \sqrt{ZY} \approx \sqrt{i\rho_0\omega \cdot \frac{i\omega}{c_0^2\rho_0}} = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2}} = ik$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \approx \sqrt{\frac{i\rho_0\omega}{\frac{i\omega}{c_0^2\rho_0}}} = \rho_0 c_0$$

In reibungsfreien Zylindern gilt für ebene Wellen dass

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k^2 p = \frac{\partial p}{\partial z^2}$$

was bei  $\Gamma_0^2 = Z_0 Y_0 = -k^2$  mit Gleichung 12 genau übereinstimmt. Daraus lässt sich schließen dass der Reibungsfehler nur im Verhältnis der Besselfunktionen steckt.

## Approximation von $Z$ und $Y$

Die Näherungen für  $Z$  und  $Y$  werden von uns nur für die numerische Berechnung benötigt, und werden daher von der Berechnung von Keefe übernommen. Diese Formeln gelten für  $r_v, r_t > 2$  bei einer Umgebungstemperatur von  $300K$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\zeta) &= \zeta_0 \left( 1 + \frac{0.369}{r_v} \right) \\ \operatorname{Im}(\zeta) &= -\zeta_0 \left( \frac{0.369}{r_v} + \frac{1.149}{r_v^2} + \frac{0.303}{r_v^3} \right) \\ \operatorname{Re}(\Gamma) &= \frac{\omega}{c_0} \left( \frac{1.045}{r_v} + \frac{1.080}{r_v^2} + \frac{0.750}{r_v^3} \right) \\ \operatorname{Im}(\Gamma) &= \frac{\omega}{c_0} \left( 1 + \frac{1.045}{r_v} \right) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen beschreiben den Unterschied von  $\zeta$  zur sogenannten charakteristischen Impedanz  $\zeta_0$ . Da im Fagott  $16 < r_v < 200$  gilt, ist der Realteil von  $\zeta$  nahe bei 1 und der Imaginärteil nahe bei 0; folglich unterscheiden sich  $\zeta$  und  $\zeta_0$  nur minimal.

Die letzten beiden Gleichungen beschreiben das Verhalten der komplexen Wellenzahl  $\Gamma$ . Der Realteil beschreibt daher das Auf- bzw. Abklingen der Amplitude der Wellen, und der Imaginärteil entspricht dem Bruch  $\frac{\text{Kreisfrequenz}}{\text{Phasengeschwindigkeit}} = \frac{\omega}{v_p}$ .

## Zusammenfassung

Das Hauptergebnis der bisherigen Behandlung des Problems ist die Transfermatrix für einen reibungsbehafteten Zylinder:

$$\begin{bmatrix} \cosh(\Gamma L) & \frac{\zeta}{S} \sinh(\Gamma L) \\ \frac{S}{\zeta} \sinh(\Gamma L) & \cosh(\Gamma L) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Im Fall von  $r_v, r_t > 2$  gilt dabei

$$\begin{aligned} Z &= R + i\omega N, \quad Y = G + i\omega C \\ \zeta &= \sqrt{\frac{Z}{Y}}, \quad \Gamma = \sqrt{ZY} \\ R &= \zeta_0 \frac{\omega}{c_0} \sqrt{2} r_v^{-1} \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} r_v^{-1} + \frac{15}{8} r_v^{-2} \right) \\ N &= \zeta_0 \frac{1}{c_0} \left( 1 + \sqrt{2} r_v^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_v^{-3} \right) \\ G &= \frac{\omega}{c_0 \zeta_0} \sqrt{2} (\gamma - 1) r_t^{-1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} r_t^{-1} - \frac{1}{8} r_t^{-2} \right) \\ C &= \frac{1}{c_0 \zeta_0} \left( 1 + (\gamma - 1) \sqrt{2} r_t^{-1} \left( 1 + \frac{1}{8} r_t^{-2} \right) \right) \end{aligned}$$

## 5 Formeln für die Implementierung

Die praktische Implementierung benötigt natürliche einige Approximationen und Annäherungen für das Rohrende, sowie für die Eigenschaften beim Übergang von einem Zylinderabschnitt zu einem Tonloch. In dieser Arbeit gehen wir nicht näher auf diese Berechnungen ein; ein genauerer Aufbau findet sich in der Diplomarbeit [Fellner (1998)] bzw. in den dort angeführten Verweisen.

### Das Rohrende

Eine Annäherung an das Problem am Rohrende ist, wenn man das Abstrahlverhalten einer Röhre mit Radius  $a$ , die durch einen unendlich großen Flansch beendet wird, betrachtet. In diesem Fall verwenden wir (nach [Fellner (1998)])

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= R + iX \\ R &= \frac{\zeta_0}{S} \left[ \frac{(ka)^2}{2} - \frac{(ka)^4}{2^2 3} + \frac{(ka)^6}{2^2 3^2 4} - \dots \right] \\ X &= \frac{\zeta_0}{S\pi(ka)^2} \left[ \frac{(2ka)^3}{3} - \frac{(2ka)^5}{3^2 5} + \frac{(2ka)^7}{3^2 5^2 7} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Da beim Fagott  $ka \approx 6 \cdot 10^{-2}$  gilt, kann man Terme höherer Ordnung vernachlässigen, womit

$$Z(\omega) \approx \frac{i\zeta_0 k}{S} \frac{8a}{3\pi}$$

folgt.

Das Fagott ist jedoch nicht geflanscht, womit sich das Abstrahlverhalten entscheidend ändert. Das Rohrende muss dabei approximiert werden, was zu einer Änderung der effektiven Rohrlänge um  $\Delta \simeq 0.6133a$  führt. Die Frequenzabhängigkeit dieser Längenänderung kann beim Frequenzbereich des Fagotts vernachlässigt werden. Die Näherungsformeln

$$\begin{aligned} Z_1(\omega) &= \rho_0 c_0 (R + iX) & (14) \\ R &= \frac{(ka)^2}{4} + 0.0127(ka)^4 + 0.082(ka)^4 \ln(ka) - 0.023(ka)^6 \\ X &= 0.6133(ka) - 0.036(ka)^3 + 0.034(ka)^3 \ln(ka) - 0.0187(ka)^5 \end{aligned}$$

werden für die Simulation verwendet.

### Die Tonlöcher

Die Tonlöcher und der Tonlochfluss wurde von Keefe (genauerer siehe [Fellner (1998)]) im eindimensionalen Fall gelöst. Diese Lösung verwendet jedoch normal auf den Zylinder stehende Tonlöcher, was beim Fagott jedoch nicht immer so ist. Um auch schräge Tonlöcher zu simulieren, wird vereinfacht angenommen, dass diese länger als gerade Tonlöcher sind.

Für die Simulation werden die Transfermatrizen von Keefe (leicht überarbeitet von [Fellner (1998)]) verwendet:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ \frac{1}{Z_s} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} Z_s^{offen} &= i \frac{\zeta_0}{S} \frac{a^2}{b^2} (ikt_e + \xi_e) \\ Z_s^{geschl} &= -i \frac{\zeta_0}{S} \frac{a^2}{b^2} \left( \cot(kt) + kt \left[ \frac{b^2}{4t^2} + 0.58 \frac{b^2}{a^2} - \frac{\pi b}{4t} \right] \right) \\ Z_a^{offen} &= -i \frac{\zeta_0}{S} \frac{a^2}{b^2} kt_a^{offen} \\ Z_a^{geschl} &= -i \frac{\zeta_0}{S} \frac{a^2}{b^2} kt_a^{geschl} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
t &= t_w + \frac{b^2}{8a} \left( 1 + 0.172 \frac{a^2}{b^2} \right) \\
t_e^{ohne} &= \frac{\frac{1}{k} \tan(kt) + b \left( 1.40 - 0.58 \frac{a^2}{b^2} \right)}{1 - 0.61 kb \tan(kt)} \\
t_e^{mit} &= \frac{\frac{1}{k} \tan(kt) + b \left[ 0.61 \left( \frac{R}{b} \right)^{0.18} \left( \frac{b}{h} \right)^{0.39} + \frac{\pi}{4} \left( 1 - 0.74 \frac{a^2}{b^2} \right) \right]}{1 - 0.61 \left( \frac{R}{b} \right)^{0.18} \left( \frac{b}{h} \right)^{0.39} kb \tan(kt)} \\
\xi_e &= 0.25(kb)^2 + \alpha t + \frac{1}{4} k d_v \ln \left( \frac{2b}{r_c} \right) \\
\alpha &= \frac{1}{2bc} \left[ \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\rho_0}} + (\gamma - 1) \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho_0 C_p}} \right] \\
d_v &= \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0\omega}} \\
r_c &\approx 0.00015 \\
t_a^{offen} &= \frac{0.47b \left( \frac{b}{a} \right)^4}{\tanh \left( \frac{1.84t}{b} \right) + 0.62 \frac{a^2}{b^2} + 0.64 \frac{a}{b}} \\
t_a^{geschl} &= \frac{0.47b \left( \frac{b}{a} \right)^4}{\coth \left( \frac{1.84t}{b} \right) + 0.62 \frac{a^2}{b^2} + 0.64 \frac{a}{b}}.
\end{aligned}$$

## 6 Implementierung und Ergebnisse

Für die Berechnung der Impedanzkurven des Fagotts haben wir ein kleines Matlab-Programm geschrieben. Dieses berechnet für verschiedene Frequenzen in einem bestimmten Bereich die Eingangsimpedanz des Fagotts aus den oben beschriebenen Formeln und stellt das Ergebnis grafisch dar. Im Folgenden beschreiben wir nun den Aufbau und die wesentlichen Teile des Programms.

Zu Beginn werden einmal alle relevanten Fagottdaten definiert, wie etwa die Länge der einzelnen Fagottteile oder auch Durchmesser und Höhe der Tonlöcher. Der folgende Programmausschnitt zeigt solch eine typische Definition von Daten.

```
1 % Lochdurchmesser der Tonlöcher
2 durch1 = .014835;
3 durch2 = [.017667, .014736, .01342, .013325, .01549];
4 durch3 = [.014605, .005625, .0055, .008819, .007785, .01425, .01312, .002563];
5 durch4 = [.009238, .0067, .006919, .003093, .0058, .00465];
6 durch5 = [.004538, .003929, .004866, .007031, .004268, .004938, .002988, .00195, .001488];
```

Die unterschiedlich langen Vektoren entsprechen dabei den einzelnen Fagottabschnitten mit unterschiedlich vielen Löchern. Anschließend werden diese Daten noch zu einem einzigen langen Vektor zusammengefasst; damit kann man mit einer for-Schleife den gesamten Fagottkorpus behandeln. Zusätzlich werden noch die Lochkonfigurationen einiger berechneter Töne definiert, also welche Löcher beim entsprechenden Griff geschlossen sind und welche nicht.

Im zweiten Programmabschnitt werden neben einigen Konstanten alle notwendigen Formeln als anonyme Funktionen deklariert. Dabei ist es nicht notwendig die Typen der Funktionsargumente näher zu definieren, das heißt MATLAB bestimmt selbst den Typ der Argumente und behandelt sie dann auch dementsprechend. Insbesondere ist es egal ob die Funktionsparameter reell oder komplex sind. Ein Beispiel für solch eine anonyme Funktion ist die Definition der Transfermatrixelemente  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  für den Fall reibungsbehafteter Zylinder.

```
1 % Zylinder-Funktionen
2 ...
3 Z = @(omega, a) R(omega, a) + 1i*omega*L(omega, a);
4 Y = @(omega, a) G(omega, a) + 1i*omega*C(omega, a);
5
6 AA = @(omega, a, l) cosh(sqrt(Z(omega, a)*Y(omega, a))*l);
7 BB = @(omega, a, l) sqrt(Z(omega, a)/Y(omega, a))/(a^2*pi)*...
8     sinh(sqrt(Z(omega, a)*Y(omega, a))*l);
9 CC = @(omega, a, l) (a^2*pi)/sqrt(Z(omega, a)/Y(omega, a))*...
10     sinh(sqrt(Z(omega, a)*Y(omega, a))*l);
11 DD = @(omega, a, l) cosh(sqrt(Z(omega, a)*Y(omega, a))*l);
```

Die Variable „omega“ ist dabei die Kreisfrequenz, „a“ der Innendurchmesser des Fagotts an der betrachteten Stelle und „l“ die Länge des (kleinen) Zylinders über den die Impedanz weitergerechnet wird. In analoger Weise sind auch die Formeln für die Transfermatrix definiert, mit der man die Impedanz über Tonlöcher hinweg weiterrechnet.

Der Hauptteil der Simulation befindet sich im dritten Teil des Programms, wo die eigentlichen Berechnungen durchgeführt werden. Darin läuft eine for-Schleife über alle vorgegebenen Frequenzen; für jede einzelne Frequenz wird dann zunächst nach Formel (14) die Ausgangsimpedanz am Fagottende berechnet. Danach arbeitet eine weitere Schleife alle folgenden Tonlöcher und die dazwischen liegenden Fagottabschnitte ab; nur die Teile ganz am Anfang bzw. am Ende des Fagottkorpus werden extra behandelt. Der folgende Code-Ausschnitt zeigt die wesentlichen Teile dieser Berechnung.

```
1 % 1. Loch bis exkl. 29. Loch
2 for loch = 1:28
3     imp = imp*breit(loch)^2*pi/4; % Umrechnen der Impedanz p/U auf p/u
4     if griff(loch) == 0
5         imp = (imp + Zages(omega, breit(loch)/2, durch(loch)/2, hoch(loch)))...
6             /(imp/Zsges(omega, breit(loch)/2, durch(loch)/2, hoch(loch)) + 1);
7     else
8         imp = (imp + Zaoff(omega, breit(loch)/2, durch(loch)/2, hoch(loch)))...
```

```

9           / (imp/Zsoff(omega, breit(loch)/2, durch(loch)/2, hoch(loch)) + 1);
10      end
11      imp = imp/(breit(loch)^2*pi/4); % Umrechnen von p/u auf die Impedanz p/U
12
13      b0 = breit(loch);
14      ll = dist(loch + 1) - dist(loch);
15      nzyl = ceil(ll/weit);
16      lzyl = ll/nzyl;
17
18      for zyl = 1:nzyl
19          a = b0 + k(teil(loch))*zyl*lzyl;
20          imp = (AA(omega, a/2, lzyl)*imp + BB(omega, a/2, lzyl))...
21              / (CC(omega, a/2, lzyl)*imp + DD(omega, a/2, lzyl));
22      end
23  end

```

Bei den einzelnen Löchern wird dabei zwischen geschlossen und offen unterschieden, je nachdem ob der entsprechende Eintrag im Vektor „griff“ gleich Null oder Eins ist. Die Umrechnung direkt vor und direkt nach der Lochberechnung ist notwendig, da die Transfermatrix für Tonlöcher den Druck und die Teilchengeschwindigkeit verknüpft, und nicht Druck und Teilchenfluss wie bei der Impedanz. Anschließend wird der darauffolgende Fagottabschnitt bis zum nächsten Loch behandelt; dieser wird dabei in kurze Zylinder zerlegt entlang derer die Impedanz weitergerechnet wird. Die Variable „b0“ ist dabei der Innendurchmesser des Fagotts beim entsprechenden Loch, „ll“ der Abstand bis zum nächsten Loch, „nzyl“ die Anzahl an kleinen Zylindern der Länge „lzyl“, in die die Strecke bis zum nächsten Loch aufgeteilt wird. Die folgende for-Schleife läuft über diese kleinen Zylinder, wobei „a“ der Durchmesser des aktuellen Zylinders ist und die Impedanz durch den darauffolgenden Ausdruck aktualisiert wird.

In analoger Weise wird der S-Bogen in kleine Zylinder unterteilt und die Impedanz wieder Schritt für Schritt weiter gerechnet. Zuletzt wird noch die Impedanz des Rohres berücksichtigt, das den Anfang des Fagotts darstellt. Allerdings liefert unsere Simulation mit dem Rohrvolumen aus [Fellner (1998)] nicht die erwarteten Ergebnisse; erst bei einem viel kleineren Rohrvolumen stellen sich die bekannten Resultate ein. Leider konnten wir trotz intensiver Kontrollen sowohl der Daten als auch der Implementierung nicht herausfinden wieso dieses unerwartete Verhalten beim Rohr auftritt und die Eingangsimpedanzen um einige Zehnerpotenzen größer sind als in der Arbeit von [Fellner (1998)].

Trotz dieser offenen Fragen stimmen unsere berechneten Impedanzkurven qualitativ recht gut mit jenen überein, die in [Fellner (1998)] dargestellt sind. Als Beispiel für die erhaltenen Resultate werden im Folgenden die Impedanzkurven von ein paar ausgewählten Tönen gezeigt. Das Kontra B ist dabei jener Ton, der erklingt, wenn alle Tonlöcher geschlossen sind. Wie erwartet treten die Resonanzfrequenzen bei Vielfachen der Grundfrequenz auf, ähnlich dem Verhalten einer schwingenden Saite. Die Unterschiede in den Impedanzkurven bei den anderen Tönen sind jedoch nicht so leicht zu interpretieren. Dennoch erkennt man, dass sich der globale Verlauf der Kurven mit den Tönen deutlich ändert; einmal sind die Resonanzfrequenzen auf einen größeren Bereich verteilt und einmal auf einen kleineren konzentriert.

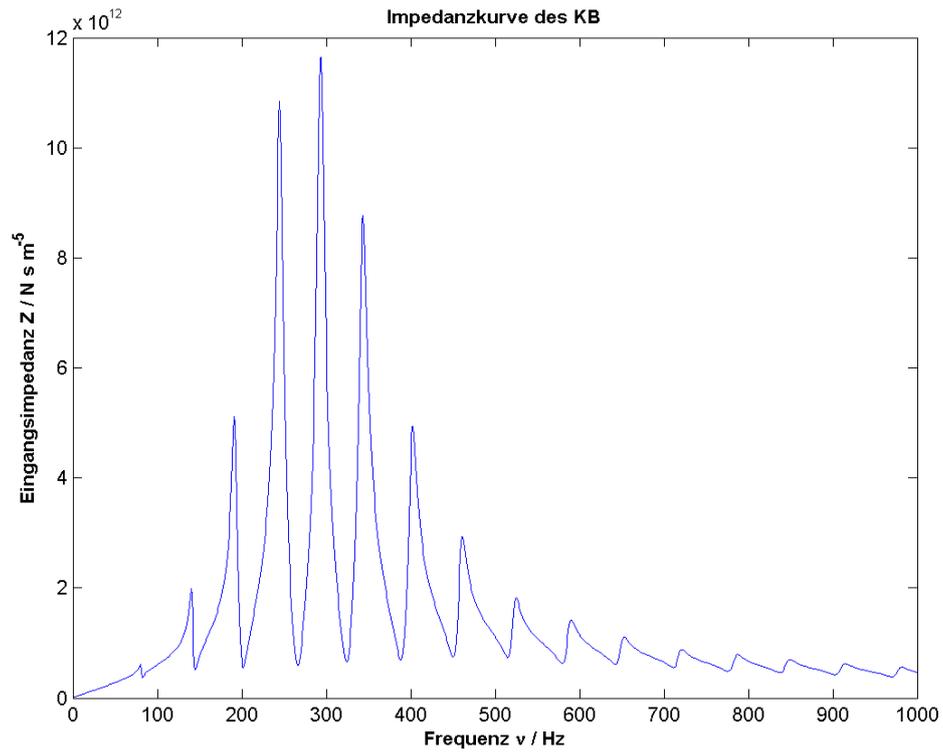


Abbildung 1: Berechnete Impedanzkurve des Kontra B.

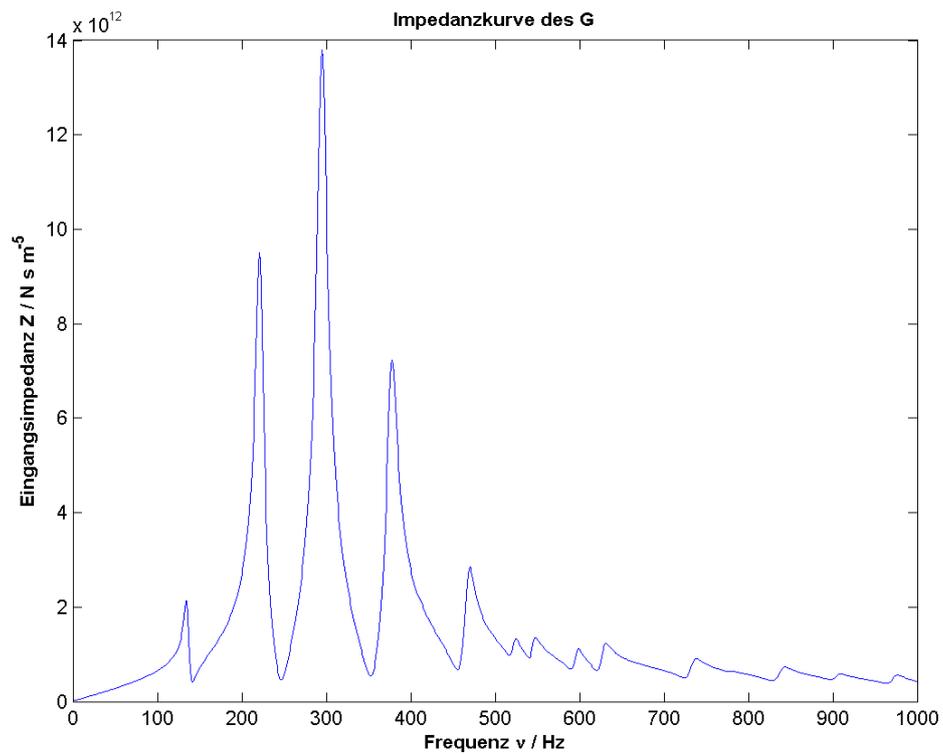


Abbildung 2: Berechnete Impedanzkurve des großen G.

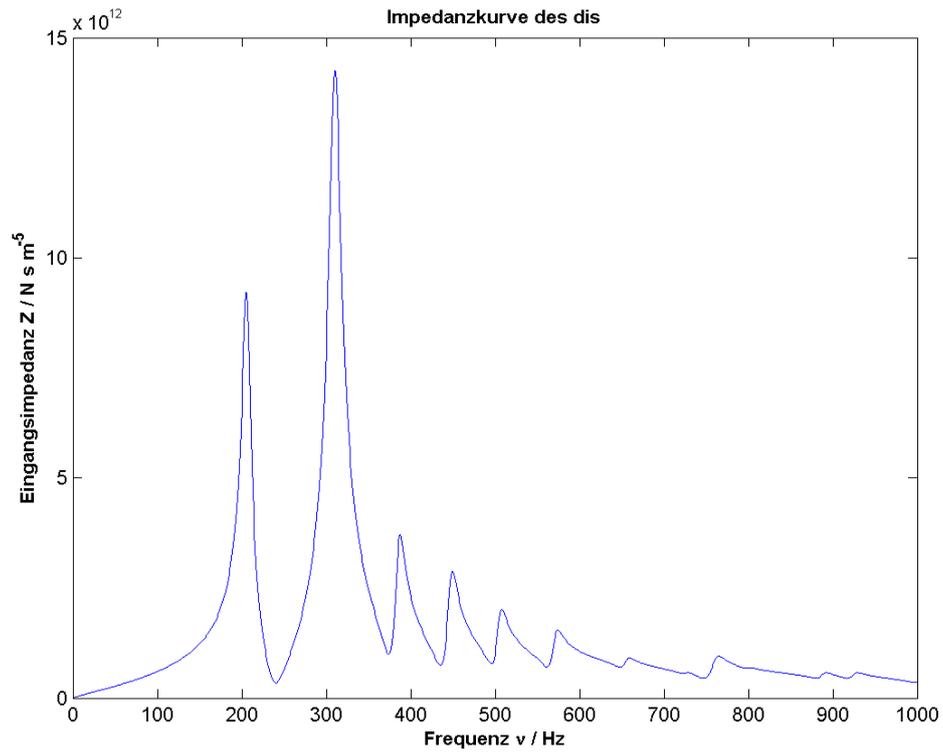


Abbildung 3: Berechnete Impedanzkurve des kleinen dis.

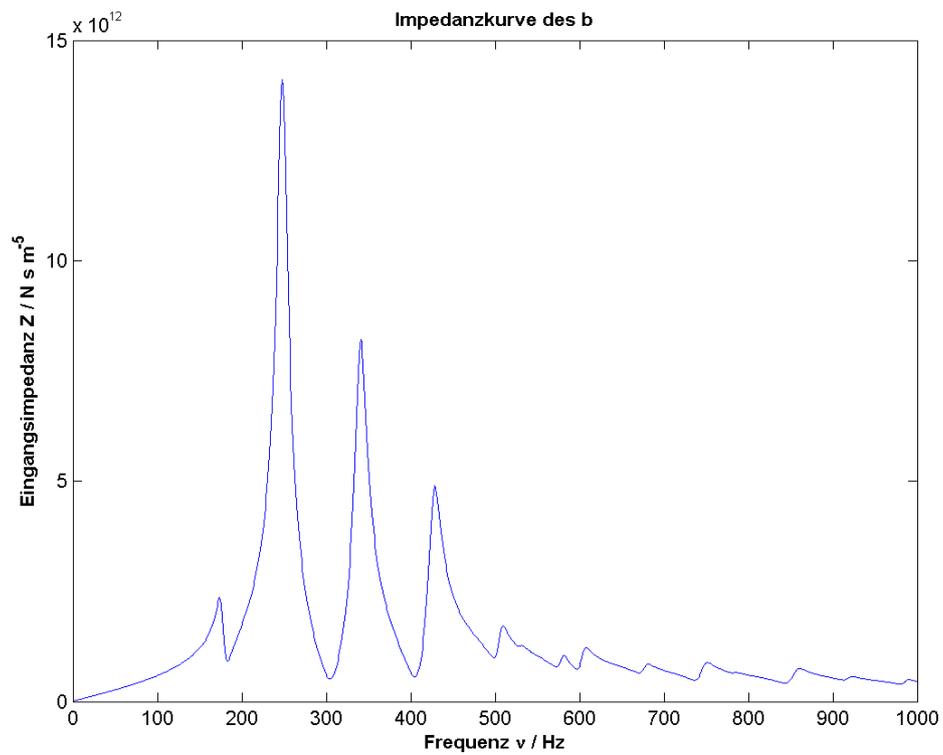


Abbildung 4: Berechnete Impedanzkurve des kleinen b.

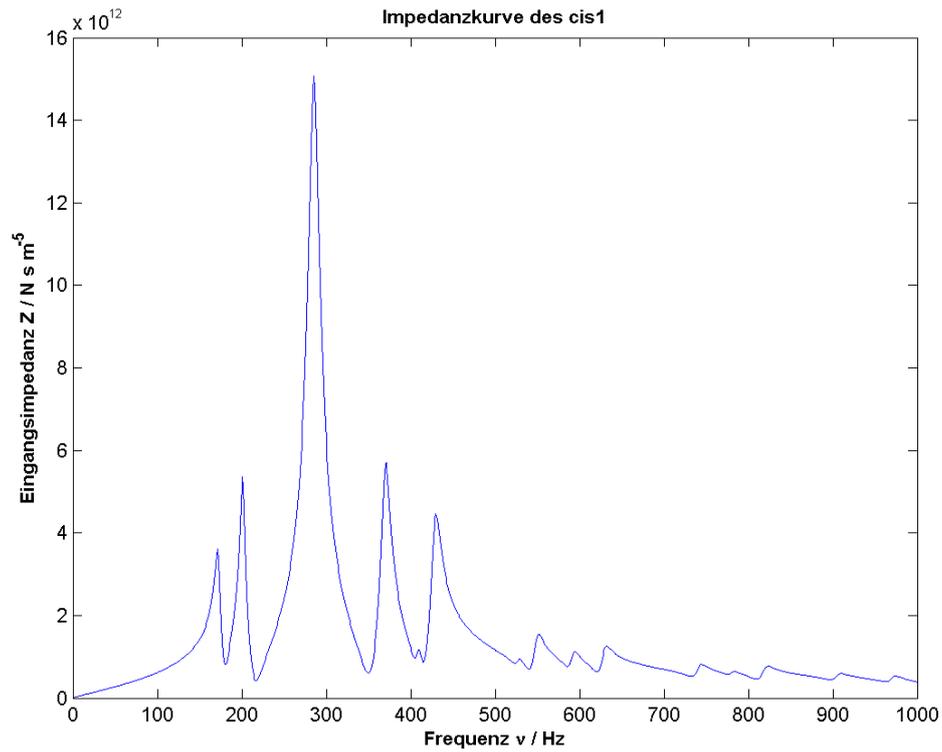


Abbildung 5: Berechnete Impedanzkurve des eingestrichenen cis1.

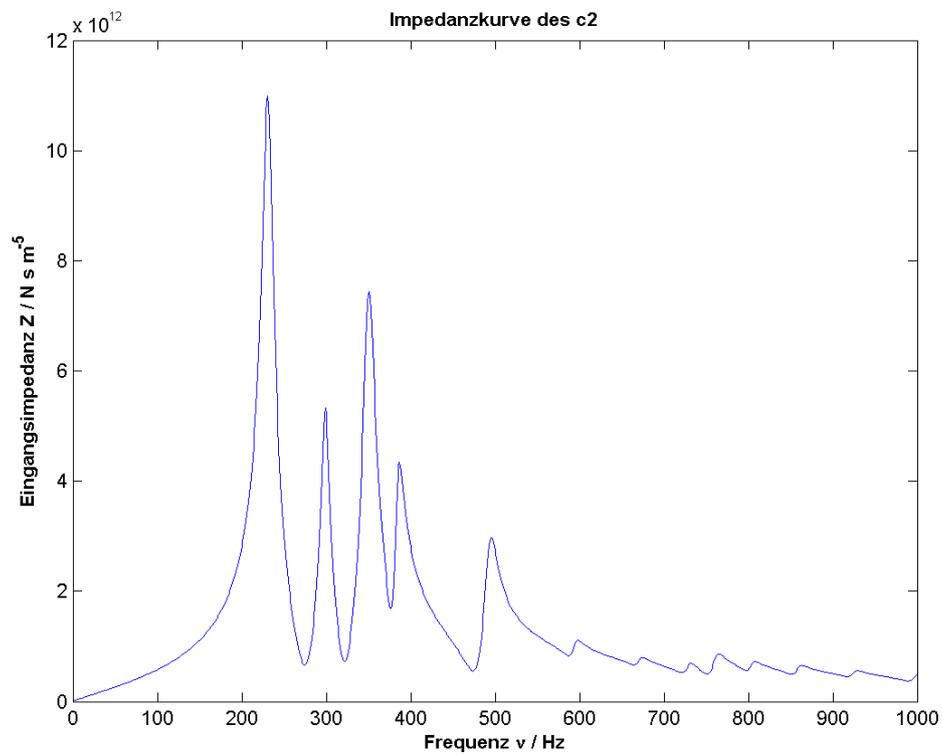


Abbildung 6: Berechnete Impedanzkurve des zweigestrichenen c2.

## Literatur

[Fellner (1998)] Klemens Fellner. Transmission-Line Simulation meines Fagotts, 1998.

[Wikipedia (2011)] Wikipedia. Prandtl-Zahl — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2011. URL <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Prandtl-Zahl&oldid=91352233>. [Online; Stand 23. November 2011].