Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Universität Graz

Struktursätze und projektive Kollineationen in der projektiven Geometrie

Bachelorarbeit Mathematik

verfasst von

Matthäus Deutsch

vorgelegt bei Prof. Dr. Karin Baur

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die projektive Geometrie, hervorgegangen aus praktischen Fragen perspektivischer Geometrie im 17. Jahrhundert[1], ist ein wichtiges Teilgebiet der reinen Mathematik und Anwendungsgebiet der linearen Algebra. Dieses Verhältnis zur linearen Algebra soll in dieser Arbeit mathematisch erläutert und präzisiert werden.

In der projektiven Geometrie werden projektive Räume $\mathbb{P}$ betrachtet, welche axiomatisch eingeführt werden. Zahlen im Sinne von Koordinaten braucht es wie in der herkömmlichen euklidischen Geometrie hingegen erst, wenn man konkret rechnen und auf die reichen Ergebnisse eben linearer Algebra zurückgreifen will. Zu diesem Zweck betreibt man analytische Geometrie und führt projektive Räume $\mathbb{P}(V)$ abhängig von Vektorräumen V über Schiefkörpern K ein. Die Frage ist, in welcher Beziehung diese Spezialfälle zu allgemeinen projektiven Räumen stehen - sind es tatsächlich bloße Beispiele, oder können wir axiomatisch eingeführte projektive Räume der synthetischen Geometrie ganz allgemein als durch bestimmte Vektorräume und bestimmte Schiefkörper gegebene Strukturen erkennen? Offenbar ist dies nicht in völliger Allgemeinheit der Fall, denn mit der Moultonebene gibt es ein einfaches Beispiel einer projektiven Ebene, welche nicht als ein Raum $\mathbb{P}(V)$ darstellbar ist. Dieser wichtigen Frage nach dem Zusammenhang zwischen synthetischer und analytischer projektiver Geometrie wollen wir nachgehen - sie lässt sich durch die sogenannten Struktursätze beantworten. Während die ersten Struktursätze die Struktur von projektiven und affinen Räumen untersuchen, beschäftigen sich die zweiten Struktursätze und in weiterer Folge der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie mit der Charakterisierung von Kollineationen in projektiven bzw. affinen Räumen und den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen auf Vektorräumen und Kollineationen in projektiven Räumen. Dadurch werden die wichtigsten Betrachtungsobjekte linearer Algebra - die linearen Abbildungen - innerhalb der projektiven Geometrie betrachtet. So stößt man auf projektive Kollineation, die Gegenstand des letzten Kapitels sein werden.

Die Arbeit folgt im Wesentlichen den Abschnitten 3.4,3.5,3.6 im Buch von Beutelspacher und Rosenbaum [1]. Insbesondere die Kenntnis der ersten beiden Kapitel des Buches, also die Grundlagen der synthetischen sowie analytischen projektiven Geometrie wird vorausgesetzt,[2] auch wenn einige Definitionen und wichtige Sätze wiederholt werden.

[1]Insbesondere durch Gerard Desargues (1591-1661), der bei der Konstruktion von Sonnenuhren auf die ersten Probleme der projektiven Geometrie stieß und erste Arbeiten zu dem Thema publizierte. Siehe Scriba und Schreiber [2], S. 346 ff.

[2]etwa die Kenntnis von projektiven und affinen Räumen, vom Begriff der Kollineation, von $\mathbb{P}(V)$, dem Satz von Desargues und dem Satz von Pappos

2 Die ersten Struktursätze

2.1 Einleitende Definitionen und Sätze

Zu Beginn sollen einige in der Folge wesentlichen Definitionen und Sätze ohne Beweis erläutert werden.

Definition 1. Sei α eine Kollineation auf $\mathbb{P}$. Dann heißt α Zentralkollineation, wenn es eine Hyperebene $\mathbb{H}$ und einen Punkt Z gibt, sodass jeder Punkt auf $\mathbb{H}$ Fixpunkt von α und jede Gerade durch Z Fixgerade von α ist. $\mathbb{H}$ wird Achse, Z Zentrum der Zentralkollineation α genannt.

Für jeden Punkt X aus $\mathbb{H}$ gilt also $\alpha(X) = X$, für jede Gerade g, die durch Z verläuft, $\alpha(g) = g$. Für die Struktursätze wichtig ist die Feststellung, dass Zentralkollineationen eindeutig durch Zentrum, Achse und bereits zwei Punkte bestimmt sind. Dies liefert der Satz von Baer, allerdings nur, sofern im jeweiligen Raum auch der Satz von Desargues gilt, eine Einschränkung, die sich auf alle folgenden Sätze auswirken wird.

Satz 1. *(Satz von Baer) $\mathbb{P}$ sei ein projektiver Raum, in welchem der Satz von Desaergues gilt,*[3] *$\mathbb{H}$ eine Hyperebene in diesem und Z, P, P' verschiedene kolliniere Punkte in $\mathbb{P}$ mit $P, P' \notin \mathbb{H}$, so existiert genau eine Zentralkollineation auf $\mathbb{P}$ mit Achse $\mathbb{H}$, Zentrum Z, welche P auf P' abbildet.*

Eine direkte Folgerung aus diesem Satz ist folgende Eigenschaft, die wir noch brauchen werden und ebenfalls als Satz notieren wollen.

Satz 2. *Sei $\mathbb{P}$ ein desarguesscher projektiver Raum mit Dimension $d \geq 2$. α' sei eine Zentralkollineation eines Unterraumes $\mathbb{U} \leq \mathbb{P}$. Dann gibt es für jeden Unterraum $\mathbb{V} \leq \mathbb{P}$, der disjunkt zu $\mathbb{U}$ ist, eine Zentralkollineation von $\mathbb{P}$, die α' induziert, deren Achse durch $\mathbb{V}$ geht und die Achse von α' enthält.*

Nun wollen wir besonderen Gruppen an Zentralkollineationen einen Namen geben.

Definition 2. $T(\mathbb{H})$ bezeichne die Menge der Zentralkollineationen mit Achse $\mathbb{H}$ und Zentrum auf $\mathbb{H}$. Für den affinen Raum $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$ nennen wir $T(\mathbb{H})$ die Menge der Translationen.

$T(\mathbb{H})$ ist eine scharf transitive abelsche Gruppe auf $\mathbb{A}$, zu zwei verschiedenen Punken P, Q auf $\mathbb{A}$ gibt es also genau ein $\alpha \in T(\mathbb{H})$ mit $\alpha(P) = Q$

Definition 3. Die Zentralkollineationen eines projektiven Raums $\mathbb{P}$ mit Achse $\mathbb{H}$ und Zentrum O wollen wir Dilatationen mit Zentrum O nennen und mit D_O abkürzen.

Auch Dilatationen sind natürlich eine Gruppe, welche wegen dem Satz von Baer scharf transitiv auf den von O verschiedenen Punketen jeder Gerade durch O auf $\mathbb{A}$ operiert.

[3] zum Satz von Desargues siehe Abschnitt 2 bei Beutelspacher und Rosenbaum [1]. Im Folgenden bezeichnen wir derartige Räume mit dem Adjektiv „desarguesch“.

2.2 Wahl von Schiefkörper und Vektorraum

Bei der Antwort auf die Frage, welche projektive Räume sich mittels Vektorräumen über Schiefkörpern darstellen lassen, sind einerseits Vektorraum und Schiefkörper zu wählen, andererseits müssen für den projektiven Raum die richtigen Eigenschaften gewählt werden. Die Antwort auf erstere Frage kann hier nicht in aller Breite ausgeführt werden und soll hier nur kurz wiederholt werden,[4] die zweite Frage führt uns auf die Eigenschaft, dass im jeweiligen Raum der Satz von Desargues gilt.

Betrachten wir die Punktmenge $\mathcal{P}^*$ des affinen Raumes $\mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$, so lässt sich mithilfe der Dilatationen D_O mit Zentrum O ein Schiefkörper definieren:

Definition 4. Sei $K := D_O \cup 0$, wobei 0 die Nullabbildung auf der Punktmenge $\mathcal{P}^*$ des affinen Raumes $\mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$, D_O die Menge der Zentralkollineationen von $\mathbb{P}$ mit Achse $\mathbb{H}$ und Zentrum O darstellen soll. Wir definieren auf K folgende Abbildungen:

- Addition: $(\sigma_1 + \sigma_2)(X) = \sigma_1(X) + \sigma_2(X)$
- Multiplikation: $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1 \circ \sigma_2, & \text{falls } \sigma_1, \sigma_2 \in D_O \\ 0, & \text{falls } \sigma_1 = 0 \text{ oder } \sigma_2 = 0 \end{cases}$

Lemma 1. *Obige Struktur $(K, +, \cdot)$ ist ein Schiefkörper.*

Nun können wir einen Schiefvektorraum definieren.

Definition 5. Wir definieren auf der Punktmenge $\mathcal{P}^*$ eines affinen Raumes die Addition mithilfe von Translationen: Für $P, Q \in \mathcal{P}^*$ sei $+$ definiert durch $P + Q := \tau_P(Q) = \tau_P(\tau_Q(O))$, wobei τ_P die Translation von O auf P bezeichnet. Die Skalarmultiplikation wird natürlich durch den Schiefkörper erklärt: $\sigma \cdot P = \sigma(X)$ mit $P \in \mathcal{P}^*, \sigma \in K$. Da die Dilatationen auf der Punktmenge von $\mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$ operieren, ist das wohldefiniert.

Lemma 2. *$\mathcal{P}^*$ mit den oben definierten Operationen ist ein Schiefvektorraum über K.*

2.3 Der erste Struktursatz für affine Räume

Nun haben wir die wichtigsten Begriffe wiederholt, um den ersten Struktursatz für affine Räume formulieren zu können:

Satz 3. *Sei $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus H$ ein affiner Raum, in welchem der Satz von Desargues gilt. Dann gibt es einen Schiefkörper K und einen Schiefvektorraum V^* über K, für welchen gilt:*

- *Die Punkte von $\mathbb{A}$ sind die Elemente von V^*.*
- *Die Geraden von $\mathbb{A}$ sind die Nebenklassen der eindimensionalen Unterräume von V^*.*

[4] für eine ausführlichere Behanldung siehe etwa die Seminararbeit von Miriam Hraßnigg, `http://www.uni-graz.at/~baurk/lehre/WS2012-Seminar/Vortrag9.pdf`

Beweis. Wir wählen K wie in Definition 4, setzen $V^* = \mathcal{P}^*$ mit den in Definition 5 gewählten Operatoren und erhalten dank der obigen Lemmata einen Schiefkörper samt Vektorraum mit den Elementen von V^* als Punkte von $\mathbb{A}$. Was zu zeigen bleibt, ist die zweite Aussage, nämlich, dass die Geraden von $\mathbb{A}$ die Nebenklassen der eindimensionalen Untervektorräume von V^* sind. Wir betrachten also eine Gerade g. Falls g durch das Zentrum O geht, können wir g als OP mit $P \in \mathcal{P}^* \setminus O$ beschreiben. Da in $\mathbb{A}$ der Satz von Desargues gilt, können wir den Satz von Baer anwenden, mithin gibt es für jeden Punkt von $g \cap \mathbb{A}$, der von O verschieden ist, eine Zentralkollineation aus D_O, die P auf diesen Punkt abbildet. Wegen der Wahl von K als $D_O \cup \{0\}$ lässt sich $g \cap \mathbb{A}$ als Erzeugnis $\langle P \rangle$ und damit als eindimensionaler Unterraum von V^* schreiben. Geht g hingegen nicht durch das Zentrum O, gilt $g = P + OX$,[5] wobei $P \notin OX$. Mit dem gleichen Argument wie oben folgt, dass OX der eindimensionale Unterraum $\langle X \rangle$ von V^* ist, somit ist $g = P + \langle X \rangle$. Sei nun umgekehrt $\langle X \rangle = \{\sigma(X) \mid \sigma \in K\}$ ein eindimensionaler K-Unterraum von V^*, der genau die Elemente von Punkten der Gerade OX beinhaltet (da jedes $\sigma \in K$ eine Zentrakollineation mit Zentrum O darstellt). Damit gilt für beliebig gewählte Nebenklassen: $P + \langle X \rangle = P + OX$, was eine Gerade in $\mathbb{A}$ ist. □

Nachdem wir die Struktur von affinen Räumen geklärt haben, können wir selbiges auch für desarguesche projektive Räume tun, indem wir auf obigen Satz zurückgreifen.

2.4 Der erste Struktursatz für projektive Räume

Satz 4. *Sei $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ein desarguescher projektiver Raum der Dimension zwei oder größer. Dann gibt es einen Schiefkörper K und einen K-Schiefvektorraum V, sodass $\mathbb{P} \simeq \mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Wir wollen die Aussage auf obigen Satz zurückführen, wählen also eine beliebige Hyperebene H von $\mathbb{P}$ und den Schiefkörper K und V^* wie in Satz 3. Dann definieren wir den K-Schiefvektorraum V als

$$V := K \times V^* = (k, v) \quad (k \in K, v \in V^*).$$

Wir definieren eine Abbildung α, welche sich als Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}(V)$ herausstellen wird:

$$\alpha(X) := \begin{cases} \langle (1, X) \rangle, & \text{falls } X \text{ ein Punkt von } \mathbb{P} \setminus H \\ \langle (0, v) \rangle & \text{mit } v \in V^* \text{ gegeben durch } OX \text{ in } \mathbb{P} \setminus H, \\ & \text{falls } X \text{ ein Punkt von } H \end{cases} \tag{1}$$

Nach Satz 3 ist der Punkt X aus $\mathbb{P} \setminus H$ ein Vektor aus V^*, die Gerade OX ein eindimensionaler K-Unterraum aus V^*, hier eben als $\langle v \rangle$ bezeichnet. Die obigen Zuschreibungen sind somit wohldefiniert. Aus der Definition folgt also leicht, dass α Punkte in $\mathbb{P}$ auf eindimensionale Unterräume in V, also Punkte in $\mathbb{P}(V)$ abbildet. Doch wie steht es um Geraden?

[5] Dies folgt aus den Sätzen über Translationen, siehe Beutelspacher und Rosenbaum [1], S. 108

Sei g eine Gerade von $\mathbb{P}$. Ist $g \in \mathbb{P} \setminus H$, lässt sich g schreiben als $g = u + \langle v \rangle = \{u + \sigma v \mid \sigma \in K\} \cup \underbrace{(\langle v \rangle \cap H)}_{=:v^*}$ mit $u, v \in V^*$. Somit haben wir die Punkte von g in der richtigen Form aufgespalten und können auf diese α anwenden:

$$\alpha(u + kv) = \langle (1, u + \sigma v) \rangle \quad \forall \sigma \in K$$
$$\alpha(v^*) = \langle (0, v) \rangle$$

Somit ergibt sich $\alpha(g) = \langle (1, u), (0, v) \rangle$. Ist hingegen $g \in H$, und seien Z_1, Z_2 Punkte auf g. Es gibt Vektoren $v_1, v_2 \in V^*$ mit

$$OZ_1 = \langle v_1 \rangle, OZ_2 = \langle v_2 \rangle. \tag{2}$$

Es folgt $\alpha(g) = \langle (0, v_1), (0, v_2) \rangle$. Somit ist in beiden Fällen das Bild einer Geraden ein zweidimensionaler Unterraum von V, mithin eine Gerade in $\mathbb{P}(V)$. α geht also von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{P}(V)$.

Was zu zeigen bleibt ist, dass α isomorph ist. Für die Punktmenge $\mathcal{P}$ folgt das direkt aus der Definition. Auf $\mathcal{G}$ betrachten wir zweidimensionale Unterräume von V. Diese lassen sich darstellen als Erzeugnis $\langle (\sigma_1, u), (\sigma_2, v) \rangle$ mit $u, v \in V^*, \sigma_1, \sigma_2 \in K$. Zumindest eines der σ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Null annehmen. Gilt $\sigma_1, \sigma_2 = 0$ so ist die Gerade zwischen $\langle u \rangle \cap H$ und $\langle v \rangle \cap H$ ein Urbild von $\langle (\sigma_1, u), (\sigma_2, v) \rangle$ in H. Ist hingegen eines der σ gleich 1, ist $u + \langle v \rangle$ ein Urbild in $\mathbb{P} \setminus H$. Somit ist Surjektivität gezeigt. Die Injektivität folgt sofort aus der Definition der Abbildung.

□

Mit diesem wichtigen Satz haben wir die Struktur von projektiven Räumen beschrieben. Diese Räume sind, sofern der Satz von Desargue in ihnen gilt, koordinatisierbar, es lässt sich mit ihren Objekten rechnen. Und der Satz von Desargue gilt für eine ganze Menge von Räumen, beispielsweise für alle Räume mit einer Dimension größer als 3, also Räume, welche mehr als Ebenen darstellen. Eine weitere direkte Folgerung ist folgender Satz:

Satz 5. *Die Ordnung eines endlichen projektiven Raumes mit einer Dimension von mindestens* 3 *ist eine Primzahlpotenz.*

Beweis. Die Tatsache folgt daraus, dass der Raum über einem Vektorraum mit endlichem Schiefkörper K koordinatisierbar ist. Da die Ordnung eines endlichen Schiefkörpers eine Primzahlpotenz sein muss, muss das auch für die Ordnung des projektiven Raumes gelten. □

3 Die zweiten Struktursätze

Die zweiten Struktursätze untersuchen die Struktur von Kollineationen in desargueschen projektiven und affinen Räumen, um Kollineationen in der Sprache der zugrunde liegenden Vektorräume beschreiben zu können. Zuerst werden wir wie bei den ersten Struktursätzen den affinen Fall behandeln.

3.1 Die Struktur von Kollineationen auf affinen Räumen

Um die Struktur von Kollineationen in affinen Räumen zu klären, braucht es einiges an Vorarbeit, die in diesem Kapitel geleistet werden soll.

Wir betrachten wieder einen desargueschen affinen Raum $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus H$ der Dimension $d \geq 2$. O sei ein fester Punkt von $\mathbb{A}$. $T = T(H)$ soll die Gruppe der Translationen von $\mathbb{A}$, also die Menge der Zentralkollineation in $\mathbb{A}$ mit Achse H und Zentrum auf H bezeichnen. Γ bezeichnet die Menge sämtlicher Kollineation auf $\mathbb{A}$, also die Kollineationen auf $\mathbb{P}$, welche die Hyperebene H fest lassen.

Definition 6. Mit den obigen Festlegungen definiere:

$$\Gamma_O := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha(O) = O\}$$

Das sind also diejenigen Kollineationen auf $\mathbb{A}$, für die O ein Fixpunkt ist. Ein Beispiel für eine solche Kollineation sind Dilatationen mit Zentrum O, diese sind zusätzlich noch durch eine Fixachse definiert.

Weiters sei hier an die Aussage des Satzes 3 erinnert: Es gibt einen Schiefkörper K und einen Vektorraum V^* derart, dass die Elemente des Vektorraumes die Punkte von $\mathbb{A}$, die Geraden von $\mathbb{A}$ die Nebenklassen der eindimensionalen Unterräume des Vektorraumes V^* sind.

Lemma 3. *Mit den obigen Bezeichungen gilt:*

1. Γ *ist bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.*

2. Γ_O *ist Untergruppe von* Γ.

3. T *ist Normalteiler von* Γ.

4. *Jedes* $\alpha \in \Gamma$ *lässt sich in eindeutiger Weise als* $\alpha = \tau\sigma$ *mit* $\tau \in T$, $\sigma \in \Gamma_O$ *schreiben.*

Beweis. 1. Γ ist Teilmenge der Permutationen auf den Punkten von $\mathbb{A}$. Die Identität liegt in Γ und das Produkt zweier Kollineationen ist wieder eine Kollineation. Für $\alpha \in \Gamma$ ist auch α^{-1} eine Kollineation auf $\mathbb{A}$: Bijektivität folgt sofort, auch die Inzidenz überträgt sich wegen

$$PIg \Leftrightarrow \alpha(\alpha^{-1}(P))I\alpha(\alpha^{-1}(g)) \Leftrightarrow \alpha^{-1}(P)I\alpha^{-1}(g)$$

Nun folgt leicht, dass α^{-1} eine Kollineation ist und damit, dass Γ Untergruppe der Gruppe der Permutationen und somit selbst eine Gruppe ist.

2. Für $\alpha \in \Gamma_O$ gilt $\alpha^{-1}(O) = \alpha^{-1}(\alpha(O)) = O$, somit ist auch hier das Untergruppenkriterium erfüllt.

3. Es ist zu zeigen, dass für $\alpha \in \Gamma$, $\tau \in T$ $\alpha\tau\alpha^{-1}$ in T ist. Sei $P \in H$, dann folgt

   $$\alpha\tau\alpha^{-1}(P) = \alpha\alpha^{-1}(P) = P,$$

   da $\alpha^{-1}(P) \in H$ und somit ein Fixpunkt von T. H ist also die Achse von $\alpha\tau\alpha^{-1}$. Falls $\alpha\tau\alpha^{-1}$ einen Fixpunkt Q außerhalb von H hat, folgt für diesen

   $$\alpha\tau\alpha^{-1}(Q) = Q \quad \text{und somit } \tau\alpha^{-1} = \alpha^{-1}(Q).$$

   Damit hat τ einen Fixpunkt außerhalb der Achse, muss somit die Identität sein, damit ist auch $\alpha\tau\alpha^{-1} = \mathrm{id}$ und somit eine Translation. Im anderen Fall hat $\alpha\tau\alpha^{-1}$ das Zentrum auf H und ist ebenfalls eine Translation.

4. Für die Existenz betrachte die Translation $\tau = \tau_{\alpha(O)}$, die O auf $\alpha(O)$ abbildet. Diese existiert aufgrund der scharfen Transitivität von Translationen, welche aus dem Satz von Baer folgt. Wir setzen $\sigma := \tau^{-1}\alpha$, damit folgt $\alpha = \tau\sigma$ mit $\tau \in T$ und $\sigma \in \Gamma_O$ wegen $\sigma(O) = \tau^{-1}\alpha(O) = O$.
   Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es weitere $\tau' \in T$, $\sigma' \in \Gamma_O$ gibt mit $\alpha = \tau'\sigma'$ Es folgt

   $$\tau\sigma = \tau'\sigma' \Rightarrow \tau'^{-1}\tau = \sigma'\sigma^{-1} \in T \cap \Gamma_O$$

   Da $O \in \mathbb{P} \setminus H$ ist $T \cap \Gamma_O = \{\mathrm{id}\}$, somit ist $\tau'^{-1}\tau = \sigma'\sigma^{-1} = \mathrm{id}$ und $\tau' = \tau$ sowie $\sigma' = \sigma$.

□

Die letzte Aussage des Lemmas ist insofern wichtig, als dass wir nun nicht mehr Kollineationen betrachten müssen, sondern uns auf Elemente von T und Γ_O beschränken können, und somit dennoch sämtliche Kollineationen auf $\mathbb{A}$ beschreiben können. Wir gehen also auf Translationen ein:

Lemma 4. *Sei P ein beliebiger Punkt im affinen Raum $\mathbb{A}$ mit zugrundeliegendem Vektorraum V^*. Dann ist durch*

$$\tau(X) := X + P$$

eine Translation gegeben.

Beweis. Sei $X \in H$. Dann gilt $\tau(X) = X + P = P + X = \tau_P(X) = X$ wegen $\tau_P \in T$. τ hat somit die Achse H. Sei Q ein Fixpunkt von τ mit $Q \notin H$. Dann folgt $Q = Q + P$ und somit $P = O$. Damit ist τ jedoch die Identität und somit eine Translation. Falls τ keinen Fixpunkt außerhalb von H hat, ist wie oben bereits eine Translation gegeben. □

Lemma 5. *Sei $\tau \in T$ beliebig. Für einen beliebigen Punkt P von $\mathbb{A}$ setze $P' = \tau(P)$. Dann lässt sich τ beschreiben durch:*

$$\tau(X) = X + P' - P \quad \textit{für alle Punkte } X \textit{ von } \mathbb{A}$$

X, P und P' werden hier wie oben als Vektoren im zugrundeliegenden Vektorraum V^* aufgefasst.

Beweis. Von obigem Lemma wissen wir, dass τ' gegeben durch $\tau'(X) := X + P' - P$ eine Translation ist. τ und τ' sind Translationen, die beide P auf P' abbilden. Wegen der scharfen Transitivität von Translationen muss dann gelten, dass $\tau = \tau'$. Somit kann τ durch τ' beschrieben werden. $\square$

Wir haben nun gezeigt, wie Translationen im Vektorraum beschrieben werden können. Nun wollen wir ähnliches auch für Kollineationen in Γ_O tun, indem wir zeigen, dass diese sogenannte „semilineare "Abbildungen im Vektorraum V^* sind. Erst definieren wir den Begriff der Semilinearität.

Definition 7. Sei K ein Schiefkörper, λ ein Automorphismus auf diesem und V ein K-Vektorraum. Die Abbildung γ auf V heißt semilineare Abbildung mit begleitendem Automorphismus λ, falls für alle $v, w \in V$ und für alle $k \in K$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \gamma(v + w) &= \gamma(v) + \gamma(w) \\ \gamma(k \cdot v) &= \lambda(k) \cdot \gamma(v). \end{aligned}$$

Ein Beispiel für semilineare Abbildungen sind die herkömmlichen linearen, welche semilinear mit der Identität sind. Wir notieren erst den Zusammenhang zwischen semilinearen Abbildungen und Kollineationen:

Lemma 6. *Sei γ eine bijektive semilineare Abbildung auf V. Dann kann γ als Kollineation auf dem affinen Raum $\mathbb{A} = \mathbb{A}(V)$ verstanden werden, die in Γ_O liegt.*

Beweis. γ bildet aufgrund der Semilinearität ein- und zweidimensionale Unterräume auf ein- bzw. zweidimensionale Unterräume ab, also auch Punkte und Geraden aus $\mathbb{A}$ auf Punkte und Geraden. O ist der Nullvektor im zugrundeliegenden Vektorraum, es gilt

$$\gamma(0) = \gamma(0 + 0) = \gamma(0) + \gamma(0)$$

und damit $\gamma(0) = 0$. Wegen der Bijektivität kann γ somit als Kollineation aus Γ_O verstanden werden. $\square$

Nun wollen wir an die Beschreibung von Kollineationen mit Fixpunkt O gehen. Vor der Formulierung des wichtigsten Satzes brauchen wir noch ein Lemma, welches zeigt, wie sich die Elemente in Γ_O bei Addition verhalten.

Lemma 7. *Sei $\sigma \in \Gamma_O$ beliebig, die Ordnung des affinen Raums $\mathbb{A}$ mindestens 3. Dann gilt für alle v, w im $\mathbb{A}$ zugrunde liegenden Vektorraum V^**

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w).$$

$\sigma \in \Gamma_O$ ist bezüglich der Addition also linear.

Beweis. Falls v oder w gleich dem Nullvektor ist, ist obige Aussage trivial. Wir betrachten also $v, w \neq 0$ und nehmen vorerst an, dass v und w linear unabhängig sind. Dann lässt sich die Addition schreiben als[6]

$$v + w = v^* w \cap v w^*,$$

wobei zu beachten ist, dass $v^* = Ov \cap H$, $w^* = Ow \cap H$. Da die Ordnung von $\mathbb{A}$ größer als 2 ist, lässt sich σ in eindeutiger Weise zu einer Kollineation des projektiven Raumes $\mathbb{P}$ fortsetzen, dann gilt also auch

$$\sigma(v + w) = \sigma(v^*)\sigma(w) \cap \sigma(v)\sigma(w^*).$$

Ebenso gilt

$$\sigma(v) + \sigma(w) = \sigma(v)^*\sigma(w) \cap \sigma(v)\sigma(w)^*,$$

da wir die obige Formel auch auf $\sigma(v), \sigma(w)$ anwenden können. Es gilt $\sigma \in \Gamma_O$, also hat die Kollineation den Fixpunkt O und lässt H fest. Damit ergibt sich

$$\sigma(v)^* = O\sigma(v) \cap H = \sigma(Ov \cap H) = \sigma(v^*)$$

und analog

$$\sigma(w)^* = O\sigma(w) \cap H = \sigma(Ow \cap H) = \sigma(w^*).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sigma(v + w) &= \sigma(v^*)\sigma(w) \cap \sigma(v)\sigma(w^*)\\ &= \sigma(v)^*\sigma(w) \cap \sigma(v)\sigma(w)^*\\ &= \sigma(v) + \sigma(w),\end{aligned}$$

was die Aussage für den Fall der linearen Unabhängigkeit von v, w zeigt.

Wir wollen an dieser Stelle festhalten, dass wegen der daraus folgenden linearen Unabhängigkeit von $v - w$ und w auch bereits folgt, dass

$$\sigma(-w) = -\sigma(w) \quad \forall w \in V^*.$$

Das gilt wegen den Identitäten

$$\sigma(v) = \sigma(v - w + w) = \sigma(v - w) + \sigma(w) \text{ und } \sigma(v - w) = \sigma(v) + \sigma(-w).$$

Wir betrachten nun den Fall, dass v und w linear abhängig sind. Gilt sogar $v + w = 0$ gilt

$$\sigma(v + w) = \sigma(0) = 0 = \sigma(v) - \sigma(v) = \sigma(v) + \sigma(-v) = \sigma(v) + \sigma(w).$$

[6] Das folgt aus der Definition der Addition in $\mathbb{A}$, siehe Beutelspacher und Rosenbaum [1], S.106

Ist dies nicht der Fall, gibt es wegen der Dimension von $\mathbb{A}$ jedenfalls ein $u \in V^*$, welches linear unabhängig von v ist. Dann ist u auch linear unabhängig zu w und zu $v+w+u$, $w+u$ ist linear unabhängig zu v. Indem wir mehrmals das Resultat des ersten Falls verwenden erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sigma(v+w) &= \sigma(v+w+u-u) \\
&= \sigma(v+w+u) - \sigma(u) \\
&= \sigma(v) + \sigma(w+u) - \sigma(u) \\
&= \sigma(v) + \sigma(w) + \sigma(u) - \sigma(u) \\
&= \sigma(v) + \sigma(w).
\end{aligned}$$

□

Nun wollen wir die Frage, wie die Elemente von Γ_O genau aussehen klären:

Satz 6. *Jede Kollineation $\sigma \in \Gamma_O$ auf einem affinen Raum $\mathbb{A}$ mit Ordnung von mindestens 3 ist eine semilineare Abbildung auf dem Vektorraum V^*.*

Beweis. Die Additivität wurde bereits in obigem Lemma gezeigt. Was also zu zeigen bleibt ist, dass es einen Automorphismus λ auf dem Schiefkörper K gibt, sodass für alle $\sigma \in \Gamma_O$ gilt, dass

$$\sigma(k \cdot X) = \lambda(k) \cdot \sigma(X) \quad \forall k \in K, X \in V^*.$$

Die Aussage ist für $k = 0$ trivial. Wir betrachten also $k \neq 0$ und einen Punkt $X \neq O$ aus $\mathbb{A}$. X, O, kX sind kollinear, da σ eine Kollineation mit Fixpunkt O ist, sind es auch $O, \sigma(X), \sigma(kX)$. $\sigma(kX)$ ist also ein Vielfaches von $\sigma(X)$. Wir bezeichnen das entsprechende Element aus K mit $\lambda_X(k)$, also $\sigma(kX) = \lambda_X(k)\sigma(X)$. Damit wir daraus einen Automorphismus gewinnen können, behaupten wir, dass λ unabhängig von X ist. Zu zeigen ist also, dass für alle $X, Y \neq O$ gilt, dass $\lambda_X(k) = \lambda_Y(k)$.

Angenommen, O, X, Y seien nicht kollinear. Dann sind auch $O, \sigma(X), \sigma(Y)$ nicht kollinear. Wegen der Definition der jeweiligen λ gilt dann

$$\begin{aligned}
\sigma(k(X+Y)) &= \lambda_{X+Y}\sigma(X+Y) \\
&= \lambda_{X+Y}\sigma(X) + \lambda_{X+Y}\sigma(Y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma(k(X+Y)) = \sigma(kX+kY) &= \sigma(kX) + \sigma(kY) \\
&= \lambda_X(k)\sigma(X) + \lambda_Y(k)\sigma(Y)
\end{aligned}$$

Betrachten wir $O, \sigma(X), \sigma(x)$ als Vektoren in V^*, bedeutet die Nichtkollineratitär lineare Unabhängigkeit. Wir können dann einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten das gewünschte

$$\lambda_X(k) = \lambda_{X+Y}(k) = \lambda_Y(k).$$

Für O, X, Y kollinear wählen wir einen Punkt Z, der zu diesen nicht kollinear ist und erhalten dank der soeben geleisteten Arbeit $\lambda_X(k) = \lambda_Z(k) = \lambda_Y(k)$. Definieren wir nun $\lambda_O(k) := 0$, ergibt das eine Abbildung auf K, definiert durch

$$\lambda(k) := \lambda_X(k) \quad \text{für einen Punkt } X \neq O \text{ auf } \mathbb{A}$$

für welche gilt, dass für alle Punkte X von $\mathbb{A}$

$$\sigma(kX) = \lambda(k)\sigma(X) \quad \forall k \in K$$

Damit haben wir den Kandidaten für den begleitenden Automorphismus. Was zu zeigen bleibt, ist, dass dieser tatsächlich homomorph und bijektiv ist. Wir wollen zuerst zeigen, dass λ homomorph ist. Sei $h, k \in K$ und X ein Punkt in $\mathbb{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda(h+k)\sigma(X) &= \sigma(hX + kX)\\ &= \sigma(hX) + \sigma(kX)\\ &= (\lambda(h) + \lambda(k))\sigma(X)\end{aligned}$$

und damit wegen dem beliebig gewählten X, dass $\lambda(h + k) = \lambda(h) + \lambda(k)$.

Analog folgt mit

$$\begin{aligned}\lambda(hk)\sigma(X) &= \sigma(hkX)\\ &= \lambda(h)\sigma(kX)\\ &= (\lambda(h)\lambda(k))\sigma(X),\end{aligned}$$

dass $\lambda(hk) = \lambda(h)\lambda(k)$, womit die Homomorphie gezeigt wäre. Für die Injektivität nehmen wir $\lambda(h) = \lambda(k)$ an. Es gilt

$$\sigma(hX) = \lambda(h)\sigma(X) = \lambda(k)\sigma(X) = \sigma(kX),$$

wegen der Bijektivität von σ folgt daraus $hX = kX$, was $h = k$ bedeutet, da X Element eines Vektorraums ist.

Für die Surjektivität suchen wir für ein beliebiges $k \in K$ nach einem $h \in K$ mit $\lambda(h) = k$. Für einen beliebigen Punkt $X \neq O$ ist $k\sigma(X)$ ein Punkt auf der Geraden durch $O, \sigma(X), k\sigma(X)$. Daher muss das Urbild Y von $k\sigma(X)$ unter σ ein Punkt auf der Geraden durch O und X sein. Es gibt also ein $h \in K$, sodass $Y = hX$. Dann gilt $\sigma(hX) = \sigma(Y) = k\sigma(X)$, daraus ergibt sich

$$k\sigma(X) = \sigma(hX) = \lambda(h)\sigma(X)$$

und somit gibt es ein $h \in K$, sodass $\lambda(h) = k$ für beliebige $k \in K$.

λ ist also ein Automorphismus auf K mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Auf den speziellen Körpern $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$ gibt es nur die Identität als Automorphismus. Auf diesen ist daher jede Kollineation aus Γ_O eine lineare Abbildung auf V^*. Alle anderen solchen Kollineationen sind hingegen semilinear. Damit haben wir die Hauptarbeit getan, die vonnöten ist, um die Struktur von Kollineationen näher beschreiben zu können. Wir können daher als Endergebnis dieses Kapitels den zweiten Struktursatz für affine Räume formulieren:

Satz 7. *(Zweiter Struktursatz für affine Räume) Sei $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus H$ ein desarguescher affiner Raum mit Dimension von mindestens 2 und Ordnung größer als 2, der durch zu dem Vektorraum V^* über dem Schiefkörper K isomorph ist. Dann gilt*

1. *Wenn τ eine Translation und σ eine bijektive semilineare Abbildung auf V^* ist, dann ist $\tau\sigma$ eine Kollineation auf $\mathbb{A}$.*
2. *Jede Kollineation α auf $\mathbb{A}$ lässt sich darstellen als $\alpha = \tau\sigma$, wobei τ eine Translation und σ eine bijektive semilineare Abbildung auf V^* ist.*

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus den vorangegangenen Sätzen und Lemmata. □

3.2 Der zweite Struktursatz für projektive Räume

Wir kommen nun zum projektiven Fall. Zuerst formulieren wir ein Äquivalent zu Lemma 6.

Lemma 8. *Sei V Vektorraum über dem Schiefkörper K und γ eine bijektive semilineare Abbildung von V. Dann induziert γ eine Kollineation auf $\mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Sei λ der begleitende Automorphismus von γ. Wir definieren

$$\alpha(\langle v \rangle) := \langle \gamma(v) \rangle.$$

α ist wohldefiniert, da für $k \neq 0$ $\alpha(\langle kv \rangle) = \langle \gamma(kv) \rangle = \langle \gamma(v) \rangle$. Die Bijektitivät von α folgt direkt aus der Bijektivität von γ. Zu zeigen bleibt, dass α Geraden auf Geraden abbildet.

$$\begin{aligned} \alpha(\langle v, w \rangle) &= \alpha(\{\langle hv + kw \rangle \mid h, k \in K\}) \\ &= \{\langle \gamma(hv + kw) \rangle \mid h, k \in K\} \\ &= \{\langle \lambda(h)\gamma(v) + \lambda(k)\gamma(w) \rangle \mid h, k \in K\} \\ &= \langle \gamma(v), \gamma(w) \rangle. \end{aligned}$$

□

Satz 8. *(Zweiter Struktursatz für projektive Räume) Sei $\mathbb{P}$ ein desarguescher projektiver Raum mit Dimension echt größer eins und Ordnung echt größer 2. Ferner sei V der K-Vektorraum mit $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$. Dann gibt es zu jeder Kollineation α auf $\mathbb{P}$ eine bijektive semilineare Abbildung γ auf V, die α induziert.*

Beweis. Wir wählen H, O, V^*, V wie im Beweis zu Satz 4 und setzen $d = .\dim(\mathbb{P})$. O wird durch den Unterraum $\langle(1, O)\rangle$ dargestellt. Mit einer Basis $\mathcal{B}^* := \{v_1, \ldots, v_d\}$ von V^* ist durch

$$\mathcal{B}_V = \{u_i := (0, v_i) \mid i = 1, \ldots, d\} \cup \{u_0 := (1, O)\}$$

eine Basis von V und durch

$$\mathcal{B} = \{u\langle(0, v_i)\rangle \mid i = 1, \ldots, d\} \cup \{\langle(1, O)\rangle\}$$

eine Basis von $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ gegeben. Dann ist $\mathcal{B} \setminus \{O\}$ eine Menge von d unabhängigen Punkten von H, mithin eine Basis von H. α ist eine Kollineation, also ist auch $\alpha(\mathcal{B})$ eine Basis von $\mathbb{P}$. Seien $w_0, w_1, \ldots, w_d \in V$ mit

$$\langle w_i \rangle := \alpha(\langle u_i \rangle) \quad i = 1, \ldots, d$$
$$\langle w_0 \rangle := \alpha(\langle u_0 \rangle).$$

Somit ist durch die w_i eine Basis von V gegeben. Wir definieren die lineare Abbildung γ auf V so, dass γ' einen Basiswechsel auf V durchführt, sodass die Koordinaten erhalten bleiben. Ein Vektor $x = k_0 u_0 + k_1 u_1 + \cdots + k_d u_d$ wird also auf $\gamma'(x) = k_0 w_0 + k_1 w_1 + \cdots + k_d w_d$ abgebildet. γ ist bijektiv, mit obigem Lemma induziert γ somit eine Kollineation β auf $\mathbb{P}$. Wir definieren die Kollineation $\sigma := \beta^{-1}\alpha$ auf $\mathbb{P}$. Diese lässt sämtliche Punkte von $\mathcal{B}$ fest, insbesondere den Punkt O und eine Basis von H, also auch H als Ganzes. Daher können wir σ als Kollineation auf $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus H$ betrachten. Die Einschränkung von σ auf $\mathbb{A}$ ist nach dem zweiten Struktursatz für affine Räume eine semilineare Abbildung auf V^* mit einem begleitendem Automorphismus λ. Die Abbildung ρ auf V, definiert durch $\rho(k, v) := (\lambda(k), \sigma(v))$ ist dann ebenfalls eine semilineare Abbildung auf V mit begleitendem Automorphismus λ, die auf $\mathbb{P} \setminus H$ mit σ übereinstimmt. Die Fortsetzung von Kollineationen auf $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{P}$ ist eindeutig, daher ist ρ die durch σ auf $\mathbb{P}$ induzierte Kollineation.

Wir definieren daher $\gamma := \gamma'\rho$ und haben die gewünschte semilineare Abbildung. □

4 Projektive Kollineationen

Der zweite Struktursatz zeigt, dass Kollineationen auf projektiven Räumen als semilineare Abbildungen auf den zugrundeliegenden Vektorräumen betrachtet werden können. Die Frage, der wir in diesem Kapitel kurz nachgehen werden ist, welche Kollineationen von echt linearen Abbildungen induziert werden, bzw. wie man diese Menge an Kollineationen gut beschreiben kann. Wir wollen diese durch lineare Abbildungen induzierte Kollineationen als projektive Kollineationen bezeichnen.

Definition 8. Eine von einer linearen Abbildung auf V induzierte Kollineation auf $\mathbb{P}(V)$ heißt projektive Kollineation.

Natürlich ist die Menge der projektiven Kollineationen auf $\mathbb{P}(V)$ eine Gruppe. Doch was sind projektive Kollineationen? Zuerst wollen wir also einige Beispiele von projektiven Kollineationen betrachten.

Lemma 9. *Jede Dilatation ist eine projektive Kollineation.*

Beweis. Sei $\mathbb{P}$ wie üblich koordinatisiert und die Hyperebene $\mathbb{H}$ gegeben. Sei $\beta \in D_O$ beliebig. Die Gerade $g = OZ$ ist eine Fixgerade der Zentralkollineation β mit Achse $\mathbb{H}$ und Zentrum O. Da wir $O = \langle(1,0)\rangle$ und $Z = \langle(0,u_1)\rangle$ schreiben können, wird der Punkt $P = \langle(k,u_1)\rangle$ durch β auf $Q = \langle(h,u_1)\rangle$ abgebildet, wobei $h, k \neq 0$. Können wir eine projektive Kollineation α finden, welche ebenso P auf Q abbildet, sind wir wegen dem Satz von Baer fertig, da dann $\beta = \alpha$ gilt und β somit projektiv ist. Dazu erweitern wir $\langle(0,u_1)\rangle$ zu einer Basis $\{\langle(0,u_1)\rangle, \langle(0,u_2)\rangle, \ldots, \langle(0,u_d)\rangle\}$ von $\mathbb{H}$. Wir definieren die lineare Abbildung γ durch $\gamma(1,O) := (k^{-1}h, O)$ bzw. $\gamma(0,u_i) := (0,u_i)$ für $i \in \{1,\ldots,d\}$. Durch diese wird eine Kollineation α definiert. γ lässt jedes Basiselement von $\mathbb{H}$ fest, damit auch jeden Punkt auf $\mathbb{H}$, somit hat α die Achse $\mathbb{H}$. Ebenso bleibt O fest, somit ist α wie gewünscht aus D_O. Wegen

$$\gamma(P) = \gamma(\langle(k,u_1)\rangle) = \gamma(\langle k(1,O) + (0,u_1)\rangle) =$$
$$\langle k\gamma(1,O) + \gamma(0,u_1)\rangle = \langle k(k^{-1}h,O) + (0,u_1)\rangle = \langle(h,u_1)\rangle = Q$$

bildet α ebenso wie β P auf Q ab, was die Projektivität von β zur Folge hat. □

Lemma 10. *Jede Translation ist eine projektive Kollineation.*

Beweis. Die beliebig gewählte Translation τ mit Achse $\mathbb{H}$ bilde den Punkt O auf $P \neq O$ ab. Wie oben definieren wir eine lineare Abbildung γ mit $\gamma(0,u_i) := (0,u_i)$ und $\gamma(1,O) := (1,P)$. Die durch γ induzierte projektive Kollineation hat die Achse $\mathbb{H}$ und keinen Fixpunkt außerhalb von $\mathbb{H}$. Somit induziert γ eine Translation, die gemäß Definition ebenfalls O auf P abbildet. Wegen der scharfen Transitivität der Gruppe der Translationen ist τ somit von γ induziert und eine projektive Kollineation. □

Jede Zentralkollineation kann, wie wir in den vorhergehenden Kapiteln gesehen haben, als Produkt von Translation und Dilatation geschrieben werden. Da diese beiden projektiv sind, folgt aus der Gruppeneigenschaft von projektiven Kollineationen sofort folgender Satz:

Satz 9. *Jede Zentralkollineation auf $\mathbb{P}(V)$ ist eine projektive Kollineation.*

Um weitere Aussagen über die Struktur projektiver Aussagen tätigen zu können, benötigen wir den Begriff des Rahmens.

Definition 9. Sei $\mathcal{R}$ eine Menge von $d+2$ Punkten in $\mathbb{P}$, sodass für jeden Punkt P $\mathcal{R} \setminus P$ eine Basis von $\mathbb{P}$ ist. Dann wird $\mathcal{R}$ Rahmen von $\mathbb{P}$ genannt.

Ein Beispiel für einen Rahmen wäre eine Menge von vier Punkten in der projektiven Ebene, von welchen keine drei kollinear sind. Der nächste Satz zeigt, dass es in projektiven Räumen keine nichttrivialen projektiven Kollineationen gibt, die „viele“Punkte im obigen Sinn festlässt. Dies steht nur scheinbar im Kontrast zu der Aussage über Zentralkollineationen.

Satz 10. *Eine projektive Kollineation auf einem paposschen*[7] *projektiven Raum, für die jeder Punkt eines Rahmens ein Fixpunkt ist, ist gleich der Identität.*

Beweis. Sei $\mathcal{R} = \{\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \dots, \langle v_{d+1}\rangle\}$ ein Rahmen, dessen Punkte Fixpunkte von α sind. Zu zeigen ist, dass α die Identität ist. Dabei schreiben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_{d+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_d$ (ansonsten ersetze die v_i durch entsprechende skalierte Werte). α ist eine projektive Kollineation, damit gibt es eine lineare Abbildung γ auf V, die α induziert. Jeder Punkt von $\mathcal{R}$ ist ein Fixpunkt von α, der jeweilige eindimensionale Unterraum von V ist also unter γ invariant: $\gamma(v_i) = k_i v_i$ mit $k_i \in K$ und $\gamma(v_0 + v_1 + \cdots + v_d) = k(v_0 + v_1 + \cdots + v_d)$ mit $k \in K$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} kv_0 + kv_1 + \dots kv_d &= k(v_0 + v_1 + \dots v_d) \\ = \gamma(v_0 + v_1 + \dots v_d) &= \gamma(v_0) + \gamma(v_1) + \dots \gamma(v_d) \\ &= k_0 v_0 + k_1 v_1 + \dots k_d v_d \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $k_0 = k_1 = \cdots = k_d = k$. Sei nun $v \in V$ beliebig. Wir schreiben $v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d$ und wenden γ auf v an. Das ergibt mit der Kommutativität des zugrundeliegenden Körpers und der Linearität von γ:

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \gamma(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d) \\ &= \lambda_0 \gamma(v_0) + \lambda_1 \gamma(v_1) + \cdots + \lambda_d \gamma(v_d) \\ &= \lambda_0 k v_0 + \lambda_1 k v_1 + \cdots + \lambda_d k v_d \\ &= k\lambda_0 v_0 + k\lambda_1 v_1 + \cdots + k\lambda_d v_d \\ &= k(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d) = kv \end{aligned}$$

Damit sind werden sämtliche Vektoren von γ lediglich auf ein Vielfaches abgebildet. γ verändert damit die eindimensionalen Unterräume von V und damit die durch γ induzierte lineare Abbildung α die Punkte von $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ nicht. Damit ist α die Identität. $\square$

Eine direkte Folge dieses Satzes ist der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, den wir nun formulieren und beweisen können. Er besagt nichts anderes, als dass die Gruppe der projektiven Kollineationen scharf auf transitiv auf den Rahmen eines papposschen Raumes operiert.

Satz 11. *Seien $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_d, P_{d+1}\}$ und $\mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_d, P'_{d+1}\}$ zwei verschiedene Rahmen im papposschen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$. Dann gibt es genau eine projektive Kollineation α auf $\mathbb{P}(V)$ mit $\alpha(P_i) = P'_i$ für alle $i \in \{0, \dots, d+1\}$.*

[7] zur Erinnerung: das bedeutet, dass der der Koordinatisierung zugrunde liegende Schiefkörper kommutativ, also ein Körper ist, was wir auch im Beweis brauchen werden. Dadurch zieht sich diese Voraussetzung auch durch die folgenden Sätze.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit: Seien α, β zwei projektive Kollineationen, die P_i auf P_i' abbilden. $\alpha^{-1}\beta$ ist eine projektive Kollineation, wobei jeder Punkt des Rahmens $\mathcal{R}$ ein Fixpunkt dieser Kollineation ist. Gemäß dem vorhergehenden Satz muss das dann die Identität sein, und somit $\alpha = \beta$.

Die Existenz wird ähnlich wie oben gezeigt. Wir schreiben die P_i und P_i' als $\langle v_i \rangle$ bzw. $\langle v_i' \rangle$. Definieren wir die lineare Abbildung γ durch $\gamma(v_i) = v_i'$, so induziert diese offensichtlich eine projektive Kollineation, welche wie gewünscht P_i auf P_i' abbildet. □

Somit ist gezeigt, dass eine projektive Kollineation bereits durch die Angabe eines Rahmens und dessen Bildes, also durch vergleichsweise wenig Punkte, eindeutig bestimmt ist. Nun stellt sich die Frage, wie projektive Kollineationen genau aussehen. Wir werden sehen, dass sie genau die Punkte von Zentralkollineationen sind. Diese Aussage wollen wir durch die folgenden Lemmata vorbereiten.

Lemma 11. *Für zwei Basen $\{P_0, P_1, \ldots, P_d\}$ und $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_d\}$ des projektiven Raums $\mathbb{P}$ gibt es ein Produkt β von maximal $d+1$ Zentralkollineationen, sodass $\beta(P_i) = Q_i$ für $i = 0, 1, \ldots, d$.*

Beweis. Das Lemma wird für beliebiges d durch Induktion nach $s \in \{0, 1, \ldots, d\}$ gezeigt, also: Für alle $s \in \{0, 1, \ldots, d\}$ gibt es ein Produkt β_s von maximal $s+1$ Zentralkollineationen, sodass

$$\beta_s(P_i) = Q_i \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, s\}.$$

Für $s = 0$ können wir eine beliebige Zentralkollineation β_0 wählen, sodass $\beta_0(P_0) = Q_0$. Die Existenz einer solchen Zentralkollineation sichert uns beispielsweise der Satz von Baer.

Sei nun die Aussage für $s - 1 \geq 0$ richtig und sei $\beta_{s-1}(P_s) = P_s'$. Gesucht ist eine Zentralkollineation α_s, welche $Q_0, \ldots, Q_{s-1}$ fix lässt und P_s' auf Q_s abbildet. Die Dimension von $\langle Q_0, \ldots, Q_{s-1} \rangle$ ist wegen $s-1 \leq d-1$ kleinergleich $d-1$. Zudem sind $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_s\}$ wie auch $\{\beta(P_0), \beta(P_1), \ldots, \beta(P_d)\} = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-1}, P_s'\}$ unabhängig. Damit sind Q_s, P_s' keine Punkte von $\langle Q_0, Q - 1, \ldots, Q_{s-1} \rangle$. Wir wollen natürlich wieder den Satz 1 (Satz von Baer) anwenden. Damit die durch ihn konstruierte Zentralkollineation α_s $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-1}$ festlässt, wählen wir als Achse eine Hyperebene durch die von diesen Punkten aufgespannten Unterraum, die weder Q_s noch P_s' enthält. Wir müssen also noch zeigen, dass eine solche Hyperebene wirklich existiert.

Für $Q_s = P_s'$ ist $\langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-1}, Q_{s+1}, \ldots, Q_d \rangle$ bereits die richtige Hyperebene. Wir betrachten also den Fall $Q_s \neq P_s'$. $P \neq Q_s, P_s'$ bezeichne einen beliebigen Punkt auf der Geraden $Q_s P_s'$, der nicht auf der Hyperebene $\mathbb{H} = \langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-1}, Q_{s+1}, \ldots, Q_d \rangle$ liegt. Wähle eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_d\}$ mit $P \in \langle \mathcal{B} \rangle$, sodass $\mathcal{B}$ minimal ist, also keine echte Teilmenge von $\mathcal{B}$ die gleiche Eigenschaft aufweist. Q_s ist in $\mathcal{B}$, da im anderen Fall $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}$ gälte, was ein Widerspruch dazu wäre, dass P nicht in $\mathbb{H}$ ist. Wir können daher[8] Q_s in der Basis $\{Q_i\}_{i=1}^n$ durch P ersetzen. Da $P \neq Q_s$ muss es jedoch noch ein weiteres Element Q_k in $\mathcal{B}$ geben. Mit $\langle \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_d\} \setminus \{Q_k, Q_s\} \cup P \rangle$ erhalten wir eine

[8] aufgrund des Austauschlemmas für Basen von projektiven Räumen

Hyperebene, die P, aber nicht Q_s, und damit auch nicht P'_s enthält. Somit erfüllt sie die gewünschten Eigenschaften. Wir können den Satz von Baer anwenden und erhalten die eindeutige Existenz der Zentralkollineation α_s. $\square$

Wir formulieren nun ein ähnliches Lemma für Rahmen von $\mathbb{P}$.

Lemma 12. *Für zwei Rahmen $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, P\}$ und $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, Q\}$ des projektiven Raums $\mathbb{P}$ gibt es ein Produkt γ von maximal d Zentralkollineationen, sodass $\gamma(P_i) = P_i$ für $i = 0, 1, \ldots, d$ und $\gamma(P) = (Q)$.*

Beweis. Wir beweisen folgende allgemeinere Behauptung. Für $P_j \in \{P_0, \ldots, P_d\}$ beliebig gibt es ein Produkt γ von höchstens d Zentralkollineationen mit $\gamma(P_i) = P_i$ für $i = 0, \ldots, d$ und $\gamma(P) = Q$, wobei P_j in der Achse jeder dieser Zentralkollineationen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ordnen wir die P_i, sodass $P_j = P_0$ und beweisen die Aussage durch Induktion nach d.

Für $d = 2$ wählen wir als Zentralkollineation $\gamma = \alpha_1\alpha_2$, wobei α_2 die Zentralkollineation mit Zentrum P_2 und Achse P_0P_1 ist, die P auf $P' = PP_2 \cap P_1Q$ abbildet, und α_1 die Zentralkollineation mit Zentrum P_1 und Achse P_0P_2 ist, die P' auf A abbildet. P_0 ist in beiden Achsen enthalten, und P_0, P_1, P_2 sind Fixpunkte von α_1 und α_2 und somit auch von γ.

Sei $d > 2$ und die Aussage gelte für $d - 1$. Wir betrachten die Hyperebene $\mathbb{H} = \langle P_1, \ldots, P_{d-1}, P\rangle$. Sei $P'' = P_0P_d \cap \mathbb{H}$ und $P' = QP_d \cap \mathbb{H}$. Wir wollen zeigen, dass $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P\}$ und $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P'\}$ Rahmen von $\mathbb{H}$ sind, um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können.

Um zu zeigen, dass $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P\}$ ein Rahmen ist, müssen wir zeigen, dass je d Punkte unabhängig sind. Die Punkte $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P\}$ sind jedenfalls unabhängig, da sie eine Teilmenge eines Rahmens von $\mathbb{P}$ sind. Angenommen, P'' wäre nun abhängig von einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{B}$ von $d - 1$ Punkten von obiger Menge, dann wäre $P'' \in \langle\mathcal{B}\rangle$, damit $P_0 \in \langle\mathcal{B}, P_d\rangle$ wegen $P_0 \in P''P_d$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, P\}$ ein Rahmen ist und somit jede Teilmenge mit weniger als $d + 1$ Elementen unabhängig sein muss.

Auch $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P'\}$ soll ein Rahmen von $\mathbb{H}$ sein. $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'\}$ sind gemäß dem oben gezeigten unabhängig. Auch P' kann nicht abhängig von $\{P_1, \ldots, P_{d-1}\}$ sein, da sonst wegen $Q \in P'P_d$ gilt, dass $Q \in \langle P_1 \ldots, P_d\rangle$, was wiederum ein Widerspruch zur Rahmeneigenschaft von $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, Q\}$ wäre. Nehmen wir hingegen an, dass P' abhängig von $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P''\} \setminus P_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ ist, dann folgt beispiels weise für $i = 1$, dass $Q \in \langle P_2, \ldots, P_d, P_0\rangle$ wegen $Q \in P'P_d \subset \langle P_2, \ldots, P_d, P''\rangle$ und der Tatsache, dass sich $P'' \in P_0P_d$ durch P_0 ersetzen lässt. Damit haben wir wieder einen Widerspruch zur Rahmeneigenschaft von $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, Q\}$. Analoges folgt für $i \in \{2, \ldots, d-1\}$.

Somit haben wir gezeigt, dass $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P\}$ und $\{P_1, \ldots, P_{d-1}, P'', P'\}$ Rahmen von $\mathbb{H}$ sind und können auf diese die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es gibt somit ein Produkt γ'_{d-1} von $d - 1$ Zentralkollineationen $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{d-1}$ von $\mathbb{H}$, sodass $\gamma(P_i) = P_i$ für $i = 0, \ldots, d-1$ und $\gamma(P) = P'$, wobei P'' in der Achse von α'_i für $i = 0, \ldots, d-1$ enthalten ist. Satz 2 sagt, dass jede dieser Zentralkollineationen α'_i von einer Zentralkollineation α_i auf $\mathbb{P}$ induziert wird, deren Achse durch P_0 geht und die Achse von α'_i enthält. Die Gerade $P''P_0$ und somit $P_d \in P''P_0$ liegt dann auf der Achse von α_i für alle $i \in \{1, \ldots, d-1\}$. Damit ist P_d Fixpunkt dieser α_i und es gilt auch $\gamma_{d-1}(P_d) = P_d$, wobei γ_{d-1} das Produkt der α_i bezeichnen soll.

Nun müssen wir noch eine Zentralkollineation α_d konstruieren, welche P' auf Q abbildet, P_i für alle $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ festlässt. Dazu definieren wir α_d mithilfe des Satzes 1 (Satz von Baer) als die Zentralkollineation mit Achse $\langle P_0, P_1, \ldots, P_{d-1}\rangle$ und Zentrum P_d die P' auf Q abbildet (P_d, P', Q sind kollinear). Damit wir den Satz von Baer anwenden können, müssen wir jedoch noch zeigen, dass Q und P' nicht in der Hyperebene $\langle P_0, P_1, \ldots, P_{d-1}\rangle$ enthalten ist. Q kann nicht enthalten sein, da $\{P_0, \ldots, P_d, Q\}$ ein Rahmen und somit $\{P_0, \ldots, P_{d-1}, Q\}$ unabhängig sein muss. Angenommen $P' = QP_d \cap \mathbb{H}$ sei in der Hyperebene enthalten, dann müsste

$$P' \in \langle P_0, \ldots, P_{d-1}\rangle \cap \mathbb{H} = \langle P_0, \ldots, P_{d-1}\rangle \cap \langle P_1, \ldots, P_{d-1}, P\rangle = \langle P_1, \ldots, P_{d-1}\rangle$$

gelten und damit $Q \in P'P_d \subset \langle P_1, \ldots, P_{d-1}, P_d\rangle$, was wiederum einen Widerspruch zur Tatsache, dass $\{P_0, \ldots, P_d, Q\}$ einen Rahmen darstellt, ist. Somit können wir den Satz von Baer tatsächlich anwenden und erhalten die gewünschte Zentralkollineation α_d. Die Kollineation $\gamma_d = \alpha_d \circ \alpha_{d-1} \cdots \circ \alpha_1$ hat somit die gewünschten Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \gamma_d(P_i) &= P_i \quad \text{für } i = 0, \ldots, d \\ \gamma_d(P) &= \alpha_d \circ \gamma_{d-1}(P) = \alpha_d(Q') = Q \end{aligned}$$

P_0 ist in der Achse der α_i enthalten. Damit haben wir die allgemeinere Behauptung gezeigt. Das Lemma folgt direkt daraus. □

Wir zeigen ein weiteres Lemma.

Lemma 13. *Für zwei Rahmen* $\{P_0, P_1, \ldots, P_d, P_{d+1}\}$ *und* $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_d, Q_{d+1}\}$ *des projektiven Raums* $\mathbb{P}$ *gibt es ein Produkt* δ *von maximal* $2d+1$ *Zentralkollineationen auf* $\mathbb{P}$*, sodass* $\delta(P_i) = Q_i$ *für* $i = 0, 1, \ldots, d+1$.

Beweis. Mit dem vorletzten Lemma lassen sich $P_0, P_1, \ldots, P_d$ durch ein Produkt β von höchstens $d+1$ Zentralkollineationen auf $Q_0, Q_1, \ldots, Q_d$ abbilden. Das obige Lemma liefert zudem ein Produkt γ von höchstens d Zentralkollineationen, welches $\beta(P_{d+1})$ auf Q_{d+1} abbildet. $\delta = \gamma\beta$ liefert dann das gewünschte. □

Nun sind wir in der Lage, den genauen Charakter von projektiven Kollineationen zu klären.

Satz 12. *Die projektiven Kollineationen eines papposschen projektiven Raums* $\mathbb{P}(V)$ *sind genau die Produkte von Zentralkollineationen.*

Beweis. Zu Beginn des Kapitels haben wir gezeigt, dass jede Zentralkollineation projektiv ist. Das Produkt projektiver Kollineationen ist wieder projektiv, damit ergibt sich die eine Richtung sofort.

Sei nun α eine beliebige projektive Kollineation auf $\mathbb{P}(V)$. Dann bildet α einen Rahmen $\{P_0, P_1, \ldots P_d, P_{d+1}\}$ auf einen Rahmen $\{P'_0, P'_1, \ldots P'_d, P'_{d+1}\}$. Das letzte Lemma hat gezeigt, dass es ein Produkt δ von Zentralkollineationen gibt mit $\delta(P_i) = P'_i$ für $i \in \{0, \ldots, d+1\}$. Somit gilt $\delta(P_i) = \alpha(P_i)$ und somit wegen dem Satz 11 (Fundamentalsatz der projektiven Geometrie) $\alpha = \delta$. Damit ist auch α ein Produkt von Zentralkollineation. $\square$

Jede Kollineation, die also im Sinne der Struktursätze durch lineare Abbildungen auf dem zugehörigen Vektorraum induziert wird, ist das Prokukt von Zentralkollineationen. Damit ist die Struktur von Kollineationen und Zentralkollineationen und ihr Zusammenhang mit semi- bzw. linearen Abbildungen auf Vektorräumen geklärt.

5 Schlussworte

Mit den Struktursätzen wurden wesentliche Sätze der projektiven Geometrie in dieser Arbeit behandelt. Die Struktur koordinisierbarer projektiver Räume wurde besprochen, der Satz von Desargues ist die kennzeichnende Eigenschaft eines solchen Raumes. Weiters wurde der Charakter von Kollineationen geklärt, diese können als semilineare Funktionen auf dem zugehörigen Vektorraum verstanden werden. Zudem wurde auf den Zusammenhang zwischen linearen Funktionen auf Vektorräumen und Kollineationen auf projektiven Räumen eingegangen. Mit den hier dargestellten Ergebnissen wurde der Zusammenhang zwischen linearer Algebra und projektiver Geometrie geklärt - die projektive Geometrie kann sozusagen als Spezialfall linearalgebraischer Verallgemeinerungen gesehen werden, auch wenn das natürlich eine Verkürzung der reichhaltigen Ergebnisse projektiver Geometrie wäre.

Literatur

[1] Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie*. Vieweg, 2004.

[2] Christoph Scriba und Peter Schreiber. *5000 Jahre Geometrie*. Springer, 2005.