Seminararbeit
Einführung in Variationsungleichungen

Basierend auf [Kinderlehrer(1980)]

Stefan Rosenberger

Betreuer: Prof. DI. Dr. techn. Karl Kunisch

27. Januar 2012

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Universität Graz

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Aufgabe aus der optimalen Steuerung

Betrachte folgende Problemstellung (nach [Tröltzsch(2009)])

$$\begin{cases} \min J(y,u) \\ Ay = Bu \end{cases} \quad \text{für } u \in \mathcal{K}$$

wobei

- J eine Abbildung $J : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ist,
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ konvex sind.

Ein erster Ansatz

Die Vorraussetzungen des Problems lassen folgende Formulierung zu.

$$\begin{cases} \min J(y,u) \\ Ay = Bu \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} \min J(y,u) \\ y - A^{-1}Bu = 0 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} \min J(x) \\ e(x) = 0 \end{cases} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}^N$$

Mit dieser Formulierung lässt sich die Lagrangefunktion aufstellen.

$$\mathfrak{L}(x,\lambda) = J(x) + \lambda^T e(x)$$

Falls nun x^* ein Minimum ist, so folgt mit der *notwendigen Optimalitätsbedingung 1.Ordnung*, dass

$$\begin{cases} D_x\mathfrak{L}(x^*,\lambda) = DJ(x^*) + \lambda^T De(x^*) = 0 \\ D_\lambda\mathfrak{L}(x^*,\lambda) = e(x^*) = 0 \end{cases}$$

gilt. Nun bleibt nur noch (x^*,λ) zu bestimmen und die ursprüngliche Problemstellung ist gelöst. Dies klingt sehr angenehm, jedoch muss vorrausgesetzt werden, dass $\{\nabla e_i(x^*)\}_{i=1}^n$ linear unabhängig sind und, was noch wichtiger ist, die Bedingung $u \in \mathcal{K}$ ist nicht zwingend erfüllt.

Ein anderer Zugang

Setzt man $S := A^{-1}B$ und damit $J(y,u) = J(Su,u) =: f(u)$, so erhält man eine Funktion $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.
Sei nun $u_0 \in \mathcal{K}$ sodass $f(u_0) \leq f(u)$ für alle $u \in \mathcal{K}$ gilt (also eine Lösung der Minimierungsaufgabe).
Mit der Wahl $u(t) := u_0 - t(u - u_0) = tu + (1-t)u_0 \in \mathcal{K}$ für $0 \leq t \leq 1$ folgt, da u_0 ein Minimum ist, dass

$$0 \leq f(u(t)) - f(u_0) = f(u_0 - t(u-u_0)) - f(u_0) \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1}{t}[f(u_0 - t(u-u_0)) - f(u_0)]$$

gilt. Mit dem Grenzübergang $t \longrightarrow 0$ liefert dass

$$f'(u_0)(u - u_0) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{K} \tag{1}$$

Also ist u_0 Lösung der Gleichung 1 falls es auch eine Lösung der betrachteten Problemstellung ist. Die Gleichung 1 ist ein Beispiel für eine Variationsungleichung.

2 Variationsungleichungen im $\mathbb{R}^N$

Um die Handhabung von Variationsungleichungen zu erarbeiten möchte ich mit den Eigenschaften in endlich dimensionalen Räumen beginnen. In dieser einführenden Arbeit betrachten ich nur Probleme auf konvexen Mengen, dafür benötige ich das folgende technische Kapitel.

2.1 Projektion auf konvexe Mengen

Lemma 2.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H. Dann gilt: Für alle $x \in H$ gibt es genau ein $y \in \mathcal{K}$ sodass*

$$\|x - y\| = \inf_{\eta \in \mathcal{K}} \|x - \eta\| . \tag{2}$$

Definition 2.2. *Ein Punkt y der 2 erfüllt heißt die **Projektion von** x **auf** $\mathcal{K}$. Notation:*

$$y = Pr_{\mathcal{K}}(x)$$

Beweis. (Von 2.1) Sei $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine minimierende Folge sodass

$$\lim_{k\to\infty} \|\eta_k - x\| = d := \inf_{\eta\in\mathcal{K}} \|\eta - x\|$$

Existenz: Da H ein Hilbertraum ist gilt die Parallelogram Regel:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|\eta_k - \eta_h\|^2 = & \ \|(\eta_k - x) - (\eta_h - x)\|^2 = 2\|\eta_k - x\|^2 + 2\|\eta_h - x\|^2 - \|(\eta_k - x) + (\eta_h - x)\|^2 \\ = & \ 2\|\eta_k - x\|^2 + 2\|\eta_h - x\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right\|^2 \end{aligned} .$$

Die Menge $\mathcal{K}$ ist nach Voraussetzung konvex, daher ist $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in \mathcal{K}$. Somit gilt (nach Definition von d), dass

$$d^2 \leq \left\| x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \right\|^2 .$$

Somit folgt

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 \leq 2\|\eta_k - x\|^2 + 2\|\eta_h - x\|^2 - 4d^2.$$

Nach Definition der Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{h,k\to\infty} \|\eta_k - \eta_h\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} 2\|\eta_k - x\|^2 + \lim_{h\to\infty} 2\|\eta_h - x\|^2 - 4d^2 = 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

H ist (als Hilbertraum) vollständig und $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, daher gibt es ein $y \in \mathcal{K}$ sodass

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = y.$$

Somit folgt

$$\|x - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x - \eta_k\| = d.$$

Eindeutigkeit: Seien $y, y' \in \mathcal{K}$ sodass

$$\|x - y\| = \inf_{\eta\in\mathcal{K}} \|x - \eta\| \quad \text{und} \quad \|x - y'\| = \inf_{\eta\in\mathcal{K}} \|x - \eta\|$$

gilt. Mit den eben verwendeten Argumenten folgt

$$\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(y + y')\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Damit gilt $y = y'$.

$\square$

Satz 2.3. *Sei $\mathcal{K}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H. Dann gilt für $x \in H$, dass*

$$y = Pr_{\mathcal{K}}(x) \Longleftrightarrow y \in \mathcal{K} \text{ und } (\forall \eta \in \mathcal{K}): \ (y, \eta - y) \geq (x, \eta - y).$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $x \in H$ und $y = Pr_{\mathcal{K}}(x)$. Nach Lemma 2.1 folgt $y \in \mathcal{K}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{K}$ konvex und daher gilt für jedes $\eta \in \mathcal{K}$ und $0 \leq t \leq 1$ dass

$$(1-t)y + t\eta = y + t(\eta - y) \in \mathcal{K}.$$

Sei

$$\Phi(t) := \|x - y - t(\eta - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t(x - y, \eta - y) + t^2 \|\eta - y\|^2.$$

Nach Definition von $Pr_{\mathcal{K}}(x)$ hat $\Phi(t)$ sein Minimum bei $t = 0$. Weiters ist $\Phi(t)$ differenzierbar (als Polynom in t), daher ist

$$\Phi'(t)|_{t=0} = -2(x - y, \eta - y) + 2t \|\eta - y\|^2 |_{t=0} = -2(x - y, \eta - y) \geq 0.$$

Damit gilt

$$(y - x, \eta - y) \geq 0$$

womit

$$(y, \eta - y) \geq (x, \eta - y) \ (\forall \eta \in \mathcal{K})$$

folgt.

"$\Leftarrow$" Gelte nun

$$y \in \mathcal{K} \text{ und } (\forall \eta \in \mathcal{K}): \ (y, \eta - y) \geq (x, \eta - y).$$

Somit gilt

$$0 \leq (y-x, \eta-y) = (y-x, (\eta-x)+(x-y)) = -(x-y, x-y)+(y-x, \eta-x) = -\|x - y\|^2+(y-x, \eta-x).$$

Mit der Ungleichung von Cauchy Schwarz folgt nun

$$\|x - y\|^2 \leq (y - x, \eta - x) \leq \|y - x\| \|\eta - x\|.$$

Da $y \in \mathcal{K}$ ist gilt

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \|x - \gamma\| \leq \|x - y\| \leq \|\eta - x\| \ \ (\forall \eta \in \mathcal{K}).$$

Und da $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist folgt schließlich dass

$$Pr_{\mathcal{K}}(x) = \inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \|x - \gamma\| = \|x - y\|$$

$\square$

Bemerkung 2.4 Nach 2.1 ist die Projektion $y = Pr_{\mathcal{K}}(x)$ eindeutig.

2.2 Ein erstes Theorem über Variationsungleichungen

Sei $(\mathbb{R}^N)' = \{f | f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\}$ der Dualraum von $\mathbb{R}^N$.
Für ein $a \in (\mathbb{R}^N)'$ verwenden wir die Notation

$$a : \begin{cases} \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle a, x \rangle \end{cases}$$

Ist nun $(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$, dann gibt es nach *Riesz-Frechet* für jedes $a \in (\mathbb{R}^N)'$ genau ein Element $\pi a \in \mathbb{R}^N$ sodass

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N): \ \langle a, x \rangle = (\pi a, x)$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $\pi : (\mathbb{R}^N)' \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Identifikation $a \mapsto \pi a$.

Satz 2.5. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex, und sei $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R})'$ stetig. Dann gibt es ein $x \in \mathcal{K}$ so dass*

$$(\forall y \in \mathcal{K}) : \ \langle F(x), y - x \rangle \geq 0$$

Beweis. Die Projektionsabbildung

$$Pr_{\mathcal{K}}(id - \pi F) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

ist stetig, da $\mathcal{K}$ konvex ist. Nach Vorraussetzung ist $\mathcal{K}$ kompakt, somit besitzt diese Abbildung, mit dem Fixpunktsatz von Brouwer 5.4, einen Fixpunkt $x \in \mathcal{K}$. Ein detailierter Aufbau dieser Aussagen findet sich im Appendix 5.5.
Mit Satz 2.3 und $x = Pr_{\mathcal{K}}((id - \pi F)(x))$ lässt sich für alle $y \in \mathcal{K}$

$$(x, y - x) \geq ((id - \pi F)x, y - x) = (x, y - x) - (\pi F(x), y - x)$$

schreiben. Und damit folgt schließlich

$$(\forall y \in \mathcal{K}) : \ \langle F(x), y - x \rangle = (\pi F(x), y - x) \geq 0.$$

□

Korollar 2.6. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex, $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R})'$ stetig und $x \in \mathcal{K}$ sodass $(\forall y \in \mathcal{K})$: $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0$ gilt.*
Falls nun $x \in \mathcal{K}^\circ$ (im Inneren von $\mathcal{K}$) liegt, dann gilt sogar $F(x) = 0$.

Beweis. Sei $R > 0$ sodass $U := \{y \in \mathcal{K} | \, \|x - y\| < R\} \subset \mathcal{K}$. Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^N$ beliebig und wähle $\varepsilon > \frac{\|\xi\|}{R}$ dann ist $y := x - \frac{1}{\varepsilon}\xi \in U$ denn

$$\|x - y\| = \frac{1}{\varepsilon} \|\xi\| < R.$$

Also folgt mit 2.5, dass $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)(\exists \varepsilon > 0)(y \in \mathcal{K})$

$$\langle F(x), \xi \rangle = \varepsilon \langle F(x), x - y \rangle \geq 0$$

gilt. Mit der Wahl $\xi = -F(x)$ folgt

$$0 \leq \langle F(x), \xi \rangle = -(\pi F(x), \pi F(x)) = - \|\pi F(x)\| .$$

Womit man $\pi F(x) = F(x) = 0$ erhält. □

Definition 2.7. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $x \in \partial\mathcal{K}$. Eine Hyperebene*

$$\langle a, y - x \rangle = 0 \ \textit{mit} \ a \in (\mathbb{R}^N)' \setminus \{0\}$$

*heißt **trennende Hyperebene von** $\mathcal{K}$ falls für alle $y \in \mathcal{K}$*

$$\langle a, y - x \rangle \geq 0$$

gilt.

Korollar 2.8. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex, $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R})'$ stetig und $x \in \mathcal{K}$ sodass $(\forall y \in \mathcal{K})$: $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0$ gilt.*
Falls nun $x \in \partial\mathcal{K}$ gilt, dann induziert $F(x)$ eine trennende Hyperebene von $\mathcal{K}$ falls $F(x) \neq 0$ gilt.

Beweis. Die Voraussetzungen des Korollars entsprechen der Definition, falls $F(x) \neq 0$ gilt. □

2.3 Kriterien für Lösungen im $\mathbb{R}^N$

Problem 1 Im folgenden betrachten wir diese Problemstellung:
Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und konvex sowie $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ stetig. Gesucht ist ein $x \in \mathcal{K}$ sodass

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \text{für } y \in \mathcal{K}$$

gilt.

Bemerkung 2.9

1. Falls $\mathcal{K}$ in Problem 1 beschränkt ist, so ist $\mathcal{K}$ auch kompakt, was der Situation in Satz 2.5 entsprechen würde.
2. Die Problemstellung 1 muss keine Lösung besitzten. Wähle zum Beispiel $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ und $F(x) = e^x$. Dann gibt es kein $x \in \mathcal{K}$ sodass
$$F(x)(y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}$$
gilt.
3. Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $\overline{B_R}(0) \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene Kugel mit Radius R und Zentrum $0 \in \mathbb{R}^N$. Dann wird im folgenden die Notation:
$$\mathcal{K}_R = \mathcal{K} \cap \overline{B_R}(0) \tag{3}$$
verwendet.
4. Im Problem 1 gilt dann mit 2.5, dass es mindestens ein $x_R \in \mathcal{K}_R$ gibt sodass
$$\langle F(x_R), y - x_R\rangle \geq 0 \quad \text{für } y \in \mathcal{K}_R$$
gilt.

Satz 2.10. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und konvex sowie $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ stetig. Eine **notwendige und hinreichende** Bedingung für die Existenz einer Lösung des Problems 1 ist:*
Es gibt ein $R > 0$ sodass eine Lösung $x_R \in \mathcal{K}_R$ von

$$\langle F(x_R), y - x_R\rangle \geq 0 \quad \textit{für alle } y \in \mathcal{K}_R$$

die Bedingung

$$\|x_R\| < R$$

erfüllt.

Beweis. **Notwendigkeit:** Wenn $x \in \mathcal{K}$ das Problem 1 löst, dann lässt sich natürlich ein $R > 0$ finden sodass $\|x_R\| < R$ und $x_R \in \mathcal{K}_R$ gilt.

Hinreichend: Sei nun $x_R \in \mathcal{K}_R$. Ist nun $\|x_R\| < R$ so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle $y \in \mathcal{K}$ gilt $w = x_R + \varepsilon(y - x_R) \in \mathcal{K}_R$. Da $\mathcal{K}_R$ kompakt ist, gilt (nach 3) und mit Satz 2.5, dass

$$0 \leq \langle F(x_R), w - x_R\rangle = \varepsilon\langle F(x_R), y - x_R\rangle \ \forall y \in \mathcal{K}.$$

Womit x_R das Problem 1 löst.

□

Korollar 2.11. *Sei $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ sodass*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = +\infty$$

für ein $x_0 \in \mathcal{K}_R$ gilt. Dann gibt es eine Lösung für das Problem 1.

Beweis. Mit den Voraussetzungen des Korollars gibt es ein $H > \|F(x_0)\|$ und $R > \|x_0\|$ sodass

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle \geq H\,\|x - x_0\|$$

für $\|x\| \geq R$ und $x \in \mathcal{K}$ gilt. Damit folgt nun falls $\|x\| = R$ ist dass

$$\begin{aligned}\langle F(x), x - x_0\rangle \quad &= \langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle + \langle F(x_0), x - x0\rangle \\ &\geq H\,\|x - x_0\| + \langle F(x_0), x - x0\rangle \\ &\geq H\,\|x - x_0\| - |\langle F(x_0), x - x0\rangle| \\ &\geq H\,\|x - x_0\| - \|F(x_0)\|\ \ \|x - x_0\| \\ &\geq (H - \|F(x_0)\|)(\|x\| - \|x_0\|) > 0\end{aligned} \tag{4}$$

Sei nun $x_R \in \mathcal{K}_R$ eine Lösung von 1. Dann gilt

$$\langle F(x_R), x_R - x_0\rangle = -\langle F(x_R), x_0 - x_R\rangle \leq 0$$

Wegen der gezeigten Ungleichungen in 4 muss gelten: $\|x_R\| \neq R$. Wegen $x_R \in \mathcal{K}_R = \mathcal{K} \cap \overline{B}_R(0)$ muss $\|x_R\| < R$ gelten. Dass ist mit 2.10 eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung des Problems 1. $\square$

Nun stellt sich die Frage ob es solche Abbildungen F überhaupt gibt?

Beispiel 2.12

1. Wähle $F(x) = x$ so folgt

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(x - x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(x - x_0)^2}{|x - x_0|} = +\infty$$

2. Wähle $F(x) = x^3$ so folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} &= \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(x^3 - x_0^3)(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(x^2 + x_0^2 + x_0 x)(x - x_0)^2}{|x - x_0|} = +\infty\end{aligned}$$

3. Ein Gegenbeispiel: Sei $N = 1$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ und $F(x) = e^x$, dann gilt:

   - Zum Einen gilt für $x \to +\infty$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x - e^{x_0})(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &\geq \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = +\infty.\end{aligned}$$

   - Zum Anderen gilt für $x \to -\infty$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^x - e^{x_0})(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{x\to-\infty} (e^x - e^{x_0})\mathrm{sign}(x - x_0) = e^{x_0}.\end{aligned}$$

4. Die Funktion F muss weder linerar noch stetig sein, denn wähle $N = 1$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ und

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ 2(x-1) & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

   Die Funktion ist nicht linear, denn sonst würde für $x > 0$ gelten $0 = F(0) = F(x - x) = F(x) + F(-x) = x - 2x - 1 = -x - 1$.
   Für diese Funktion gilt, falls $x_0 \geq 0$, dass

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{(x - x_0)^2}{|x - x_0|} = +\infty$$

und falls $x_0 < 0$, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} &= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{(x - 2x_0 + 2), x - x_0)}{|x - x_0|} \\
&= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{(x - x_0, x - x_0)}{|x - x_0|} + \lim_{|x|\to+\infty} \frac{(2 - x_0, x - x_0)}{|x - x_0|} \\
&\geq \lim_{|x|\to+\infty} \frac{|x - x_0|^2}{|x - x_0|} = +\infty
\end{aligned}$$

Definition 2.13. *Die Bedingung*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = +\infty$$

heißt ***koerzivitäts Bedingung****.*

Korollar 2.14. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und konvex sowie $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ stetig. Falls für alle $x, x' \in \mathcal{K} :\ x \neq x'$ die Ungleichung $\langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle > 0$ gilt, so ist die Lösung von Problem 1 eindeutig.*

Beweis. Seien $x, x' \in \mathcal{K}$ Lösungen von Problem 1. Angenommen es gilt $x \neq x'$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad &\iff \ 0 \geq \langle F(x), x - y\rangle \\
\langle F(x'), y - x'\rangle \geq 0 \quad &\iff \ 0 \geq \langle F(x'), x' - y\rangle.
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $y = x'$ in der ersten und $y = x$ in der zweiten Gleichung folgt:

$$\begin{aligned}
&0 \geq \langle F(x), x - x'\rangle \\
&0 \geq \langle F(x'), x' - x\rangle = -\langle F(x'), x - x'\rangle.
\end{aligned}$$

Womit schließlich wegen $x \neq x'$

$$0 \geq \langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle > 0$$

folgt. Somit ist der Widerspruch gefunden, und $x = x'$ folgt. □

Mit dieser Eindeutigkeitsbedingung macht folgende Definition Sinn:

Definition 2.15. *Eine Abbildung $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ heißt* ***monoton*** *falls*

$$(\forall x, x' \in \mathcal{K}) :\ \langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle \geq 0$$

gilt.
Wir nennen F ***streng monoton*** *falls zusätzlich*

$$(\forall x, x' \in \mathcal{K}) :\ [\langle F(x) - F(x'), x - x'\rangle = 0 \implies x = x']$$

gilt.

Proposition 2.16. *Sei $F : \mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ stetig und streng monoton, $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und konvex, und $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ abgeschlossen und konvex. Angenommen es gibt Lösungen des Problems*

$$\begin{aligned}
x_1 \in \mathcal{K} :\ \langle F(x_1), y - x_1\rangle \geq 0 \ (\forall y \in \mathcal{K}) \\
x_2 \in \mathcal{H} :\ \langle F(x_2), y - x_2\rangle \geq 0 \ (\forall y \in \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Dann gilt:

1. *Falls $F(x_2) = 0$ ist so folgt $x_1 = x_2$.*
2. *Falls $F(x_2) \neq 0$ und $x_1 \neq x_2$ gilt, dann wird x_1 durch die Hyperebende $\langle F(x_2), y - x_2\rangle = 0$ von $\mathcal{H}$ separiert.*

Beweis. 1. Sei $F(x_2) = 0$. Und angenommen es gilt $x_1 \neq x_2$. Da F streng monoton ist gilt:

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0 \implies \langle F(x_1), x_1 - x_2 \rangle > 0 \Longrightarrow -\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle > 0.$$

Womit

$$\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$$

folgt, das jedoch ist ein Widerspruch zur Wahl von x_1.

2. Sei nun $F(x_2) \neq 0$ und $x_1 \neq x_2$. Nach Voraussetzung gilt

$$\langle F(x_2), y - x_2 \rangle \geq 0 \ (\forall y \in \mathcal{H}).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \langle F(x_2), x_1 - x_2 \rangle &= \langle F(x_2) - F(x_1) + F(x_1), x_1 - x_2 \rangle \\ &= \langle F(x_2) - F(x_1), x_1 - x_2 \rangle + \langle F(x_1), x_1 - x_2 \rangle \\ &= -\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle - \langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Da F streng monoton ist, gilt $\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0$.
Nach Wahl von x_1 ist $\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$. Daher folgt

$$\langle F(x_2), x_1 - x_2 \rangle < 0.$$

Was zu zeigen war.

□

2.4 Problemstellungen die zu Variationsungleichungen führen

Im folgenden gelten:

1. $f \in C^1(\mathcal{K})$ wobei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene und konvexe Menge ist.
2. Wir schreiben $F(x) = \nabla f(x)$.
3. Es wird nicht zwischen $\mathbb{R}^N$ und $(\mathbb{R}^N)'$ unterschieden.

Proposition 2.17. *Angenommen es existiert ein $x \in \mathcal{K}$ sodass*

$$f(x) = \min_{y \in \mathcal{K}} f(y).$$

Dann ist x eine Lösung der Variationsungleichung

$$x \in \mathcal{K} : \ (F(x), y - x) \geq 0 \ (\forall y \in \mathcal{K}).$$

Beweis. Sei $y \in \mathcal{K}$ beliebig, so gilt für $0 \leq t \leq 1$, dass $x + t(y - x) \in K$ ist.
Wegen $f(x) = \min_{y \in \mathcal{K}} f(y)$ hat die Funktion

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x)) \ \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

ihr Minimum in $t = 0$. Folglich gilt

$$0 \leq \varphi'(0) = (\nabla f(x), y - x) = (F(x), y - x).$$

□

Proposition 2.18. *Sei f konvex und $x \in \mathcal{K}$ erfüllt*

$$(F(x), y - x) \geq 0 \ (\forall y \in \mathcal{K}).$$

Dann gilt

$$f(x) = \min_{y \in \mathcal{K}} f(y).$$

Beweis. Da f konvex ist, gilt für alle $y \in \mathcal{K}$ dass

$$f(y) \geq f(x) + (F(x), y - x).$$

Da $(F(x), y - x) \geq 0$ gilt folgt $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in \mathcal{K}$. □

Problem 2 *Komplementaritäts Problem*
$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N | x_i \geq 0 \ (\forall 1 \leq i \leq N)\} \subset \mathbb{R}^N$ ist abgeschlossen und konvex. Sei $F : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Finde ein $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ sodass

$$F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N \text{ und } (F(x_0), x_0) = 0$$

gilt.

Satz 2.19. *Sei $F : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ und $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$, dann gilt:*
x_0 löst das Problem 2 genau dann wenn

$$(F(x_0), y - x_0) \geq 0 \ (\forall y \in \mathbb{R}_+^N)$$

gilt.

Beweis. **"⇒"** Sei x_0 Lösung des Problems 2. Dann ist $F(x_0) \geq 0$ und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}_+^N$, dass $(F(x_0), y) \geq 0$ ist. Damit gilt

$$(F(x_0), y - x_0) = (F(x_0), y) - (F(x_0), x_0) = (F(x_0), y) \geq 0$$

"⇐" Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ Lösung der Variationsungleichung, und

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$$

der i-te Einheitsvektor. Dann ist $x_0 + e_i \in \mathbb{R}_+^N$. Es gilt

$$0 \leq (F(x_0), x_0 + e_i - x_0) = (F(x_0), e_i) = F_i(x_0)$$

für alle $1 \leq i \leq N$ und damit $F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N$. Wähle nun $y = 0 \in \mathbb{R}_+^N$, dann gilt

$$0 \leq (F(x_0), y - x_0) = -(F(x_0), x_0)$$

und daher

$$0 \geq (F(x_0), x_0)$$

Da jedoch $x_0, F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N$ gilt folgt

$$0 \leq (F(x_0), x_0).$$

Womit man schließlich $0 = (F(x_0), x_0)$ erhält.

□

3 Variationsungleichungen in Hilberträumen

3.1 Bilinear Formen

In diesem Kpitel verwenden wir folgende Voraussetzungen:

- Sei H ein reeller Hilbertraum und H' sein Dualraum. Wir setzen
  - $(\cdot,\cdot)$ als das Innere Produkt und,
  - $\|\cdot\|$ als die davon induzierte Norm

  auf H.
- Wir verwenden die Notation:
$$\begin{aligned} H' \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f, x &\longmapsto \langle f, x\rangle \end{aligned}$$
  als die Paarbildung zwischen H und H'.
- Eine lineare und stetige Abbildung $A : H \to H'$ induziert eine Bilinearform durch
$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \ (\forall u, v \in H)$$
  denn für $u, u', v, v' \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
  - $a(\alpha u + u', v) = \langle A(\alpha u + u'), v\rangle = \langle \alpha Au + Au', v\rangle = \alpha\langle Au, v\rangle + \langle Au', v\rangle = \alpha a(u,v) + a(u', v)$
  - $a(u, \alpha v + v') = \langle Au, \alpha v + v'\rangle = \alpha\langle Au, v\rangle + \langle Au, v'\rangle = \alpha a(u,v) + a(u,v')$.

  Da a linear ist gibt es ein $c > 0$ sodass $|a(u,v)| \leq c\|u\| \cdot \|v\|$ gilt (Operatornorm für lineare Operatoren). Somit ist a auch stetig.
- Ist nun eine Bilinearform $a(u,v)$ gegeben, so wird durch die lineare Abbildung
$$v \longrightarrow a(u,v)$$
  eine stetige lineare Transformation $A : H \to H'$ bestimmt die
$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \ (\forall u, v \in H) \tag{5}$$
  erfüllt.

Lemma 3.1. *Sei $a(u,v)$ eine Bilinearform auf H. Ist a koerziv so ist die lineare Abbildung A, die durch 5 bestimmt ist, koerziv im Sinn von 2.13 ist.*

Beweis. Sei a koerziv und die lineare Abbildung A durch 5 bestimmt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{|\langle Ax - Ax_0, x - x_0\rangle|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{|\langle A(x-x_0), x - x_0\rangle|}{\|x - x_0\|} = \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{|a(x-x_0, x-x_0)|}{\|x - x_0\|} \\ &\geq \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\alpha\|x-x_0\|^2}{\|x-x_0\|} = \infty. \end{aligned}$$

Womit A koerziv im Sinn von 2.13 ist. □

3.2 Existenz von Lösungen

Problem 3 Sei $\mathcal{K} \subset H$ abgeschlossen und konvex, und sei $f \in H'$. Finde

$$(u \in \mathcal{K}) : \ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

Nun stellt sich die Frage wann das Problem 3 eine Lösung besitzt?
Um die Existenz einer Lösung zu zeigen wird, im Folgenden die Bilinearform a in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgeteilt. Hat man dann eine Lösung für den symmetrischen Teil, so kann man iterativ eine Lösung für die Problemstellung mit der Bilinearform a erzeugen.

Aus dieser Motivation heraus betrachte folgende Konstruktion.
Seien für die Bilinearform a

$$\begin{aligned} a_0(u,v) &= \tfrac{1}{2}(a(u,v)+a(v,u)) \\ b(u,v) &= \tfrac{1}{2}(a(u,v)-a(v,u)). \end{aligned}$$

Setze $a_t(u,v) =: a_0(u,v) + tb(u,v)$. Es folgt unmittelbar dass

- $a_1(u,v) = a(u,v)$
- $a_0(u,v) = a_0(v,u)$ (ist der symmetrische Teil von a)
- $b(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v)-a(v,u)) = -\frac{1}{2}(a(v,u)-a(u,v)) = -b(v,u)$
  (ist der anti symmetrische Teil von a)

gilt. Mit diesem a_t lässt sich im folgenden eine iterative Lösung für das Problem 3 finden.
Ist nun a koerziv mit der Konstante α, so gilt mit

- $b(u,u) = \frac{1}{2}(a(u,u)-a(u,u)) = 0$
- $a_0(u,u) = a(u,u)$

dass $a_t(u,u) = a_0(u,u) + tb(u,u) = a(u,u) \geq \alpha \left\|u\right\|^2$ ist. Daher ist a_t koerziv mit der selben Konstante α.

Lemma 3.2. *Sei $a(u,v)$ eine koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H, $\mathcal{K} \subset H$ abgeschossen und konvex, und sei $f \in H'$. Falls das Problem 3 eine Lösung besitzt, dann ist die Abbildung*

$$\begin{cases} H' & \longrightarrow \mathcal{K} \\ f & \longmapsto u \end{cases}$$

Lipschitzstetig.
D.h.: Sind u_1, u_2 Lösungen des Problems 3 zu den entsprechenden Funktionen $f_1, f_2 \in H'$ dann gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H'}.$$

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in H$ und $f_1, f_2 \in H'$ sodass

$$\begin{aligned} a(u_1, v-u_1) &\geq \langle f_1, v-u_1 \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K}) \\ a(u_2, v-u_2) &\geq \langle f_2, v-u_2 \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K}) \end{aligned}$$

gilt. Setze nun $v = u_2$ in der ersten und $v = u_1$ in der zweiten Ungleichung, so folgt

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2-u_1) &\geq \langle f_1, u_2-u_1 \rangle \iff a(u_1, u_1-u_2) \leq \langle f_1, u_1-u_2 \rangle \\ a(u_2, u_1-u_2) &\geq \langle f_2, u_1-u_2 \rangle \iff -a(u_2, u_1-u_2) \leq -\langle f_2, u_1-u_2 \rangle \end{aligned}$$

Nun sind $a(\cdot,\cdot)$ und $\langle \cdot,\cdot \rangle$ linear, daher folgt

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq \langle f_1-f_2, u_1-u_2 \rangle.$$

Da a koerziv ist folgt dass

$$\alpha \|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq \langle f_1-f_2, u_1-u_2 \rangle \leq \|u_1-u_2\| \cdot \|f_1-f_2\|_{H'}$$

womit schließlich

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H'}$$

folgt. □

Lemma 3.3. *Sei a eine koerzive Bilinearform mit der Koerziv-Konstante α, $\mathcal{K} \subset H$ abgeschlossen und konvex, und setze*

$$M = \sup \frac{|b(u,v)|}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Ist das Problem 3 lösbar für $a_\tau(u,v)$ und jedes $f \in H'$, dann ist es lösbar für $a_t(u,v)$ und jedes $f \in H'$ wobei $\tau \leq t \leq \tau + t_0$ mit $t_0 < \frac{\alpha}{M}$ gilt.

Beweis. Beachte da b selbst eine Bilinearform ist gibt es ein $\mathfrak{c} > 0$ sodass $|b(u,v)| \leq \mathfrak{c} \|u\| \cdot \|v\|$ gilt, womit $M < +\infty$ folgt.
Definiere die Abbildung

$$T : \begin{cases} H & \longrightarrow \mathcal{K} \\ Tw & = u \end{cases}.$$

wobei u durch folgende Konstruktion gegeben sei.
Sei das Funktional F_t als

$$\langle F_t, v \rangle = \langle f, v \rangle - (t-\tau) b(w,v) \text{ mit } \tau \leq t \leq \tau + t_0$$

für jedes $f \in H'$ definiert. Sei $u \in \mathcal{K}$ sodass $a_\tau(u,v)$ das Problem 3 für F_t löst, also ist

$$a_\tau(u, v-u) \geq \langle F_t, v-u \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K}).$$

wohldefiniert, womit auch T wohldefiniert ist. Nach Lemma 3.2 ist die Abbildung $u \mapsto F_t$ Lipschitzstetig, daher folgt mit $u_1 = Tw_1$ und $u_2 = Tw_2$, dass

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\| &\leq \tfrac{1}{\alpha} \|F_t(w_1) - F_t(w_2)\|_{H'} = \tfrac{1}{\alpha}(t-\tau) \sup_{v \in H} \tfrac{\|b(w_2,v) - b(w_1,v)\|}{\|v\|} \\ &= \tfrac{t-\tau}{\alpha} \|w_2 - w_1\| \sup_{v \in H} \tfrac{\|b(w_2 - w_1, v)\|}{\|w_2 - w_1\| \cdot \|v\|} \\ &\leq \tfrac{t-\tau}{\alpha} \|w_2 - w_1\| \sup_{v, (w_1 - w_2) \in H} \tfrac{\|b(w_2 - w_1, v)\|}{\|w_2 - w_1\| \cdot \|v\|} \\ &\leq \tfrac{t_0}{\alpha} M \|w_1 - w_2\| \end{aligned}$$

gilt. Ist $t_0 < \frac{\alpha}{M}$ so ist T eine Kontraktion. Da $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist besitzt T nach dem Fixpunktsatz von Banach einen eindeutigen Fixpunkt. Für dieses $u = w$ gilt dann

$$\begin{aligned} \langle F_t, v-u \rangle &= \langle f, v-u \rangle - (t-\tau) b(u, v-u) = \langle f, v-u \rangle - (t-\tau)[b(u,v) - b(u,u)] \\ &= \langle f, v-u \rangle - (t-\tau) b(u,v) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & a_\tau(u, v-u) \geq \ \langle f, v-u \rangle - (t-\tau) b(u,v) \\ \Longleftrightarrow \quad & a_0(u, v-u) + \tau b(u, v-u) + (t-\tau) b(u,v) \geq \ \langle f, v-u \rangle \\ \Longleftrightarrow \quad & a_0(u, v-u) + t b(u,v) \geq \ \langle f, v-u \rangle. \end{aligned}$$

Schließlich folgt für jedes t mit $\tau \leq t \leq \tau + t_0$ dass

$$(u \in \mathcal{K}) : \ a_t(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

gilt. □

Bemerkung 3.4 Man beachte speziell, dass u im vorangegangenen Lemma sogar eindeutig ist.

Satz 3.5. *Sei $a(u,v)$ eine koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum H, $\mathcal{K} \subset H$ abgeschossen und konvex, und sei $f \in H'$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung des Problems 3.*

Beweis. Die Existenz wird in zwei Schritten gezeigt

1. Sei zuerst angenommen, dass $a(u,v)$ symmetrisch ist. Definiere

$$I(u) =: a(u,u) - 2\langle f, u \rangle \ (\forall u \in H)$$

Nun folgt, da a koerziv ist, mit Youngs Ungleichung dass

$$\begin{aligned} I(u) &= a(u,u) - 2\langle f, u\rangle \\ &\geq \alpha \left\|u\right\|^2 - 2\left\|f\right\|_{H'} \cdot \left\|u\right\| = \alpha \left\|u\right\|^2 - 2\left(\frac{\|f\|_{H'}}{\sqrt{\alpha}}\right)(\sqrt{\alpha}\left\|u\right\|) \\ &\geq \alpha \left\|u\right\|^2 - \tfrac{1}{\alpha}\left\|f\right\|_{H'}^2 - \alpha\left\|u\right\|^2 \\ &= -\tfrac{1}{\alpha}\left\|f\right\|_{H'}^2 . \end{aligned}$$

Daher gilt nun

$$d =: \inf_{u \in \mathcal{K}} I(u) \geq -\frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|_{H'}^2 > -\infty.$$

Wähle nun eine minimierende Folge

$$\{u_n \in \mathcal{K} | d \leq I(u_n) \leq d + \tfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear ist gilt

$$8\langle f, \tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\rangle = 4(\langle f, u_n + u_m\rangle) = 4\langle f, u_n\rangle + 4\langle f, u_m\rangle.$$

Da $a(u,v)$ koerziv ist folgt mit der Paralellogram Regel dass

$$\begin{aligned} \alpha\left\|u_n - u_m\right\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= a(u_n,u_n) + a(u_m,u_m) - a(u_n,u_m) - a(u_m,u_n) \\ &= 2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) - a(u_n,u_n) - a(u_m,u_m) - a(u_n,u_m) - a(u_m,u_n) \\ &= 2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) - a(u_n+u_m, u_n+u_m) \\ &= 2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) - 4a(\tfrac{1}{2}(u_n+u_m), \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)) \\ &= 2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) - 4a(\tfrac{1}{2}(u_n+u_m), \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)) \\ &\quad -4\langle f, u_n\rangle - 4\langle f, u_m\rangle + 8\langle f, \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)\rangle \\ &= 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I(\tfrac{1}{2}(u_n+u_m)) \\ &\leq 2(d + (\tfrac{1}{n})) + 2(d + (\tfrac{1}{m})) - 4(\tfrac{d}{2} + \tfrac{d}{2}) \\ &= 2\left[\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}\right]. \end{aligned}$$

Daher ist $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge und da $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist gibt es ein $u \in \mathcal{K}$ sodass

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{und} \quad I(u_n) \longrightarrow I(u)$$

also $I(u) = d$.
Sei nun $v \in \mathcal{K}$ und $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Da $\mathcal{K}$ konvex ist folgt $(1-\varepsilon)u + \varepsilon v = u + \varepsilon(v-u) \in \mathcal{K}$ und (da u minimierend) gilt $I(u) \leq I(u + \varepsilon(v-u))$. Damit folgt (für die recht-seitige Ableitung)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tfrac{d}{d\varepsilon} I(u+\varepsilon(v-u))|_{\varepsilon=0} = \tfrac{d}{d\varepsilon}\left(a(u+\varepsilon(v-u), u+\varepsilon(v-u)) - 2\langle f, u+\varepsilon(v-u)\rangle\right)|_{\varepsilon=0} \\ &= \tfrac{d}{d\varepsilon}\left(a(u,u) + \varepsilon^2 a(v-u,v-u) + 2\varepsilon a(u,v-u) - 2\langle f,u\rangle - 2\varepsilon\langle f, v-u\rangle\right)|_{\varepsilon=0} \\ &= (2\varepsilon a(v-u,v-u) + 2a(u,v-u) - 2\langle f, v-u\rangle)|_{\varepsilon=0} = 2a(u,v-u) - 2\langle f, v-u\rangle. \end{aligned}$$

Womit

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \;(\forall v \in \mathcal{K})$$

gilt und das Problem 3 gelöst ist.

2. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall als Störung des symmetrischen Falls. Betrachte hierfür die bereits verwendete Notation von $a_t(u,v) = a_0(u,v) + tb(u,v)$. Nun gilt für $t = 0$ dass a_t symmetrisch ist, womit das Problem 3 für $a_\tau(u,v) = a_0(u,v)$ lösbar ist. Weiters gilt dass

$$0 < M =: \sup \frac{|b(u,v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} < +\infty$$

womit man ein $0 < t_0 \leq \frac{\alpha}{M}$ wählen kann, sodass das Problem 3 mit Lemma 3.3 für alle $0 \leq t \leq t_0$ gelöst wird. Nun lässt sich Lemma 3.3 auch für $\tau = t_0$ anwenden. Schließlich folgt dass nach endlich häufigen anwenden des Lemmas 3.3 sich das Problem 3 auch für $t = 1$ lösen lässt. Nach Konstruktion in Lemma 3.3 ist die Lösung u sogar eindeutig. Wegen $a_1(u,v) = a(u,v)$ ist somit die Behauptung gezeigt.

□

Bemerkung 3.6 Man beachte speziell dass, falls $\mathcal{K} = H$ im Satz 3.5 gilt, der Satz auf das Lax-Milgram Lemma reduziert wird.

3.3 Formulierung im L^2-Raum

Nun lässt sich folgende Konstruktion durchführen:
Sei $E \subset \mathbb{R}^N$ (Lebesgue) messbar und wähle ein $\varphi \in L^2(E)$. Setze dann

$$\mathcal{K} = \{v \in L^2(E) | v \geq \varphi \text{ fast überall in } E\} \subset L^2(E).$$

Wähle $0 \leq \alpha \leq 1$ und $u, v \in \mathcal{K}$ dann gilt fast überall in E dass

$$\alpha u + (1-\alpha)v \leq \alpha\varphi + (1-\alpha)\varphi = \varphi.$$

daher ist $\alpha u + (1-\alpha)v \in \mathcal{K}$ und somit ist $\mathcal{K}$ konvex.
Setze nun

$$a(u,v) = (u,v) = \int_E u(x)v(x)dx.$$

a ist bilinear und koerziv. Nun gibt es nach Satz 3.5 für ein gegebenes $f \in L^2(E)$ ein eindeutiges $u \in \mathcal{K}$ sodass

$$\int_E u(v-u)dx \geq \int_E f(v-u)dx \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

gilt. **Behauptung:** u ist die puknktweise Projektion von f und φ auf das jeweilige Maximum, also

$$u = max(\varphi, f) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{falls } f(x) \leq \varphi(x) \\ f(x) & \text{falls } \varphi(x) \leq f(x) \end{cases} .$$

Offensichtlich gilt $u \geq \varphi$ fast überall in E, womit $u \in \mathcal{K}$ folgt. Damit folgt nun für jedes $v \in \mathcal{K}$ dass $v - \varphi \geq 0$ ist und somit

$$\int_E u(v-u)dx = \int_{\{f<\varphi\}} \varphi(v-\varphi)dx + \int_{\{\varphi \leq f\}} f(v-f)dx \geq \int_{\{f<\varphi\}} f(v-\varphi)dx + \int_{\{\varphi \leq f\}} f(v-f)dx$$

$$= \int_{\{f<\varphi\}} f(v-u)dx + \int_{\{\varphi \leq f\}} f(v-u)dx = \int_E f(v-u)dx$$

Da $v \in \mathcal{K}$ gilt folgt $v - \varphi \geq 0$ womit

$$\int_E u(v-u)dx \geq \int_E f(v-u)dx \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

folgt. Also ist u Lösung der Variationsungleichung.

4 Das Hindernis Problem

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$.

Motivierende Problemstellung

Schreibt man die Laplacegleichung

$$\begin{cases} -\triangle u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

als eine Differentialgleichung im schwachen Sinn so erhält man

$$-\int_\Omega \triangle u w dx = \int_\Omega \nabla u \nabla w dx = 0 \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da diese Behauptung für alle $w \in C_0^\infty(\Omega)$ gelten muss, gilt sie insbesondere für alle $w = u - v$ mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Das liefert die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(u - v) dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Das Hindernis Problem

Sei ψ eine Funktion auf $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ welche

$$\max_\Omega \psi \geq 0 \text{ und } \psi \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllt. Definiere $\mathcal{K} = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) | v \geq \psi \text{ in } \Omega \text{ und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ eine konvexe Menge von Funktionen. Nun suchen wir jene Funktionen $u \in \mathcal{K}$, die die *Dirichlet Energie* minimieren.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \min_{v \in \mathcal{K}} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

Angenommen ein solches u existiert. Da $\mathcal{K}$ konvex ist gilt für alle $v \in \mathcal{K}$, dass

$$(1 - t)u + tv = u + t(v - u) \in \mathcal{K} \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$

Damit hat die Funktion

$$\Phi(t) = \int_\Omega |\nabla(u + t(v - u))|^2 dx \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

ihr Minimum bei $t = 0$. Somit ist $\Phi'(t)|_{t=0} \geq 0$, was zu der Ungleichung

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v - u) dx \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathcal{K} \tag{6}$$

führt.

Notationen

In diesem Abschnitt betrachten wir folgende Situation:

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$.
- Sei $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ sodass für $\xi \in \mathbb{R}^N$ und fast alle $x \in \Omega$

  $$\frac{1}{\Lambda}\xi^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda\xi^2$$

  gilt.
- Setze die Bilinear Form a als

  $$a(u, v) = \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx \text{ für } u, v \in H^1(\Omega).$$

- Definiere eine lineare Abbildung

$$L : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \to H^{-1}(\Omega) \\ \langle Lu, v\rangle & = a(u,v) \end{cases}$$

für $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

- Sei nun $\psi \in H^1(\Omega)$ sodass $\psi \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt. Setze dann

$$\mathcal{K}_\psi = \mathcal{K} = \{v \in H_0^1(\Omega) | v \geq \psi \text{ auf } \Omega \text{ in } H^1(\Omega)\}$$

Bemerkung 4.1 Falls $a_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega})$ gilt, so ist

$$Lu(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) u_{x_j}(x)\right)$$

eine elliptische Gleichung im klassischen Sinn. Das gilt denn wegen $a_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $c \equiv 0 \in L^\infty(\Omega)$ hat die Gleichung die Gestalt

$$Lu(x) = b_1 u_{x_i x_j}(x) + b_2 u_{x_i}(x) + cu(x)$$

mit $b_1, b_2, c \in L^\infty(\Omega)$.
Problem 4 Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ gegeben, finde ein $u \in \mathcal{K}$ sodass

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

gilt.

Satz 4.2. *Es gibt eine eindeutige Lösung des Problems 4.*

Beweis. Es gilt für jedes $v \in \mathcal{K}$ nach Voraussetzung dass

$$a(v,v) = \int_\Omega a_{ij}(x) v_{x_i} v_{x_j} dx \geq \frac{1}{\Lambda} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Somit ist a koerziv. Nach Satz 3.5 besitzt somit das Problem 4 eine eindeutige Lösung. □

Es stellt sich die Frage nach der Charakterisierung einer solchen Lösung. Mithilfe von Superlösungen wird nun für die Lösung eine obere Schranke konstruiert.

Definition 4.3. *Wir nennen $g \in H^1(\Omega)$ eine* ***Superlösung*** *von $L - f$ falls*

$$\langle Lg - f, \zeta\rangle \equiv a(g,\zeta) - \langle f, \zeta\rangle \geq 0$$

für $0 \leq \zeta \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Satz 4.4. *Sei u eine Lösung des Problems 4 und angenommen g ist eine Superlösung von $L - f$ sodass $g \geq \psi$ in Ω und $g \geq 0$ auf $\partial\Omega$ (in $H^1(\Omega)$) gilt. Dann gilt:*

$$u \leq g \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis. Setze $\zeta = \min(u, g)$, da $g \geq \psi$ in Ω und $g \geq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt ist $\zeta \in \mathcal{K}$. Somit gilt

$$a(u, \zeta - u) \geq \langle f, \zeta - u\rangle.$$

Da g eine Superlösung von $L - f$ ist gilt

$$a(g, \zeta - u) \leq \langle f, \zeta - u\rangle.$$

womit (aus der Definition von ζ)

$$\begin{aligned} 0 \geq a(g-u, \zeta-u) &= \int_\Omega a_{ij}(g-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i} dx \\ &= \int_{\{x|g(x)<u(x)\}} a_{ij}(g-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i} dx + \int_{\{x|g(x)\geq u(x)\}} a_{ij}(g-u)_{x_j} \underbrace{(\zeta-u)_{x_i}}_{=0} dx \\ &= \int_\Omega a_{ij}(\zeta-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i} dx \\ &= a(\zeta-u, \zeta-u) \geq \tfrac{1}{\Lambda} \|\zeta-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0 \end{aligned}$$

folgt. Daher ist $\zeta = u$, und da $\zeta = \min(u, g)$ ist folgt $u \leq g$ in Ω. □

Korollar 4.5. *Sei u eine Lösung des Problems 4 für $f = 0$, und sei angenommen $M \geq 0$ sodass $\psi \leq M$ in Ω gilt. Dann folgt*

$$u \leq M \text{ in } \Omega.$$

Beweis. Behauptung: M ist eine Superlösung von $L - f$. Sei $0 \leq \zeta \in H_0^1(\Omega)$ dann folgt

$$\langle LM - f, \zeta \rangle = a(M, \zeta) - \langle 0, \zeta \rangle = a(M, \zeta) = 0.$$

Dies gilt wegen $M_{x_i} = 0$.
Somit lässt sich für $g = M$ der Satz 4.4 anwenden, womit

$$u \leq M \text{ in } \Omega$$

folgt. □

Betrachtet man nun die Menge

$$\mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) | v \geq \psi \text{ in } \Omega, v - \varphi \in H_0^1(\Omega)\} \tag{7}$$

wobei $\varphi \in H^1(\Omega)$ mit $\varphi \geq \psi$ auf $\partial\Omega$ gilt. $\mathcal{K}$ ist konvex, denn für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $u, v \in \mathcal{K}$ gilt:

1. $\alpha u + (1 - \alpha)v \geq \alpha\psi + (1 - \alpha)\psi = \psi$ und
2. $(\alpha u + (1 - \alpha)v) - \varphi = \alpha u - \alpha\varphi + (1 - \alpha)v - (1 - \alpha)\varphi = \alpha(u - \varphi) + (1 - \alpha)(v - \varphi) \in H_0^1(\Omega)$.

Wählen wir nun als neue konvexe Menge

$$\mathcal{K}_0 = \{\eta \in H_0^1(\Omega) | \eta \geq \psi - \varphi \text{ in } \Omega\}.$$

Sei nun angenommen u eine Lösung des Problems

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K}). \tag{8}$$

Setze

- $u = \zeta + \varphi$ mit $\zeta \in \mathcal{K}_0$ und
- $v = \eta + \varphi$ mit $\eta \in \mathcal{K}_0$.

Dann gilt

$$a(u, v - u) = a(\zeta + \varphi, \eta - \zeta).$$

Womit mit der Wahl von u folgt, dass für $\zeta \in \mathcal{K}_0$ gilt

$$a(\zeta, \eta - \zeta) \geq \langle f, \eta - \zeta \rangle - a(\varphi, \eta - \zeta) \ (\forall \eta \in \mathcal{K}_0). \tag{9}$$

Weiters wird mit $\langle F, \xi \rangle = \langle f, \xi \rangle - a(\varphi, \xi)$, für $\xi \in H_0^1(\Omega)$, ein Element $F \in H^{-1}(\Omega)$ definiert.
Umgekehrt gilt mit dem Satz 4.4 dass die Gleichung 9 eine eindeutige Lösung ζ besitzt. Womit folgt dass $u = \zeta + \varphi$ eine Lösung der Gleichung 8 ist.

Satz 4.6. *Seien u, v zwei $L - f$ Superlösungen. Dann ist $w = \min(u, v)$ eine $L - f$ Superlösung.*

Beweis. Sei $\mathcal{K} = \{\eta \in H^1(\Omega) | \eta - w \in H_0^1(\Omega), \eta \geq w \text{ f.ü. in } \Omega\}$. Analog zu 7 ist $\mathcal{K}$ konvex. Sei $\zeta \in \mathcal{K}$ eine Lösung der Variationsungleichung

$$\int_\Omega a_{ij} \zeta_{x_j} (\eta - \zeta)_{x_i} dx \geq \langle f, \eta - \zeta \rangle \ (\forall \eta \in \mathcal{K}). \tag{10}$$

Nun sind u, v nach Voraussetzung $L - f$ Superlösungen, daher folgt mit 4.4 dass

$$\zeta \leq u \ \text{ und } \ \zeta \leq v \ \text{ in } \Omega$$

gilt. Also gilt

$$\zeta \leq \min(u, v) \ \text{ in } \Omega.$$

Da $\zeta \in \mathcal{K}$ gewählt wurde gilt $\zeta \geq \min(u,v) = w$ in Ω, womit

$$\zeta = \min(u,v) = w \quad \text{in } \Omega$$

folgt. Daher gilt $\eta \geq \zeta$ fast überall in Ω, womit $\eta - \zeta \geq 0$ fast überall in Ω folgt. Damit lässt sich die Gleichung 10 als

$$a(\zeta, \eta - \zeta) - \langle f, \eta - \zeta \rangle \geq 0$$

schreiben. Somit ist $\zeta = w$ eine Superlösung von $L - f$. $\square$

Satz 4.7. *Sei u eine Lösung des Problems 4. Dann gibt es ein nicht negatives Radon Maß μ sodass*

$$Lu = f + \mu \quad \textit{in } \Omega$$

mit

$$supp(\mu) \subset I = \{x \in \Omega | u(x) = \psi(x)\}.$$

Insbesondere gilt

$$Lu = f \quad \textit{in } \Omega \setminus I.$$

Beweis. Betrachte hierfür ein $x_0 \in \Omega \setminus I$. Dann gibt es eine Kugel $K_\rho(x_0)$ und ein $\varphi(x) \in C_0^\infty(K_\rho(x_0))$ mit $\varphi > 0$ auf $K_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)$ sodass

$$u \geq \psi + \varphi \quad \text{in } H^1(K_\rho(x_0))$$

gilt. Also gibt es für jedes $\xi \in C_0^\infty(K_{\frac{\varrho}{2}}(x_0))$ ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$u + \varepsilon\xi \geq \psi + \frac{\varphi}{2} \text{ in } H^1(K_{\frac{\varrho}{2}}(x_0))$$

gilt. Folglich gilt für $v = u + \varepsilon\xi \in \mathcal{K}$(mit der Variationsungleichung), dass

$$a(u,\xi) \geq \langle f, \xi \rangle \ \forall \xi \in C_0^\infty(K_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)).$$

Nun gilt die selbe Argumentation für $-\xi$ womit

$$a(u,\xi) = \langle f, \xi \rangle \ \forall \xi \in C_0^\infty(K_{\frac{\varrho}{2}}(x_0)).$$

folgt. Anders ausgedückt bedeutet das

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \setminus I.$$

$\square$

4.1 Das eindimensionale Hindernis Problem

Wir betrachten im Folgenden die Situation:

- Ein offenes Intervall $\Omega = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.
- Sei $\mathcal{K} = \{v \in H_0^1(\Omega) | v \geq \psi \text{ in } \Omega\}$ mit $\psi \in H^1(\Omega)$ sodass

  $$\max_{\Omega} \psi > 0 \ , \ \psi(\alpha) < 0 \ , \ \psi(\beta) < 0$$

  gilt.
- Sei $I = \{x \in \Omega | u(x) = \psi(x)\}$, die sogenannte Kontaktmenge.
- Definiere eine Bilinearform durch

  $$a(u,v) = \int_\alpha^\beta u'(x)v'(x)dx \quad \text{für } u,v \in H^1(\Omega).$$

  a ist koerziv, denn mit der *Poincare-Friedrichs Ungleichung* gilt

  $$a(v,v) = \int_\alpha^\beta v'(x)^2 dx = \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} = |v|^2_{H^1(\Omega)} \geq \gamma \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Satz 4.8. *Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ sodass es ein stetiges $F \in L^2(\Omega)$ gibt mit $f = F'$. Falls $\psi'(x)$ nur Unstetigkeiten der Form*

$$\psi'(x-0) \leq \psi'(x+0)$$

hat, gilt für die eindeutige Lösung u des Problems (4), dass u' stetig ist.

Beweis. Sei u eine Lösung des Problems 4. Also gilt $u \in \mathcal{K}$ und

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \ (\forall v \in \mathcal{K}).$$

Nach Satz 3.5 ist diese Lösung eindeutig. Wegen

$$a(u,v) = \int_\alpha^\beta u'(x)v'(x)dx = \int_\alpha^\beta u''(x)v(x)dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

gibt es mit Satz 4.7 ein nicht negatives Maß μ, dessen Träger gleich $I = \{x \in \Omega | u(x) = \psi(x)\}$ ist, und

$$u \in H_0^1(\Omega): \ -u'' = f + \mu \tag{11}$$

als Distribution gilt (also im schwachen Sinn). Nach Voraussetzung ist $\psi(\alpha) < 0$ und $\psi(\beta) < 0$, und daher ist nach Satz 5.12 I kompakt in Ω und $\mu(\Omega) = \mu(I) < \infty$. Da μ nicht negativ ist gibt es eine nicht fallende Funktion $\varphi(x)$ sodass

$$\varphi' = \mu$$

als Distributionen gilt. Es folgt unmittelbar dass $\varphi(x) = \mu([\alpha, x))$ gilt.
Somit kann 11 umgeschrieben werden zu

$$-u'' = F' + \varphi'$$

womit

$$u'(x) = -(F(x) + \varphi(x) + const)$$

folgt. Da F nach Voraussetzung stetig ist, bleiben bloß Unstetigkeiten von φ zu betrachten. Da der Träger von μ gleich I und F stetig ist, ist $u'(x)$ stetig auf $\Omega \setminus I = \{x \in \Omega | u(x) > \psi(x)\}$.
Da φ nicht fallend ist können alle möglichen Unstetigkeitsstellen nun die Gestalt

$$\varphi(x-0) \leq \varphi(x+0) \quad x \in \Omega$$

haben. Daher folgt (da F stetig ist) dass

$$u'(x-0) \geq u'(x+0) \quad x \in \Omega. \tag{12}$$

Sei nun $\xi \in I$. Dann ist $u(\xi) = \psi(\xi)$ und da $u \in \mathcal{K}$ ist folgt

$$u(x) - u(\xi) \geq \psi(x) - \psi(\xi).$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

1. Falls $x < \xi$ gilt, dann folgt
$$\frac{u(x)-u(\xi)}{x-\xi} \leq \frac{\psi(x)-\psi(\xi)}{x-\xi}$$
also
$$u'(\xi-0) \leq \psi'(\xi-0).$$
2. Falls $x > \xi$ gilt, dann folgt
$$\frac{u(x)-u(\xi)}{x-\xi} \geq \frac{\psi(x)-\psi(\xi)}{x-\xi}$$
und somit
$$u'(\xi+0) \geq \psi'(\xi+0).$$

Mit der Voraussetzung an ψ folgt nun

$$u'(\xi-0) \leq \psi'(\xi-0) \leq \psi'(\xi+0) \leq u'(\xi+0) \quad \text{für } \xi \in I.$$

Daher gilt mit (12), dass

$$u'(\xi-0) = u'(\xi+0)$$

womit folgt dass $u'(x)$ stetig ist. $\square$

5 Appendix

5.1 Ergänzendes zu: Projektionen auf konvexe Mengen

Definition 5.1. *Sei S ein metrischer Raum mit einer Metrik d. Eine Abbildung $F : S \longrightarrow S$ heißt eine* ***Kontraktion*** *falls es ein α mit $0 \leq \alpha < 1$ gibt sodass*

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in S.$$

Falls $\alpha = 1$ erlaubt ist so nennen wir F eine ***nicht expandierende Kontraktion****.*

Korollar 5.2. *Sei $\mathcal{K}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H. Dann ist der Operator $Pr_{\mathcal{K}}(\cdot)$ eine nicht expandierende Kontraktion.*

Beweis. Nach Definition 5.1 ist

$$\|Pr_{\mathcal{K}}(x) - Pr_{\mathcal{K}}(x')\| \leq \|x - x'\| \ \ (\forall x, x' \in \mathcal{K})$$

zu zeigen.
Seien $x, x' \in H$ sowie $y = Pr_{\mathcal{K}}(x)$ und $y' = Pr_{\mathcal{K}}(x')$. Mit Satz 2.3 gilt dann

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{K} \text{ und } (\forall \eta \in \mathcal{K}) :\ (y, \eta - y) \geq (x, \eta - y) \\ y' \in \mathcal{K} \text{ und } (\forall \eta \in \mathcal{K}) :\ (y', \eta - y') \geq (x', \eta - y') \end{aligned}$$

Mit der Wahl von $\eta = y'$ in der ersten und $\eta = y$ in der zweiten Ungleichung sowie mit Cauchy Schwarz folgt, dass

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') \leq (x - x', y - y') \leq \|x - x'\| \, \|y - y'\|$$

Schließlich erhält man

$$\|Pr_{\mathcal{K}}(x) - Pr_{\mathcal{K}}(x')\| = \|y - y'\| \leq \|x - x'\| \, .$$

□

Satz 5.3 (Fixpunktsatz von Banach)**.**
Sei S ein Banachraum und $F : S \longrightarrow S$ eine Kontraktion sodass $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in S$. Dann gibt es genau einen Fixpunkt von F.

Beweis. Der Beweis für diesen Satz gehört zu den Grundlagen der meisten Analysis Kurse. □

Satz 5.4 (Fixpunktsatz von Brouwer)**.**
Sei F eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ in sich selbst. Dann besitzt F mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Der Beweis für diesen Satz findet sich in vielen Büchern, um auf eines zu verweisen nenne ich hier [Carl(2011)]. □

Satz 5.5. *(Spezialfall des Fixpunktsatzes von Brouwer)*
Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex, und sei $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ stetig. Dann hat F einen Fixpunkt.

Beweis. Sei Ω eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^N$ sodass $\mathcal{K} \subset \Omega$. Nach Korollar 5.2 ist $Pr_{\mathcal{K}}$ stetig, also ist die Abbildung

$$F \circ Pr_{\mathcal{K}} : \Omega \longrightarrow \mathcal{K} \subset \Omega$$

eine stetige Abbildung von Ω in sich selbst. Mit 5.4 (Fixpunktsatz von Brouwer) hat diese Abbildung einen Fixpunkt $F(Pr_{\mathcal{K}}(x)) = x \in \mathcal{K}$. Wegen $x \in \mathcal{K}$ ist $Pr_{\mathcal{K}}(x) = x$ und daher

$$x = F(x).$$

□

5.2 Ergänzendes zu: Problemstellungen die zu Variationsungleichungen führen

Lemma 5.6. *Sei $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow (\mathbb{R}^N)'$ eine Abbildung die durch die Funktionen $F_1, ..., F_n$ bestimmt ist sodass*

$$\langle F(x), y\rangle = (\pi F(x), y) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x) y_j$$

gilt. F ist genau dann stetig wenn jede Funktion $F_1, .., F_N$ stetig ist.

Beweis. Mit der Identifikation von F durch

$$\langle F(x), y\rangle = (\pi F(x), y) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x) y_j$$

lässt sich $F(x) = \pi F(x) = (F_1(x), ..., F_N(x))^T$ identifizieren.
Sei nun F stetig, dann gilt: $(\forall a \in \mathbb{R}^N) : \lim_{x\to a} F(x) = F(a)$. Womit man

$$\begin{pmatrix} F_1(a) \\ F_2(a) \\ \vdots \\ F_N(a) \end{pmatrix} = F(a) = \lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_N(x) \end{pmatrix}$$

Womit $(\forall i \in \{1, ..., N\}) : \lim_{x\to a} F_i(x) = F_i(a)$ folgt.
Gelte nun andererseits dass $(\forall i \in \{1, ..., N\})(\forall a \in \mathbb{R}^N) : \lim_{x\to a} F_i(x) = F_i(a)$. Dann folgt

$$F(a) = \begin{pmatrix} F_1(a) \\ F_2(a) \\ \vdots \\ F_N(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to a} F_1(x) \\ \lim_{x\to a} F_2(x) \\ \vdots \\ \lim_{x\to a} F_N(x) \end{pmatrix} = \lim_{x\to a} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_N(x) \end{pmatrix} = \lim_{x\to a} F(x)$$

□

Proposition 5.7. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ und $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und konvexe Funktion. Dann ist $F(x) = \nabla f(x)$ monoton. Ist f sogar streng konvex, so ist $F(x)$ streng monoton.*

Beweis. Seien $x, x' \in \mathcal{K}$, dann gilt da f konvex ist dass

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x') + (F(x'), x - x') \\ f(x') &\geq f(x) + (F(x), x' - x) \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} f(x) + f(x') &\geq f(x') + f(x) + (F(x'), x - x') + (F(x), x' - x) \\ &\Longleftrightarrow \\ 0 &\geq (F(x) - F(x'), x' - x) \\ &\Longleftrightarrow \\ 0 &\leq (F(x') - F(x), x' - x) \end{aligned}$$

Nach Definition ist daher F monoton. Falls nun f streng konvex ist, so gelten die selben Aussagen mit echten Ungleichungen. □

Beispiel 5.8 In der Proposition 5.7 wir die Konvexität vorausgesetzt, das gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Betrachte hierfür folgendes Beispiel:
Sei φ eine glatte Funktion und betrachte das Vektorfeld

$$G(x) = (x_1, x_2 + \varphi(x_1)) \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Gelte für φ dass

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_1')| \leq |x_1 - x_1'| \quad \text{mit } x_1, x_1' \in \mathbb{R}$$

gilt. In diesem Fall gilt (mit *Youngs Ungleichung*)

$$\begin{aligned}
(G(x)-G(x'),x-x') &= ((x_1-x_1',x_2-x_2'+\varphi(x_1)-\varphi(x_1')),(x_1-x_1',x_2-x_2')) \\
&= |x-x'|^2+(x_2-x_2')(\varphi(x_1)-\varphi(x_1')) \\
&\geq |x-x'|^2-|x_2-x_2'|\,|\varphi(x_1)-\varphi(x_1')| \\
&\geq |x-x'|^2-\tfrac{1}{2}|x_2-x_2'|^2-\tfrac{1}{2}|\varphi(x_1)-\varphi(x_1')|^2 \\
&\geq |x-x'|^2-\tfrac{1}{2}|x_2-x_2'|^2-\tfrac{1}{2}|x_1-x_1'|^2 \\
&\geq \tfrac{1}{2}|x-x'|^2
\end{aligned}$$

5.3 Ergänzendes zu: Variationsungleichungen in Hilberträumen

Definition 5.9. *Der Raum $H^{m,s}(\Omega)$ ist definiert als der Abschluss von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm*

$$\|u\|_{H^{m,s}(\Omega)} =: \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

wobei $1 \leq s < \infty$ gilt.

Definition 5.10. *Wir bezeichnen den Dualraum von $H_0^{m,s}(\Omega)$ mit $H^{-m,s'}(\Omega)$ wobei $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$ gilt. Im Falle von $s=2$ wird einfach $H^{-m}(\Omega)$ geschrieben.*

Definition 5.11. *Sei $E \subset \Omega$ und $\mathcal{K}_E = \{v \in H_0^1(\Omega)|v \geq 1$ auf $E \in H^1(\Omega)\}$. Die **Kapazität von** E bezüglich Ω (Notation: $cap_\Omega(E)$ oder, $cap(E)$) ist definiert durch*

$$cap(E) = \inf_{v\in\mathcal{K}_E} \int_\Omega v_x^2 dx$$

Satz 5.12. *Seien $f_0, f_1, ..., f_N \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)$. Sei u eine Lösung des Problems 4 in $\mathcal{K}_\psi$ für $f = f_0+\sum \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \in H^{-1}(\Omega)$, und sei μ das Maß das durch u bestimmt wird. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ sodass*

$$\mu(E) \leq C(cap(E))^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } E \subset \Omega \text{ kompakt.}$$

Es gilt sogar falls $cap(E) = 0$ ist so folgt $\mu(E) = 0$.

Beweis. Der Beweis des Satzes findet sich in [Kinderlehrer(1980)]. □

Definition 5.13.
- *Wir nennen eine Abbildung, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ mit $u, v \mapsto a(u, v)$ die linear in jeder Komponente ist, eine **Bilinearform**. Wir nennen sie **symmetrisch** falls $a(u, v) = a(v, u)$ für alle $u, v \in H$ gilt.*
- *Eine Bilinearform $a(u, v)$ auf H heißt **koerziv** falls es ein $\alpha > 0$ gibt sodass*

  $$a(v,v) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (\forall v \in H)$$

  gilt.

Beispiel 5.14 Sei $a(u, v)$ eine koerzive Bilinearform auf einem reellen Hilbertraum H mit $\alpha, C > 0$ sodass $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$ und $\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v)$ gilt. Sei $\rho \in \mathbb{R}$ sodass $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$. Dann gibt es ein $\vartheta \in (0, 1)$ sodass

$$|(u,v)-\rho a(u,v)| < \vartheta \|u\| \|v\|$$

gilt.

Beweis. Es gilt

$$|(u,v)-\rho a(u,v)|^2 = |(u,v)|^2 - 2\rho\,|(u,v)|\,|a(u,v)| + \rho^2\,|a(u,v)|^2$$

Nach dem Satz von *Risze-Frechet* gibt es für jedes $u \in H$ ein φ sodass

$$|(u,v)| = \|\varphi\| \|v\| = \|u\| \|v\|$$

gilt. Für jedes $u \in H$ gibt es, mit dem Satz von *Lax-Milgram*, $F_1, F_2 \in H'$ sodass

$$\alpha \|u\|^2 \leq F_1(u) = a(u,v)$$
$$\alpha \|v\|^2 \leq F_2(v) = a(u,v)$$

gilt. Somit erhällt man $\alpha \|u\| \|v\| \leq |a(u,v)|$. Damit folgt die Abschätzung

$$|(u,v) - \rho a(u,v)|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \|u\|^2 \|v\|^2 .$$

Da $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$ gilt folgt

$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1.$$

somit folgt mit der Wahl von $\vartheta^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2$ die Behauptung. $\square$

Beispiel 5.15 Seien $a(u,v)$ eine koerzive symmetrische Bilinearform und $F : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine differenzierbare konvexe Funktion für die es ein $v \in H$ gibt sodass $F(v) \neq +\infty$ gilt. Dann gibt es genau ein $u \in H$ sodass

$$a(u, v-u) + F(v) - F(u) \geq 0 \quad \forall v \in H \tag{13}$$

gilt.

Beweis. Es gelte ohne Einschränkung, dass $F(0) \neq +\infty$.
Die Aussage wird in 3 Schritten gezeigt.

1. Man betrachte das Problem

$$\min_{u \in H} \frac{1}{2} a(u,u) + F(u). \tag{14}$$

Da F stetig und konvex ist, gilt $F(u) - F(0) \geq F'(0)(u-0)$ für alle $u \in H$ gilt. Damit besitzt das Problem (15) eine Lösung, denn:

$$\frac{1}{2} a(u,u) + F(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 + F(0) + F'(0)(u-0) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - |F(0)| - |F'(0)| \|u\|$$

Daher gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ sodass für alle $v \in H$

$$\frac{1}{2} a(v,v) + F(v) \geq M$$

gilt. Daher gibt es (analog zum Beweis von Satz 3.5) eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ sodass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} a(u_n, u_n) + F(u_n) = \min_{v \in H} \frac{1}{2} a(v,v) + F(v) \tag{15}$$

gilt. Als Hilbertraum ist H vollständig, daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =: u \in H$ eine Lösung des Problems (15).

2. Nun folgt mit der notwendigen Optimalitätsbedingung für (15) und der koerzivität von F, dass (für $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} a(u + \varepsilon(v-u), u + \varepsilon(v-u)) + F(u + \varepsilon(v-u)) \right) |_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} (a(u,u) + 2\varepsilon a(u, v-u) + \varepsilon^2 a(v-u, v-u)) + F(u + \varepsilon(v-u)) \right) |_{\varepsilon=0} \\
&= a(u, v-u) + \varepsilon a(v-u, v-u)|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{d\varepsilon} \left(F(u + \varepsilon(v-u)) \right) |_{\varepsilon=0} \\
&\leq a(u, v-u) + F(v) - F(u)
\end{aligned}$$

gilt.

3. **Eindeutigkeit:** Seien $u_1, u_2 \in H$ zwei Lösungen für (13), dann gilt

$$a(u_1, v - u_1) + F(v) - F(u_1) \geq 0 \quad \forall v \in H$$
$$a(u_2, v - u_2) + F(v) - F(u_2) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Mit der Wahl von $v = u_2$ in der ersten, und $v = u_1$ in der zweiten Gleichung folgt

$$a(u_1, u_2 - u_1) + F(u_2) - F(u_1) \geq 0$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) + F(u_1) - F(u_2) \geq 0.$$

Damit erhält man

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq a(u_2, u_2 - u_1).$$

Somit folgt schließlich

$$0 \geq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq \alpha \left\| u_2 - u_1 \right\|^2 \geq 0.$$

Daher erhält man $u_1 = u_2$.

□

Beispiel 5.16 Es gelten die Vorraussetzungen von Beispiel 5.15. Sei $\mathcal{K} \subset H$ abgeschlossen und konvex. Mit der Wahl von

$$F(v) = \begin{cases} -(f, v) & \text{für } v \in \mathcal{K} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

in (13) gibt es eine eindeutige Lösung des Problems 3.

Beweis. Mit Beispiel 5.15 gibt es eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{K}$ sodass

$$a(u, v - u) - (f, v) + (f, u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

gilt. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

womit das Problem 3 eine eindeutige Lösung besitzt. □

Literatur

[Carl(2011)] Seppo Heikkilä / Siegfried Carl. *Fixed Point Theory in Ordned Sets and Applications.* Springer, New York, 2011.

[Kinderlehrer(1980)] Guido Stampacchia/David Kinderlehrer. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications.* Academic Press, New York, 1980.

[Tröltzsch(2009)] Fredi Tröltzsch. *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.